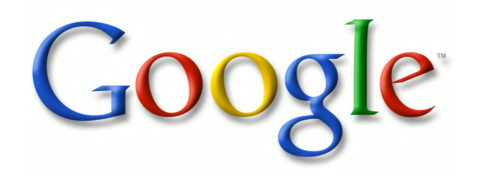












GRUNDZÜGE

DER

MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE.

GRUNDZÜGE

DER

MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE.

MIT ANWENDUNGEN

AUF DIE DER WÄRMELEHRE ANGEHÖRIGEN THEILE DER MASCHINENLEHRE

INSBESONDERE

AUF DIE THEORIE DER

CALORISCHEN MASCHINEN UND DAMPFMASCHINEN.

VON

DR. GUSTAV ZEUNER.

Zweite Auflage, neuer Abdruck.

MIT 56 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN UND ZAHLREICHEN TABELLEN.

LEIPZIG.

VERLAG VON ARTHUR FELIX.

1877.



Vorrede.

Das vorliegende Werk, welches ich hiermit als zweite Auflage meines im Jahre 1859 erschienenen Buches der Oeffentlichkeit übergebe, hat mit dem ursprünglichen durchaus nichts weiter gemein, als den Titel.

Während ich bei der Abfassung der ersten Ausgabe zunächst nur die Absicht hatte, die Aufmerksamkeit der Mechaniker auf die Lehren und die Resultate der Untersuchungen der mechanischen Wärmetheorie hinzulenken und ich zu diesem Zwecke die Resultate der bis dahin erschienenen, zerstreuten Arbeiten verschiedener Schriftsteller, vereinigt mit eigenen Untersuchungen, im Zusammenhange und übersichtlich darzulegen bemüht war, habe ich bei der Bearbeitung vorliegender Schrift ein ganz anderes Ziel vor Augen gehabt.

Die Schrift sollte ein, speziell für Techniker bestimmtes Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie werden und enthält daher alle diejenigen Theile der Maschinen-Mechanik behandelt, die sich auf die Wärmelehre stützen und die auf Grund der neuern Anschauungen über das Wesen der Wärme auch eine neue Behandlung und Bearbeitung erfahren mussten. Als Lehrer der technischen Mechanik und Maschinenlehre an einer höhern technischen Lehranstalt musste ich von jeher darauf bedacht sein, mit Aufmerksamkeit vor Allem die Fortschritte in der Physik zu verfolgen und die Ergebnisse der neuesten physikalischen Forschungen zur weitern Ausbildung der von mir gepflegten Wissenschaft zu verwerthen suchen. Schon bei meinem ersten Studium der ältern Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie erkannte ich die grosse Bedeutung, welche dieser neue Zweig der Physik auch für die weitere Ausbildung der Mechanik, ins Besondere der theoretischen Maschinenlehre erlangen müsse und habe daher seit zehn Jahren gewisse Theile meiner Vorlesungen am eidgenössischen Polytechnikum fort und fort den Anforderungen der neuen Wärmelehre gemäss umgeändert und weiter ausgebildet.

Der grössere Theil des vorliegenden Buches ist neu und umfasst die Resultate meiner Untersuchungen in der angedeuteten Richtung: schon ein Blick auf das Inhaltsverzeichniss wird die Reichhaltigkeit der Ausbeute erkennen lassen und zeigen, welche Menge von technischen Fragen durch die Sätze der mechanischen Wärmetheorie ihre Lösung und Beantwortung finden.

Dass ich bei meinen Bestrebungen, von der neuen Wärmelehre den angewandten Theil als einen besondern Zweig schon jetzt abzuziehen, vor Allem mein Augenmerk der Theorie derjenigen Kraftmaschinen zuwenden musste, bei denen im Grunde die Wärme als Motor wirkt, ist natürlich. In den letzten Jahren ist kein Werk mechanischen Inhalts erschienen, in welchem nicht die Hoffnung ausgesprochen wurde, es möge bald gelingen, die Theorie der calorischen Maschinen und der Dampfmaschinen auf Grund der mechanischen Wärmetheorie aufzubauen.

Ich glaube nun, dass meine neue Theorie der Dampfmaschinen, welche ich diesem Werke einverleibt habe, den Ansprüchen, welche die mechanische Technik an die mechanische Wärmetheorie gestellt hat, entsprechen wird und dass sie die ältere Theorie des Grafen Pambour schon in der von mir gegebenen Ausdehnung vollständig zu ersetzen vermag. Es wäre mir leicht gewesen, gerade diesen Theil des Buches weit ausführlicher zu behandeln; es schien mir aber der ganzen Anlage des Werkes mehr entsprechend, zunächst nur in allgemeinen Zügen die Resultate meiner Untersuchungen vorzuführen und vor allen Dingen mein Urtheil über das wahre Wesen unserer Dampfmaschinen, über den Grad der Vollkommenheit des Prozesses, welchen dieselben ausführen und über den Prozess einer theoretisch vollkommenen Dampfmaschine hier niederzulegen. Die wenigen Bogen, welche diese Betrachtungen enthalten, geben die vollständigen Grundlagen einer neuen Dampfmaschinenlehre und es wird jedem wissenschaftlich gebildeten Mechaniker leicht werden, auf diesen Grundlagen weiter zu bauen.

Was im Uebrigen die ganze Anlage des Buches betrifft, so musste ich, bevor überhaupt von Anwendungen die Rede sein konnte, zunächst die theoretischen Theile voraussenden und das ist im Wesentlichen im ersten Abschnitte, welcher die Ableitung der Hauptgleichungen enthält, geschehen. Hier und bei mehreren der allgemeinern Untersuchungen über das Verhalten der Gase, der Dämpfe und der flüssigen und festen Körper befand ich mich auf einem Felde, das schon von andern Schriftstellern betreten und mit den schönsten Erfolgen von Clapeyron, Clausius, Rankine, W. u. J. Thomson, Joule, Hirn u. A. ausgebeutet

worden ist. Bei Abfassung dieser Theile habe ich jedoch in den Entwickelungen einen neuen Weg eingeschlagen und vor allen Dingen möglichste Einfachheit und Klarheit in der Darstellung angestrebt, ohne dass dadurch, ich hoffe es, der strengen Wissenschaftlichkeit des Gegenstandes Abbruch geschehen ist; ich habe gesucht, die Hauptsätze der Wärmetheorie durch analoge Sätze aus der Mechanik, die meinen Lesern geläufig sind, zu erläutern und habe dabei gewissenhaft, ich darf sagen, mit ängstlicher Gewissenhaftigkeit hervorgehoben, welchen Schriftstellern die neue Wärmelehre die Entdeckung und Aufstellung neuer Sätze zu verdanken hat. Die vorliegende Schrift ist, wenigstens in der deutschen Literatur, das erste Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie, wenigstens das erste Buch, welches die Grundsätze derselben und die Ergebnisse der Untersuchungen verschiedener Schriftsteller übersichtlich und im Zusammenhange darlegen soll; es war daher meine Pflicht, vor Allem in dankbarer Anerkennung derjenigen Männer zu gedenken, die vorzugsweise zu der raschen Entwickelung des neuen Zweiges der Physik beigetragen haben.

Ich glaube, keine der wichtigern Arbeiten unerwähnt gelassen und in der Beurtheilung derselben keine Ungerechtigkeit begangen zu haben; die Literatur über die mechanische Wärmetheorie ist noch keineswegs so ausgedehnt, dass sich nicht recht wohl noch der Grad der Betheiligung der einzelnen Schriftsteller übersehen liesse. In den meisten Fällen, in denen sich meine Darstellung und meine Entwickelungen von denen Anderer unterscheidet, habe ich nicht weiter auf den Unterschied hingewiesen, in keinem Falle aber solche Gelegenheit benutzt, die Thätigkeit und die Bestrebungen Anderer herabzusetzen; der Wissenschaft ist mit einem solchen Verfahren nicht gedient und am wenigsten wäre dasselbe in einem Lehrbuche am Platze.

Der allgemeine theoretische Theil dieser Schrift ist ausführlicher gehalten, als es eigentlich der Zweck, den ich im Auge hatte, erfordert hätte, er enthält alle Sätze der mechanischen Wärmetheorie, die wir als feststehende und direct aus den Grundprinzipien hervorgehende ansehen können. Ich mache zwar keinen Anspruch darauf, dass auch Physiker in allen Theilen mit dem Gegebenen sich befriedigt erklären sollen, hege aber doch die Hoffnung, dass nicht blos in technischen Kreisen das Buch als ein für das erste Studium brauchbares angesehen werden wird.

Was den angewandten Theil betrifft, der, wie ich schon erwähnte, fast durchgehends Neues enthält, so unterlasse ich hier eine nähere Besprechung desselben, indem ich einfach auf das Inhaltsverzeichniss verweise; nur in Betreff der zahlreichen Tabellen, besonders der

grossen Tabellen des Anhanges, halte ich einige nähere Angaben für nothwendig.

Die Tabellen sind sämmtlich neu berechnet und zwar auf Grund der neuesten Untersuchungen Regnault's. Sofort nach dem Erscheinen des zweiten Bandes von Regnault's »Relation des expériences entreprises pour déterminer les lois et les données physiques nécessaires au calcul des machines à feu. Paris 1862« begann ich auch die mühevolle und zeitraubende Arbeit der Berechnung der neuen Dampftabellen; ich würde aber gewiss bald von dieser Arbeit zurückgetreten sein, wenn mir nicht das Arithmometer von Thomas zur Verfügung gestanden hätte; alle Werthe der Tabellen des Buches sind mit dieser Maschine berechnet, daher kommt es auch, dass die Zahlenwerthe auf mehr Dezimalstellen notirt sind, als für gewöhnliche Rechnungen erforderlich ist. Wären die Werthe durch Rechnung mit Logarithmen gewonnen worden, so würde die Aufführung der letzten Dezimalstellen freilich sehr unnöthig gewesen sein, da sie dann keinen Anspruch auf Genauigkeit machen könnten.

Von den Tabellen des Anhanges habe ich bei meinen Untersuchungen fast nur von den auf Wasserdämpfe bezüglichen Gebrauch gemacht, wenn ich doch auch für die übrigen Dämpfe, die auf Grund der bewundernswürdigen Versuche Regnault's eine Untersuchung in gleicher Ausdehnung zulassen, Tabellen berechnete und hier beilegte, so geschah es in der Absicht, Andern das Material für weitere Forschungen an die Hand zu geben und überhaupt die Regnault'schen Versuchsresultate so weit zu verwerthen, als es nach dem jetzigen Stande der mechanischen Wärmetheorie möglich ist. Auf die Berechnung und Correctur der Tabellen habe ich die grösste Sorgfalt verwendet, so dass sie mit Vertrauen aufgenommen werden können.

Gustav Zeuner.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Ableitung der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie.

Zweiter Abschnitt.

Untersuchungen über das Verhalten der permanenten Gase.

Dritter Abschnitt.

Untersuchungen über das Verhalten der Dämpfe.

B. Neue Theorie der Dampfmaschinen.

Vierter Abschnitt.

Untersuchungen über das Verhalten fester und flüssiger Körper.

Anhang.

Tabellen.

Einleitung.

Die Untersuchungen der Eigenschaften des Lichtes haben zu der jetzt allgemein herrschenden Ansicht geführt, dass im ganzen Weltraume ein äusserst feiner, elastischer Stoff, der »Aether«, verbreitet ist; ein Stoff, der alle Körper durchdringt und dessen Theilchen sich in vibrirender, schwingender Bewegung befinden.

Aehnlich wie von einem schwingenden Körper die ihn umgebende Luft in Schwingungen versetzt wird, die sich nach allen Richtungen wellenförmig verbreiten und die, in das Ohr gelangend, unter Umständen die Empfindung des Tones erzeugen, ebenso gehen von einem leuchtenden Körper Schwingungen des Aethers aus, die in unser Auge tretend unter gewissen Verhältnissen den Lichteindruck hervorbringen.

Im einen Falle schwingen die Lufttheilchen, im andern Falle die Aethertheilchen um gewisse Gleichgewichtslagen, und die Fortpflanzung des Schalles, beziehungsweise des Lichtes, besteht darin, dass nach allen Richtungen hin, vom Mittelpunkte der Erschütterung ausgehend, mehr und mehr Theilchen, angeregt durch die vorhergehenden, in Schwingungen gerathen.

Der Unterschied der Töne bei der Schallbewegung hat seinen Grund in der grössern oder kleinern Anzahl der Schwingungen, welche die Lufttheilchen in einer gewissen Zeit, z. B. in der Sekunde machen; je schneller die Schwingungen auf einander folgen, um so höher erscheint der Ton; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist aber unabhängig von der Dauer einer Schwingung.

In ähnlicher Weise erklären sich die verschiedenen Farben aus der Verschiedenheit der Anzahl der Aetherschwingungen in

einer gewissen Zeit; während auch hier die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen der verschiedenfarbigen Lichtstrahlen im Raume fortschreiten, für alle Strahlen die gleiche ist.

Die Hypothese, dass das Licht kein Stoff, sondern etwas dem Schalle Analoges sei, dass es in der Fortpflanzung oscillatorischer Bewegung der kleinsten Theile eines eigenthümlichen Mittels bestehe (Undulations- oder Vibrationshypothese), wurde zuerst von Huyghens (1690) aufgestellt; aber erst seit Anfang dieses Jahrhunderts, seit durch die Arbeiten von Young und Fresnel und durch die mathematischen Untersuchungen von Cauchy, Green u. A. dargelegt wurde, dass mittelst dieser Hypothese alle bekannten Erscheinungen des Lichtes, die Beugung, Polarisation, Interferenz und Doppelbrechung klar und einfach sich erklären lassen, ist die Undulationstheorie allgemein angenommen, und die von Newton aufgestellte Emanationstheorie, wonach das Licht ein Stoff sein soll, dessen Theilchen von den leuchtenden Körpern mit grosser Geschwindigkeit ausgesendet werden, verlassen worden.

Die allgemeine Annahme der Undulationstheorie bei Erklärung der Lichterscheinungen hat aber dahin geführt, die Imponderabilien, die unwägbaren Stoffe überhaupt aus der Physik nach und nach zu verbannen; mehr und mehr verbreitet sich die Ansicht, dass, wie das Licht, auch die Wärme, die Elektrizität und der Magnetismus Aeusserungen von Bewegung der kleinsten Theile ein und desselben Stoffes, des Aethers, sind.

Die Annahme der Undulationstheorie für das Licht führten wenigstens zunächst zu der Folgerung, dass auch die Wärme und zwar die strahlende Wärme eine Bewegung kleinster Theile sein müsse.

Aus den schönen Versuchen Melloni's geht unzweifelhaft hervor, dass die strahlende Wärme, wie das Licht, in Transversalschwingungen des alle Körper durchdringenden Aethers besteht. Die Wärmestrahlen sind nichts Andres, als eine gewisse Art von unsichtbaren Lichtstrahlen, die aus Aetherschwingungen bestehen, deren Schwingungsdauer von der der sichtbaren Strahlen verschieden ist.

Unser Auge vermag solche Strahlen nicht mehr als Licht zu empfinden, ebenso wie das Ohr nicht im Stande ist, Töne zu hören oder mit andern Worten Luftschwingungen uns zum Be-

wusstsein zu bringen, deren Schwingungsdauer unter ein gewisses Maass sinkt.

Lässt man durch eine kleine Oeffnung im Fensterladen eines dunkeln Zimmers Sonnenstrahlen auf ein Glasprisma treten, so erscheint bekanntlich auf einem gegenüberstehenden weissen Schirm ein Bild aus farbigen Streifen; man erkennt die Regenbogenfarben, die der Reihe nach sind: roth, orange, gelb, grün, hellblau, dunkelblau und violett. Das weisse Sonnenlicht zeigt sich zusammengesetzt aus verschiedenen farbigen Strahlen, deren Trennung aus der verschiedenen Brechbarkeit sich ergiebt, die sich nicht weiter zerlegen lassen, die aber vereinigt, wieder weisses Licht geben.

Am wenigsten wird das Roth, am stärksten das Violett abgelenkt, und die verschiedene Ablenkung steht in direkter Beziehung zu den Wellenlängen der verschiedenfarbigen Strahlen und zu der Anzahl der Oscillationen, welche die Aethertheilchen in gewisser Zeit machen. Beim äussersten Roth des Spectrums beträgt nach Fresnel diese Schwingungszahl 481 Billionen (Millionen mal Millionen) in der Sekunde und beim äussersten Violett 764 Billionen.

Die Ausbreitung der Farben im Spectrum ist verschieden, am grössten beim Violett, am kleinsten beim Gelb, während umgekehrt nach Fraunhofer die Lichtstärke beim Violett am kleinsten ist und zunimmt bis zum Gelb, um von da nach dem Roth hin wieder abzunehmen. Im Gelb liegt sonach das Maximum der Lichtstärke.

Nun ergiebt aber eine weitere Untersuchung des Spectrums ein Resultat, das für unsere Betrachtungen von besonderer Bedeutung ist; es zeigt sich nämlich, dass die Fläche, auf welche das Spectrum fällt, erwärmt wird, dass aber hinsichtlich dieser Erwärmung eine andere Vertheilung stattfindet, als in Hinsicht der Lichtstärke.

Erzeugt man das Spectrum durch ein Steinsalzprisma, weil dieses die Wärmestrahlen am vollkommensten durchlässt, so zeigt sich im Violett die Erwärmung am geringsten, nimmt nach dem Roth hin mehr und mehr zu und erreicht im dunkeln Raum ausserhalb des Roth erst das Maximum, um weiterhin wieder abzunehmen. Die Erwärmung kann bis auf zwei Dritttheile des

sichtbaren Spectrums über das Roth hinaus, also nach der Seite der geringern Brechbarkeit, noch verfolgt werden.

Das Wärmespectrum fällt sonach zum Theil auf das optische Spectrum, zum Theil in den dunkeln Raum jenseits des Roth.

Man muss daraus schliessen, dass es ausser den sichtbaren Strahlen, den eigentlichen Lichtstrahlen, noch Strahlen giebt, die wir nicht sehen, die sich aber durch Erwärmung kund geben. Diese Strahlen, welche das Wärmespectrum bilden, sind schwächer gebrochen, haben also eine grössere Wellenlänge und grössere Schwingungsdauer. Die stärkste Erwärmung findet demnach durch solche Strahlen statt, bei denen die Aetherteilchen weniger als 481 Billionen Schwingungen in der Sekunde machen.

Der Vollständigkeit wegen mag noch hinzugefügt werden, dass die Untersuchung der andern Seite des Spectrums, ausserhalb des Violett zu nicht weniger interessanten Resultaten geführt hat. Strahlen, bei denen die Anzahl der Aetherschwingungen mehr als 764 Billionen in der Sekunde beträgt, entgehen wieder dem Auge, sind aber nichts destoweniger vorhanden und äussern sich vornehmlich durch chemische Aenderungen, die sie an gewissen Körpern hervorbringen.

Auf der Fähigkeit der Lichtstrahlen, gewisse chemische Verbindungen zu zersetzen, beruht die Photographie; die nähere Untersuchung der Farben des Spectrums zeigt aber, dass dem Roth der geringste, dem Violett der stärkste Grad dieser Fähigkeit zukommt, dass aber die grösste chemische Wirkung durch die unsichtbaren, ausserhalb des Violetten liegenden, durch die sogenannten ultravioletten Strahlen erzielt wird.

Das Vorhandensein der ultravioletten Strahlen äussert sich übrigens auch durch die Fluorescenz. Gewisse gefärbte Pflanzenextracte leuchten, sobald man sie in den dunkeln Raum ausserhalb des Violetten bringt, was durch die Annahme erklärt wird, dass diese Körper im Stande sind, die Schwingungszahlen der auf sie fallenden ultravioletten Strahlen herabzusetzen und sonach sichtbare Strahlen auszusenden.

Wegen der genannten Eigenschaften des auf Seite des Violetten liegenden, sichtbaren und unsichtbaren Theiles des Spectrums nennt man diesen Theil das chemische oder Fluorescenz-Spectrum.

Aus dem Erwähnten geht hervor, dass das sichtbare Spec-

trum nur ein Theil eines grössern und zwar der kleinere Theil eines solchen ist; man hat häufig die sichtbare Farbenreihe mit einer Tonleiter verglichen, in welcher sich jeder Farbenton auf Grund der bekannten Schwingungszahlen der verschiedenen Farben bestimmen lässt: diese acustische Eintheilung zeigt, dass der sichtbare Theil nicht ganz eine Oktave, das ganze Spectrum aber, soweit jetzt die Kenntniss reicht, gegen vier Oktaven umfasst.

Der grössere Theil davon kommt auf das Wärmespectrum und den Wärmestrahlen kommen dieselben Eigenschaften zu, wie den sichtbaren Strahlen, den Lichtstrahlen; man hat auch an ihnen die Erscheinung der Beugung und Interferenz nachgewiesen, Erscheinungen, die nur durch Aetherschwingungen ihre Erklärung finden; ebenso beweisen die Versuche über Polarisation und Doppelbrechung der Wärmestrahlen, dass man es hier, wie bei Lichtstrahlen, mit Transversalschwingungen des Aethers zu thun hat.

Will man sonach die Aetherschwingungen, wenigstens die Transversalschwingungen mit einem Namen umfassen, so gebührt ihnen der Name »Wärme«.

Ein Körper, welcher im Stande ist, den ihn umgebenden Aether in Schwingungen zu versetzen und diese Eigenschaft kommt allen Körpern zu, sendet »Wärmestrahlen« aus, und unter diesen tritt eine gewisse Art auf, die unsere Gefühlsnerven afficiren und im gewöhnlichen Sinne erwärmend wirken. Eine andere Art dieser Strahlen, bei denen die Schwingungszahlen zwischen die vorhin bezeichneten Grenzen fallen, kann ausserdem in unserm Auge die Empfindung des Lichtes hervorbringen. Wieder andere dieser Wärmestrahlen und zwar im Allgemeinen solche, denen eine noch grössere Schwingungszahl zukommt als den leuchtenden Strahlen, bekunden ihre Anwesenheit durch ihre chemischen Wirkungen und durch die Fluorescenz.

Die Resultate der Untersuchungen des Spectrums, die wir nur kurz hervorgehoben haben und nach denen die strahlende Wärme unzweifelhaft in der Fortpflanzung oscillatorischer Bewegung des den Raum erfüllenden Aethers besteht, führen nun ohne Weiteres zu der sehr wahrscheinlichen Annahme, dass auch die in einem Körper enthaltene Wärme zunächst in Schwingungen kleinster Theile ihren Grund haben möge.

Was die Constitution der Körper überhaupt betrifft, so ist ietzt diejenige Ansicht, die zuerst von Ampère, Poisson und Cauchy in bestimmter Weise ausgesprochen wurde, die verbreitetste, nach welcher die Körper aus unveränderlichen, durch relativ sehr grosse Zwischenräume getrennten Theilchen, den »Körperatomen« bestehen. Die Atome sind so klein, dass in einer für unsere Sinne verschwindend kleinen Stoffmenge eine ungemein grosse Anzahl enthalten sein kann, und es giebt so viele verschiedene Arten, als es chemisch einfache Stoffe giebt.

Solcher Atome, die anziehend auf einander wirken, können sich mehrere, verschiedener oder gleicher Art, zu einer Gruppe vereinigen, und eine solche Gruppe heisst ein Molekül. Auf diese Weise entstehen die chemisch zusammengesetzten Körper. Die verschiedenartige Gruppirung der gleichen Atome erklärt auch (nach Clausius*) den Umstand, dass einzelne, chemisch gleich zusammengesetzte Körper, verschiedenes physikalisches Verhalten zeigen.

Die relativ weiten Räume zwischen den Molekülen sind mit Aether erfüllt. Die Aetheratome, die sehr klein im Verhältniss ihrer gegenseitigen Abstände und zu den Körperatomen sind, wirken abstossend auf einander und werden von den Körperatomen angezogen. In Folge der Wirkung dieser Kräfte wird der Aether die Moleküle und Atome atmosphärenartig umgeben. Diese Atmosphären, deren Dichtigkeit von innen nach aussen abnimmt, bilden mit ihrem Kern ein individuelles Ganze. Ein Atom mit seiner Aetherhülle nennt Redtenbacher eine »Dynamide«, während nach ihm eine Vereinigung von Atomen (Molekül) mit gemeinschaftlicher Aetheratmosphäre eine »zusammengesetzte Dynamide« genannt wird**).

Stellt man sich vor, dass auf einen Körper solcher Art Wärmestrahlen fallen, so werden die schwingenden Aethertheilchen ihre Bewegung zum Theil auf die Körpertheilchen oder auf die im Körper enthaltenen Aethertheilchen oder auf beide zugleich übertragen und die im Körper schon vorhandenen Bewegungen verstärken.

*) Clausius, Ueber die Natur des Ozons. Poggendorff's Annalen. B. 103. S. 644.

**) Redtenbacher, »Dynamidensystem«. »Grundzüge einer mechanischen Physik«. Mannheim 1857.

Man sagt dann, der Körper sei erwärmt worden; derselbe kann bei der Berührung an unsern Gefühlsnerven dieselbe Empfindung hervorbringen, wie die Wärmestrahlen selbst.

Umgekehrt können sich die Bewegungen im Innern des Körpers auch auf den ihn umgebenden Aether übertragen; man sagt dann, der Körper strahle Wärme aus.

Dass die genannten Bewegungen im Innern des Körpers ebenfalls oscillatorische sind, ist als sicher anzunehmen, wenn man sich überhaupt derjenigen Ansicht über die Constitution der Körper und über das Wesen der Wärme anschliesst, wie wir sie eben als die verbreitetste angeführt haben.

Nur in einem Punkte gehen die Ansichten auseinander, nämlich in der Frage, ob die sogenannte Wärmebewegung in der Bewegung der Atome, d. h. der materiellen Theile des Körpers oder in der Bewegung der im Körper angesammelten Aethertheilchen ihren Grund hat.

Redtenbacher nimmt an, die Wärmebewegung bestehe in radialen Bewegungen der die Körperatome oder Moleküle umgebenden Aetherhüllen, diese Hüllen ziehen sich zusammen und dehnen sich aus. Im vollkommenen Ruhezustand dieser Hüllen sind die Körper absolut kalt. Findet zwischen der Anziehung und Abstossung der einzelnen Dynamiden Gleichgewicht statt, so haben die Körper ein selbstständiges Volumen. Ist hingegen die Abstossung überwiegend, so bedarf es einer die Dynamidenvereinigung umschliessenden festen Hülle; das letztere entspricht dem gasförmigen Zustande; im ersten Falle können die Körper sich im festen oder tropfbar flüssigen Zustande befinden; im flüssigen Zustand sind die Dynamiden gegenseitig frei verschiebbar, ohne ihren gegenseitigen Abstand, also somit das Gesammtvolumen zu ändern.

Eine andere Ansicht hat Clausius*) ausgesprochen, nach ihm besteht die Wärmebewegung in der Bewegung der Moleküle, d. h. der materiellen Theile der Körper, und zwar ist diese Bewegung bei festen, flüssigen und gasförmigen Körpern

---

*) Clausius, Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. »Poggendorff's Annalen«. Bd. 100. S. 353.

Clausius, Ueber das Wesen der Wärme, verglichen mit Licht und Schall. Ein populärer Vortrag. Zürich 1857.

verschieden. Im festen Zustande bewegen sich die Moleküle um gewisse Gleichgewichtslagen, sie schwingen, und zwar unter Einwirkung der Kräfte, die sie gegenseitig auf einander ausüben. Neben geradlinig schwingenden Bewegungen der Moleküle können auch drehende Schwingungen um den Schwerpunkt und Bewegungen der Bestandtheile, d. h. der Atome des Moleküls, auftreten.

Im flüssigen Zustande findet eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung statt, die lebendige Kraft der Bewegung ist im Verhältniss der gegenseitigen Anziehung der Moleküle nicht stark genug, sie ganz von einander zu trennen, sie erhalten sich auch ohne äusseren Druck innerhalb eines gewissen Volumens.

Im gasförmigen Zustande sind die Moleküle ganz aus den Sphären ihrer gegenseitigen Anziehung gekommen, bewegen sich nach den gewöhnlichen Gesetzen geradlinig fort und rotiren, wahrscheinlich mögen auch bei Gasen gleichzeitig oscillirende Bewegungen der Bestandtheile, der Atome der Moleküle stattfinden.

Dass die Haupteigenschaften der Gase durch die Wirkungen geradlinig fortschreitender Bewegung der Moleküle ihre Erklärung finden können, hat vor Clausius schon Krönig*) durch einfache Rechnungen nachgewiesen. Die Idee, welche diesen und zum Theil den Rechnungen von Clausius zu Grunde liegt, ist aber schon alt; Ausführlicheres hierüber findet sich in den Schriften von Le Sage**).

Es wäre unbestreitbar von grosser Bedeutung für die weitere Ausbildung der mechanischen Wärmetheorie, wenn die soeben behandelte Frage entschieden und uns die Art der Wärmebewegung in Körpern bekannt wäre. Die Forschungen würden dann gewiss zu nicht weniger zahlreichen und überraschenden Resultaten führen, wie die Forschungen über das Wesen des Lichtes.

---

*) »Grundzüge einer Theorie der Gase«. Poggendorff's Annalen. Bd. 99. S. 315.

**) Deux traités de physique mécanique publiés par Pierre Prevost. Genève et Paris 1818.

Die erste Abtheilung enthält die Arbeiten von Le Sage, in welchen über die Constitution der Gasarten ganz ähnliche Ansichten ausgesprochen werden, wie diejenigen, auf die man in neuerer Zeit durch die Sätze der mechanischen Wärmetheorie wieder zurückgekommen ist. Le Sage führt eine Reihe von Schriftstellern an (S. 126), die vor ihm schon ähnlich sich aussprachen; mit besonderer Bestimmtheit geschah dies von Daniel Bernoulli.

Es ist überhaupt von hohem Interesse, den Gang der Entwickelung der Lehre vom Lichte (Vibrationstheorie) mit dem der Entwicklung der mechanischen Wärmetheorie zu vergleichen.

In der Theorie des Lichtes ging man sofort von einer ganz bestimmten Bewegungsart des Aethers aus; man nahm von vornherein an, dass die Aethertheilchen Bahnen um ihre Gleichgewichtslagen unter der Einwirkung einer Kraft beschreiben, die der Entfernung des Theilchens von der Gleichgewichtslage direkt proportional und anziehend wirkt: und diese einfache Hypothese über die Art der Lichtbewegung führte dann zu Entdeckungen, die wir zu den herrlichsten in den Naturwissenschaften zählen.

Einen davon wesentlich verschiedenen Weg gingen die Untersuchungen in der Lehre von der »Wärme«, seitdem man die Ansicht, die Wärme sei ein Stoff, hatte fallen lassen. Von den zahlreichen hieher gehörigen Arbeiten sind es nur wenige, deren Ausgangspunkt in der Annahme einer bestimmten Art der Wärmebewegung lag, und diese Untersuchungen beziehen sich nur auf das Verhalten der Gasarten.

Im Uebrigen enthielt man sich, wie es auch im weitern Verlauf der vorliegenden Schrift geschehen soll, bei den mathematischen Entwickelungen, bestimmte Voraussetzungen über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen, zu machen.

Wenn man doch hier und da auf die wahrscheinliche Constitution der Körper und ihren Bewegungszustand hindeutet, so geschieht es nur, um das Verständniss und Verfolgen der mathematischen Darstellungen zu erleichtern.

Man könnte daher sagen, dass die mechanische Wärmetheorie auf einfachern Sätzen ruht, als die Lehre vom Licht, in der man neben der Annahme, dass das Licht eine Bewegung kleinster Theile eines Stoffes sei, gleichzeitig eine bestimmte Hypothese über die Art dieser Bewegung den Untersuchungen zu Grund legt.

In der neuern Wärmelehre macht man zunächst ganz einfach nur die Annahme, dass die fühlbare Wärme in einem Körper eine Molekularbewegung sei. Ein Erwärmen oder Erkälten eines Körpers besteht in einer Verstärkung oder Schwächung dieser Bewegung. Ist der Körper Wärmestrahlen von gewisser Stärke ausgesetzt, oder steht er mit einem Körper in Berührung, in welchem die Bewegung stärker ist, so kann sich seine eigene Molekularbewegung verstärken, er wird fühlbar er-

wärmt, während das Erkalten in Abgabe von Bewegung an andere Körper oder den ihn umgebenden Aether besteht.

Als Maass für die Stärke der Bewegung eines materiellen Punktes von bestimmter Masse, der sich mit einer gewissen Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bewegt, dient aber die lebendige Kraft, diejenige Arbeit, welche dazu gehört, diese Masse aus der Ruhe in diese Geschwindigkeit zu versetzen, oder was dasselbe ist, diejenige Arbeit, die man gewinnt, wenn dieser materielle Punkt aus dieser Geschwindigkeit zur Ruhe übergeht.

Stellen wir uns nun den Körper als eine Verbindung materieller Punkte vor (Körper- und Aether-Atome), die mit gewissen Kräften auf einander wirken und die in schwingender und rotirender Bewegung irgend welcher Art begriffen sind, so ist, von welcher Art auch die Anordnung der Bestandtheile und von welcher Grösse augenblicklich auch die Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes sein mag, doch im ganzen System in einem gewissen Augenblicke eine bestimmte mechanische Arbeit angehäuft; die gesammte lebendige Kraft ist eine bestimmt angebbare und ist die halbe Summe aller Produkte aus den Massen der sämmtlichen materiellen Punkte, jede multiplizirt mit dem Quadrate der augenblicklichen Geschwindigkeit des betreffenden Punktes.

Wissenschaftlich gesprochen, besteht also eine Verstärkung oder Schwächung der Molekularbewegung in einem Körper zunächst in einer Vermehrung oder Verminderung der Summe der lebendigen Kraft aller einzelnen Theile.

Bezeichnen wir diese im Körper angehäufte Arbeit mit dem Namen »Schwingungsarbeit«, so lässt sich aus allem Gesagten zunächst schliessen, dass die fühlbare Wärme in einem Körper in einem gewissen Zusammenhange mit dieser Schwingungsarbeit steht, und der zunächst liegende Gedanke ist der, dass ein fühlbares Erwärmen oder Erkälten eines Körpers geradezu nur in Vermehrung oder Verminderung der Schwingungsarbeit besteht. Damit ist aber noch keineswegs ausgesprochen, dass ein Zuführen von Wärme zu einem Körper jederzeit eine Vermehrung der Schwingungsarbeit zur Folge haben muss; auch ohne die gewöhnlichen Erfahrungen lässt sich das Gegentheil erwarten.

Ein System verbundener materieller Punkte, die durch Kräfte auf einander wirken und die sich in schwingender Bewegung

befinden, wird nämlich durch irgend welche Einwirkungen, die es nach aussen hin auf ein andres System ausübt, nicht nur insofern Aenderungen erleiden, als sich die Schwingungsarbeit ändert, sondern es wird sich im Allgemeinen auch die gegenseitige Stellung der Mittellagen der schwingenden, materiellen Punkte ändern können; welches nun auch die Kräfte sein mögen, welche bei Aenderungen dieser Art zur Wirkung gelangen oder überwunden werden müssen, immer werden diese Aenderungen Arbeit erfordern oder es wird durch dieselbe Arbeit frei. Die Kräfte, von denen hier die Rede ist, sind aber zweierlei Art; wir haben die Kräfte, mit welchen die materiellen Punkte des Körpers selbst auf einander wirken (anziehende oder abstossende), zu unterscheiden von den Kräften, welche von aussen her auf das System wirken, die herrühren von den Wirkungen eines zweiten Systems auf das erste. Die Kräfte der letztern Art äussern sich im Allgemeinen durch Pressungen gegen die gesammte Oberfläche des Körpers.

Die ganze Arbeit nun, die in solchem Falle in Folge der Aenderung der Anordnung der kleinsten Theile des Körpers oder des Systems materieller Punkte aufgenommen oder abgegeben wird, soll kurz die Disgregationsarbeit*) genannt werden.

Man kann sich jetzt dahin aussprechen, dass jede Zustandsänderung eines Körpers mit einer Aufnahme oder Abgabe von Schwingungsarbeit oder Disgregationsarbeit oder von beiden zugleich verbunden ist, von welcher Art zunächst auch die Einwirkungen sein mögen, welche solche Zustandsänderungen im System hervorbringen.

Betrachtet man nun genauer die Aenderungen, die an einem

---

*) Das Wort »Disgregation« hat Clausius zuerst benutzt; Clausius versteht darunter den Grad der Zertheilung eines Körpers und spricht, wenn eine Aenderung der Anordnung der kleinsten Theile eines Körpers in der Art, wie es im Text angedeutet wurde, stattfindet von »Aenderung der Disgregation des Körpers«.

S. »Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit«. Poggendorff's Annalen 1862. Bd. 116. S. 73. sowie:

Clausius, »Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie«. Braunschweig. 1864. Abhandlung VI.

Körper sich zeigen, dem man Wärme mittheilt oder entzieht, so zeigen sich im Allgemeinen auch Volumenänderungen, meist unter Ueberwindung äusserer Kräfte (Pressungen). Wir schliessen daraus, dass die einem Körper zugeführte Wärme im Allgemeinen auch eine Aenderung der Anordnung der Bestandtheile bewirkt, dass dabei sonach Disgregationsarbeit verbraucht oder gewonnen wird: die Wärmemenge steht dabei ohne Zweifel auch in einem gewissen Zusammenhange mit dieser Disgregationsarbeit. Da ein solcher Zusammenhang auch mit der gleichzeitig stattfindenden Aenderung der Schwingungsarbeit besteht, so tritt vor Allem die Frage heran, welche Beziehungen zwischen den genannten Grössen wohl stattfinden mögen.

In dieser Hinsicht geht man nun in der mechanischen Wärmetheorie von folgender Annahme aus:

»Die Wärmemenge, welche man einem Körper zuführt oder entzieht, ist der Summe der gleichzeitig stattfindenden Aenderungen der Schwingungs- und der Disgregationsarbeit des Körpers **direkt proportional.**«

Diese Hypothese ist es, welche allen unsern weitern Untersuchungen zu Grunde liegt und deren Wahrscheinlichkeit wir im Folgenden, bevor wir sie als Grundlage der mathematischen Entwickelungen benutzen, noch näher zu prüfen haben.

Nach der genannten Annahme kann man eine gewisse Wärmemenge demnach unmittelbar durch die Arbeit messen, welche durch dieselbe gethan worden ist, und daher hat man obigen Grundsatz auch einfach mit den Worten ausgesprochen:

»Wärme und Arbeit sind aequivalent.«

Die Aufnahme von Wärme von Seite eines Körpers erscheint mit einer Aufnahme von Arbeit gleichbedeutend. Die Wärmeaufnahme besteht in einer Vermehrung, die Wärmeabgabe in einer Verminderung der Schwingungs- und Disgregationsarbeit des Körpers. Ist diese Annahme richtig, so muss man zunächst schliessen, dass man an einem Körper auch direkt durch Arbeitsverrichtung (durch Compression etc.) ähnliche Aenderungen hervorzubringen vermag, die sonst durch Wärmezuleitung erreicht werden, und dass umgekehrt durch Arbeitsabgabe von Seite des Körpers (durch Ausdehnung desselben unter Ueber-

windung eines äussern Druckes) ähnliche Aenderungen im Innern vorgehen, die wir beobachten, wenn derselbe Wärme ausstrahlt oder durch Leitung an andere Körper abgiebt.

Wir müssen im Weitern schliessen, dass die aufgenommene Wärme oder Arbeit, die eben im Allgemeinen zur Vermehrung der Schwingungsarbeit (der fühlbaren Wärme) und zur Veränderung der Anordnung der Bestandtheile verwendet wird, in solchen Fällen, wo die Disgregationsarbeit Null oder verschwindend klein ist, sich nur durch Erhöhung der Schwingungsarbeit, d. h. Vermehrung der fühlbaren Wärme (Erhöhung der Temperatur) äussert.

Man muss fernerhin auf die Möglichkeit schliessen, dass unter Umständen auch die fühlbare Wärme ungeändert bleiben kann und daher die ganze, einem Körper zugeleitete Wärme nur zu Aenderung der Anordnung der Bestandtheile verbraucht wird.

Die angegebenen Schlüsse finden aber auch wirklich durch die Erfahrung ihre Bestätigung, ja die hieher gehörigen Erscheinungen, die wir sogleich näher hervorheben werden, sind es gerade gewesen, welche zuerst auf die Annahme der Aequivalenz von Wärme und Arbeit geführt haben.

Es ist längst bekannt, dass bei der Reibung zweier Körper, ferner beim Stoss, überhaupt immer dann, wenn bei Wechselwirkung zweier Körper Arbeit verschwindet oder wie es gewöhnlich ausgesprochen wird, wenn dabei Arbeitsverluste stattfinden, jederzeit eine Erwärmung der Körper beobachtet wird, die unter Umständen sehr beträchtlich ausfallen kann.

Graf Rumfort*) war der erste (1798), welcher diese bekannte Erscheinung bestimmter auffasste und den Schluss zog, dass man durch mechanische Arbeit Wärme erzeugen könne, und der auch den Zusammenhang zwischen der verbrauchten Arbeit und der erzeugten Wärmemenge zu ermitteln suchte.

Er verglich die Arbeit, die beim Ausbohren eines Kanonenrohres aufgewendet wurde, mit der Stärke der Erwärmung des Rohres, welche Erwärmung er durch die Temperaturerhöhung von Wasser bestimmte, welches das Rohr umgab. Der Versuch

---

*) Phil. Trans. abridget. Vol. XVIII: »An Inquiry concerning the source of Heat excitet by Friction.«

ergab kein zuverlässiges Resultat, weil die Wärmeverluste nicht berücksichtigt wurden und weil hier offenbar nur ein Theil der Arbeit auf Vermehrung der Schwingungsarbeit, der fühlbaren Wärme, der Rest aber als Disgregationsarbeit (Abtrennen der Metalltheile beim Bohren) verwendet wurde, welch' letzterer Theil sich übrigens auch direkt nicht hätte ermitteln lassen.

Humphry Davy*) schloss sich sofort der Ansicht Rumford's an und suchte die Richtigkeit derselben durch andere Versuche darzulegen. Er zeigte, dass zwei Eisstücke, die unter der Glocke der Luftpumpe bei 0° Temperatur an einander gerieben werden, zum Schmelzen kommen und schloss, dass die Bewegung die Ursache der entwickelten Wärme sei, die sich hier durch Schmelzen des Eises äussert.

Das grosse Verdienst, den Satz über Aequivalenz von Wärme und Arbeit zuerst in bestimmter Weise ausgesprochen zu haben, gebührt aber dem Deutschen Dr. J. R. Mayer in Heilbronn. Seine im Jahr 1842 erschienene Abhandlung »Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur«**) enthält auf wenig Seiten die interessantesten Schlüsse.

Mayer sprach sich schon damals mit grosser Klarheit über die Frage aus; er zeigte, dass man Wasser in einem Gefässe durch Schütteln (Arbeitsverrichtung) erwärmen, die Temperatur desselben erhöhen könne; er schliesst, dass man durch Arbeitsverrichtung (Compression) unter hohem Drucke müsse Eis in Wasser verwandeln können, was später durch Mousson's Versuche***) bestätigt wurde, und sagt am Ende seiner Abhandlung ausdrücklich: »Wir müssen ausfindig machen, wie hoch ein bestimmtes Gewicht über den Erdboden erhoben werden müsse, dass seine Fallkraft aequivalent sei der Erwärmung eines gleichen Gewichtes Wasser von 0° auf 1° C.«

Die genannte Höhe giebt er dann zu 365 Meter an.

Mayer hat daher zuerst bestimmt ausgesprochen, dass die durch Arbeitsverrichtung erzeugte Wärmemenge der aufgewandten

---

*) Researches on Heat, Light and Respiration in Dr. Boddoes West Country Contributions. Vergl. Joule. Phil. Trans. for 1850.

**) Annalen von Wöhler und Liebig. Maiheft 1842.

***) Mousson, Einige Thatsachen, betreffend das Schmelzen und Gefrieren des Wassers. Poggendorff's Annalen. Bd. 105.

Arbeit proportional sei, dass das Eine durch das Andre direkt gemessen werden könne, während vor ihm nur erkannt und ausgesprochen worden war, dass überhaupt zwischen Wärme und Arbeit ein gewisser Zusammenhang bestehen möge.

Die genannte Proportionalität musste nun aber zunächst durch zuverlässige Versuche festgestellt werden, bevor man mit Aussicht auf Erfolg zur mathematischen Behandlung der Frage übergehen konnte.

Zum Messen von Wärmemengen nimmt man bekanntlich als Einheit diejenige Wärmemenge an, durch welche die Gewichtseinheit Wasser (1 Kilogramm) von 0° auf 1° Celsius erwärmt wird. Wenn nun wirklich Wärme und Arbeit aequivalent sind, so kann man, wie Mayer zuerst geschlossen hat, Wärmemengen auch in gleicher Art messen, wie Arbeit, nur muss bekannt sein, welche Wärmemenge (in Wärmeeinheiten, in Calorien) der Arbeitseinheit (einem Meterkilogramm) oder welche Arbeit einer Wärmeeinheit entspricht.

Diese Frage hat nun aber durch die schönen und vielartigen Versuche des Engländers Joule in unzweifelhafter Weise ihre Beantwortung gefunden.

Diese Versuche zeigen nicht nur, dass durch Arbeit Wärme erzeugt werden kann, sondern dass auch die erzeugte Wärmemenge jederzeit der aufgewandten Arbeit direkt proportional ist. Die verschiedenen Versuche führten durchgängig auf nahezu die gleiche Beziehung, und zwar stellte sich heraus, dass durch eine Arbeit von 424 Meterkilogrammen eine Wärmemenge erzeugt wird, die gerade die Wärmeeinheit ausmacht, d. h. eine Wärmemenge, durch die man ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° Celsius erwärmen kann.

Der Arbeitswerth 424 Meterkilogramme heisst das »Arbeitsaequivalent der Wärmeeinheit« oder kurz das »mechanische Wärmeaequivalent«; während man umgekehrt die Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit ($1^{mkil.}$) entspricht, das »Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit« nennt.

Der von Joule gefundene Werth des mechanischen Wärmeaequivalents ist später auch durch andere Versuche bestätigt worden.

Joule gebührt also unzweifelhaft das Verdienst, diese wichtige Grösse zuerst zuverlässig bestimmt zu haben; ebenso un-

zweifelhaft ist aber auch, dass Mayer zuerst auf die Existenz dieser wichtigen Constanten hingewiesen hat. Wenn Mayer, wie die oben angeführte Stelle seiner Abhandlung zeigt, diese Constante zu klein angiebt (er bestimmte den Werth durch Beobachtung der aus der Compression eines Gases frei werdenden Wärmemenge), so lag es nur daran, dass einzelne Grössen, die Mayer in seine Rechnung einzuführen hatte, damals noch nicht genau genug bestimmt waren.

Die Versuche zur Ermittelung des Werthes des mechanischen Wärmeaequivalentes, auf die wir nun in der Kürze eingehen wollen, müssen mit grosser Sorgfalt angeordnet und ausgeführt werden; es handelt sich darum, genau die Arbeit zu ermitteln, welche wirklich zur Wärmeerzeugung verwendet wird, und dann die erzeugte Wärmemenge selbst zu bestimmen.

Beides geschieht am sichersten, wenn man zur Aufnahme der erzeugten Wärme solche Körper wählt, bei denen während des Versuches eine Aenderung der Anordnung der Bestandtheile nicht stattfindet.

Es muss wo möglich alle aufgewandte Arbeit zur Erhöhung der Schwingungsarbeit, d. h. der fühlbaren Wärme verwendet werden; kein Theil oder nur ein verschwindend kleiner Theil davon darf sich als Disgregationsarbeit der direkten Beobachtung entziehen.

Als Körper, welche diese Bedingungen bei niedriger Temperatur und geringen Temperaturdifferenzen erfüllen, sind tropfbare Flüssigkeiten, wie Wasser und Quecksilber zu betrachten, und diese Flüssigkeiten hat Joule auch angewendet. Zur Wärmeerzeugung benutzte derselbe zunächst die bei der Reibung verschwindende Arbeit.

Bei der einen Versuchsreihe*) befanden sich in einem mit Quecksilber gefüllten Gefässe zwei Metallscheiben (Gusseisen), von denen die eine festlag, die andre aber durch einen belasteten Hebel gegen die erstere gepresst und durch sinkende Gewichte in Umdrehung versetzt wurde. Die Grösse der Gewichte und die Höhe, um welche sie niedersanken, ergaben, natürlich unter Anbringung entsprechender Correctionen, diejenige Arbeit, welche zur Ueberwindung der Reibung verwendet wurde.

---

*) Joule, Phil. Transactions for the year 1850, S. 1.

Aus der Temperaturerhöhung des Quecksilbers und unter Berücksichtigung der durch Strahlung verlorenen Wärmemengen schloss Joule dagegen auf die Menge der durch die Reibung erzeugten Wärme.

Die unter verschiedenen Verhältnissen ausgeführten Experimente ergaben alle die gleiche Beziehung zwischen der aufgewandten Arbeit und der erzeugten Wärmemenge. Das mechanische Wärmeaequivalent stellte sich im Mittel zu 425,18 Met. Kil. heraus.

Bei einer andern Versuchsreihe wurde die Reibung zwischen festen und flüssigen Körpern erzeugt.

In einem Gefässe befand sich Wasser oder Quecksilber und ein Rührapparat, der durch sinkende Gewichte in Umdrehung versetzt wurde. Um die Arbeit rascher auf die Flüssigkeit zu übertragen, und in Wärme umzusetzen, befanden sich im Gefässe Scheidewände mit Durchbrechungen, durch welche die Flügel des Rührapparates fast schliessend hindurchgingen.

Auch diese Versuche führten zu demselben Resultate, wie die vorhergenannten. Joule fand für das mechanische Wärmeaequivalent für:

Messing in Wasser	423,92
Eisen in Quecksilber	424,68

und schliesst aus seinen gesammten Versuchen, dass der wahrscheinlichste Werth 423,55 Meterkilogramm betrage, wofür wir in der Folge den Werth 424 setzen werden.

Bei einem weitern Versuche comprimirte Joule mit Hülfe einer Pumpe atmosphärische Luft und presste sie in einen kupfernen Ballon, der in einem Wassercalorimeter stand, bis der Druck auf 22 Atmosphären gestiegen war. Aus der Temperaturerhöhung des Wassers im Calorimeter ergab sich die erzeugte Wärmemenge, während die in Wärme umgesetzte Compressionsarbeit eben die Arbeit ist, die auf Bewegung der Druckpumpe verbraucht wurde. Die Versuche, die allerdings nicht die Zuverlässigkeit der oben erwähnten besitzen, weil die Arbeitsverluste an der Pumpe, besonders die Kolbenreibung, schwer zu ermitteln sind, ergab den Werth 437,77 Meterkilogramm als mechanisches Wärmeaequivalent.

Seit Joule sind auch noch Versuche anderer Art unternommen worden. Der sinnreichste ist jedenfalls ein Versuch von Hirn*).

*) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur. Sec. édition. Paris 1865, S. 58.

Dieser Versuch ist von besonderm Interesse, weil Hirn diejenige Arbeit, welche beim Stosse fester Körper verschwindet, in Wärme umsetzte, und weil hierbei ein Theil der aufgewandten Arbeit in Disgregationsarbeit überging, den Hirn auf geschickte Weise zu bestimmen wusste.

Zwei schwere prismatische Blöcke, der eine aus Holz, der andre aus Eisen, waren pendelartig aufgehangen, so aber, dass ihre Axen in einer Geraden lagen und sie sich an den entsprechenden Endflächen berührten. An der Endfläche des Holzblockes, auf Seite des Eisenblockes, war eine Eisenplatte befestigt, an welche ein kleiner hohler Bleicylinder angehalten werden konnte.

Man erhob nun den Eisenblock (wie ein Pendel) auf eine gewisse Höhe und liess ihn frei herabfallen, so dass er in seiner tiefsten Lage gegen den Bleicylinder stiess und dabei die Hinterlage desselben, den Holzblock, auf eine gewisse Höhe hinaufwarf.

In Folge des Stosses wurde der Bleicylinder comprimirt und erwärmt. Die erzeugte Wärmemenge liess sich dadurch bestimmen, dass man unmittelbar nach dem Stosse die Höhlung des Bleigewichtes mit einer gemessenen Menge Wasser von bestimmter Temperatur füllte, die Temperaturerhöhung beobachtete und dabei noch entsprechende Correctionen anbrachte.

Die Arbeit, welche im Augenblicke des Stosses im Eisenblocke enthalten war, berechnete sich direkt aus dem Gewichte und der Fallhöhe desselben. Diese Arbeit ist nun aber keineswegs allein zur Wärmeerzeugung verwendet worden, sondern man muss, um den entsprechenden Theil zu ermitteln, erst noch bestimmen, welche Arbeit beim Stosse verloren gegangen ist, oder vielmehr in beiden Blöcken zurückblieb. Zu diesem Zwecke beobachtete Hirn, wie hoch der eiserne Block nach dem Stosse zurücksprang und auf welche Höhe sich nach der andern Seite der Holzblock erhob. Aus den Gewichten und den Erhebungen beider ergab sich die in den Massen zurückgebliebene Arbeit und dann in leicht ersichtlicher Weise die Arbeit, die auf den Bleicylinder überging und dort in Wärme umgesetzt wurde.

Hirn fand auf diesem Wege das mechanische Wärmeaequivalent 425 Meterkilogramm.

Durch die angegebenen und durch manche andre von Andern ausgeführte Versuche ist also dargethan, dass man in einem Körper durch mechanische Arbeit dieselben Erscheinungen hervor-

zubringen vermag, wie durch Wärmemittheilung; es wäre nun noch die Frage aufzuwerfen, ob bei einem Körper bei Arbeitsabgabe, wenn derselbe unter Ueberwindung eines äussern Druckes sich ausdehnt, auch diejenigen Aenderungen beobachtet werden, die sonst bei Wärmeverlust des Körpers durch Ausstrahlung oder Ableitung stattfinden und ob die vom Körper verrichtete Arbeit in der gleichen Beziehung zu der Verminderung der im Körper enthaltenen Wärme steht.

Wenn nun auch nach allem bis jetzt Erwähnten ohne Weiteres diese Frage bejahend beantwortet werden muss, so mag doch noch hervorgehoben werden, dass auch in dieser Beziehung Beobachtungen vorliegen.

Zunächst ist auf die längst bekannte Thatsache hinzuweisen, dass die Temperatur eines Gases abnimmt, wenn sich dasselbe unter Drucküberwindung, arbeitsverrichtend, ausdehnt: es verschwindet also Wärme, und diese verschwundene Wärmemenge wird zu der gewonnenen Arbeit in dem bestimmten, schon angegebenen Verhältniss stehen. Direkte Beobachtungen liegen hier nicht vor, wohl aber ist für Dampf der betreffende Nachweis von Hirn*) geliefert worden.

Hirn beobachtete, welche Wassermenge in einer bestimmten Zeit im Dampfkessel einer grossen Dampfmaschine in Dampf verwandelt und in den Dampfcylinder geführt wurde. Nach Regnault's Versuchen war, weil Spannung und Temperatur dieses Dampfes beobachtet wurden, die Wärmemenge in demselben bekannt. Der Dampf wurde nach seinem Austritte aus dem Cylinder condensirt und aus der Menge und Temperatur des Einspritzwassers und des condensirten Dampfes die Wärmemenge berechnet, welche der Dampf beim Eintritt in den Condensator noch enthielt.

Nach der mechanischen Wärmetheorie, also nach den oben entwickelten Ansichten, muss die im Dampfe enthaltene Wärme bei seinem Austritte aus dem Dampfcylinder »geringer« sein, als die Wärmemenge, die ihm beim Eintritte innewohnte, und zwar muss die Differenz genau der vom Dampfe verrichteten Arbeit entsprechen, welch' Letztere durch Bremsversuche ermittelt wurde. Eine solche Differenz hat Hirn nun

*) Hirn, Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur, présentées à la société de physique de Berlin. Paris 1858.

nicht nur beobachtet, sondern Clausius* hat auch gezeigt, dass die bei Hirn's Dampfmaschine verschwundene Wärmemenge zu der verrichteten Arbeit in dem Verhältnisse stand, wie es die Theorie fordert.

Bei den verschiedenen Versuchen wurde für jede verschwundene Wärmeeinheit 399 bis 427 Meterkilogramm Arbeit geleistet und das Mittel aus allen erhaltenen Werthen betrug 413 Meterkilogramm; es ergiebt sich also nahezu der von Joule gegebene Werth.

Die Abweichung erklärt sich leicht aus den Schwierigkeiten, welche bei Versuchen in so grossartigem Maassstabe (die Dampfmaschinen entwickelten über 100 Pferdestärken) zu überwinden sind; man muss vielmehr staunen über die Gewandtheit, mit welcher der geschickte Experimentator, dem die mechanische Technik auch die Lösung höchst wichtiger anderer Fragen schon zu danken hat, die Versuche ausführte.

Fassen wir schliesslich die Resultate der angeführten experimentellen Untersuchungen zusammen, so lässt sich wohl der erste Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie, »dass Wärme und Arbeit aequivalent sind«, als erwiesen ansehen; d. h. wir sind berechtigt, bei den folgenden Untersuchungen von der Annahme auszugehen: »dass man aus Wärme Arbeit gewinnen, dass man umgekehrt Wärme durch Arbeit erzeugen kann; dass ferner dabei der verbrauchten oder erzeugten Wärmeeinheit eine Arbeit von 424 Meterkilogrammen und umgekehrt der Arbeitseinheit eine Wärmemenge von $\frac{1}{424}$ Wärmeeinheiten entspricht, unter Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge verstanden, welche erforderlich ist, ein Kilogramm Wasser von 0^{0} auf 1^{0} Celsius zu erwärmen.«

---

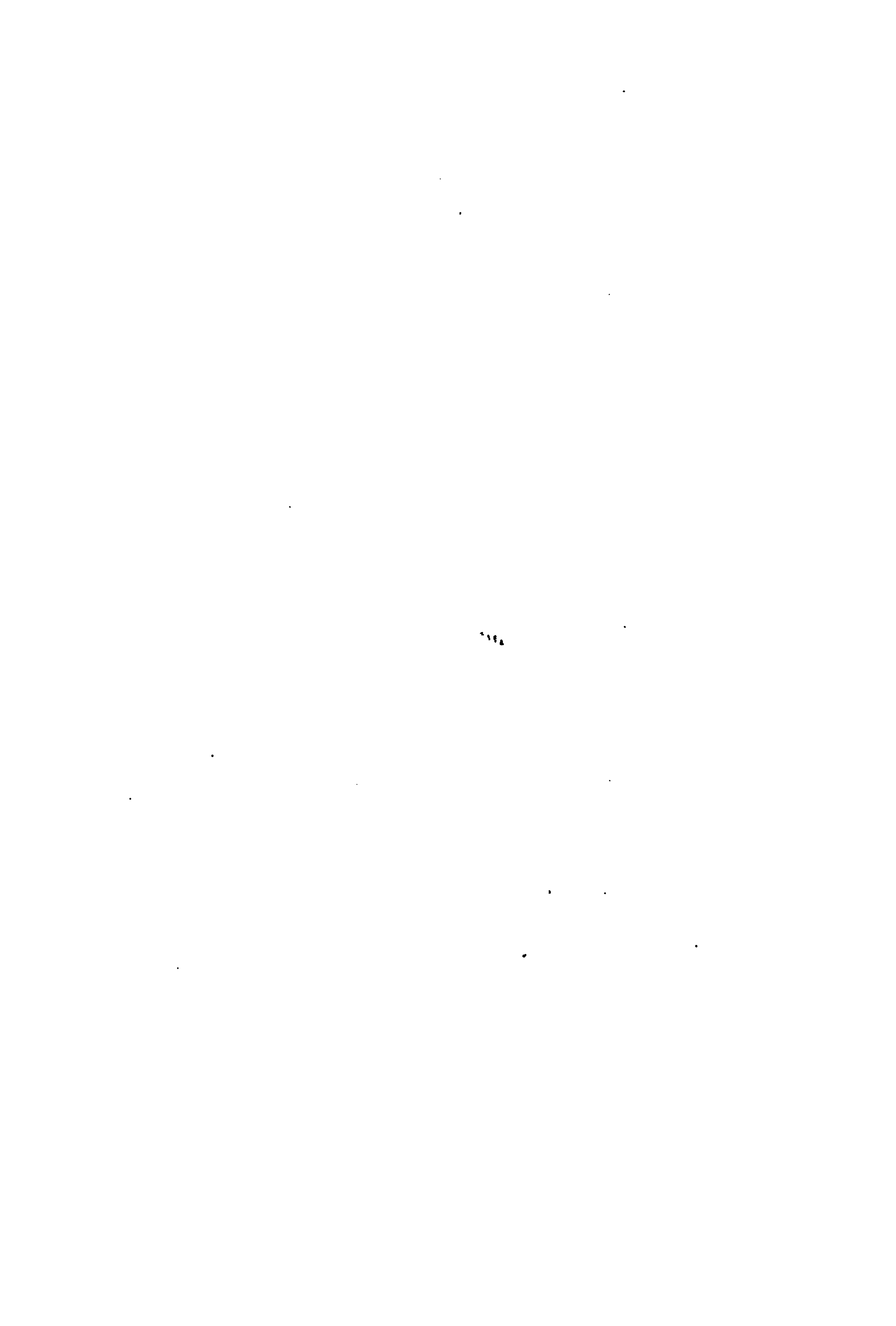
* Hirn, a. a. O. S. 134 (Bericht über die genannte Arbeit an die physikalische Gesellschaft zu Berlin von Prof. Dr. Clausius).

ERSTER ABSCHNITT.

Ableitung der Hauptgleichungen

der

mechanischen Wärmetheorie.



Vorbemerkungen.

Bei den Untersuchungen über die Zustandsänderungen, die in einem Körper durch Wärmeentziehung oder Wärmemittheilung hervorgebracht werden, kann man sich den Körper entweder im Ruhezustand denken oder annehmen, dass derselbe in sichtbarer Bewegung begriffen ist. Diese sichtbare Bewegung der Theile eines Körpers ist wohl zu unterscheiden von der Molekularbewegung, die wir nicht sehen, die wir aber als Wärme empfinden und die auch vorhanden ist, wenn der Körper sich im Ruhezustand befindet.

Wir werden zunächst bei den folgenden Untersuchungen der Zustandsänderungen eines Körpers durch Wärme den Ruhezustand annehmen; in diesem Falle ist durch das Gewicht und das Volumen, sowie durch den Druck, welchem der Körper ausgesetzt ist, der Zustand des Körpers fixirt. Der Einfachheit wegen soll aber in der Folge, wenn es nicht ausdrücklich anders hervorgehoben wird, jederzeit die Gewichtseinheit eines Körpers der Untersuchung zu Grunde gelegt werden; in diesem Falle bleibt dann nur noch das Volumen und der Druck zur Beurtheilung des Zustandes des Körpers zu beachten übrig. Ueber das Messen des Volumens eines Körpers ist hier nichts weiter zu sagen, nur in Betreff der Bezeichnung mag hier schon im Voraus bemerkt werden, dass wir für das »Volumen der Gewichtseinheit«, das sogenannte »spezifische Volumen«, den Buchstaben v benutzen werden, während für das Volumen eines Körpers von anderm Gewichte der Buchstabe V angewendet wird.

Etwas näher muss aber bezeichnet werden, was man unter »Druck« eines Körpers versteht. Wir denken uns nämlich, dass der zu untersuchende Körper von aussen her einem Drucke ausgesetzt ist, der an allen Punkten der Oberfläche gleich

stark wirkt und normal gegen die Oberflächenelemente gerichtet ist. Diesen Druck, bezogen auf die Quadrateinheit Oberfläche, den sogenannten »spezifischen Druck«, bezeichnen wir mit p.

Am besten stellt man sich vor, der Körper sei mit einer Hülle umgeben, die gegen seine Oberfläche den bemerkten Druck ausübt. Im Ruhezustand übt der Körper nach aussen gegen die Hülle den gleichen Druck aus: man kann daher auch von »Druck eines Körpers« kurzweg sprechen. Bei gasförmigen Körpern bilden die Wände des Gefässes, welches das Gas umschliesst, die genannte Hülle; bei tropfbar-flüssigen Körpern bilden die Gefässwände gewöhnlich nur theilweise diese Hülle: gegen die Oberfläche der Flüssigkeit kann der Druck von einem darüber stehenden Gase oder von Dämpfen herrühren. Bei festen Körpern ist der Druck gewöhnlich der Atmosphärendruck, es ist aber auch hier zweckmässiger, diesen speziellen Fall von vornherein ausser Augen zu lassen und an eine Hülle zu denken, die irgend welchen Druck gegen die Oberfläche des festen Körpers ausübt.

Denken wir uns nun, es werde der Gewichtseinheit eines Körpers von aussen her eine unendlich kleine Wärmemenge dQ, in Wärmeeinheiten gemessen, zugeführt, so werden damit folgende Aenderungen im Zustande des Körpers verbunden sein:

1. Es findet eine Verstärkung der Molekularbewegung statt. Die Zunahme der lebendigen Kraft, d. h. der in den kleinsten Theilen in Folge der schwingenden Bewegung angehäuften Arbeit, sei, in Arbeitseinheiten ausgedrückt: dW.

2. Es findet eine Veränderung der Mittellagen der kleinsten Theile statt; da aber die Schwingungsweiten als unendlich klein gegen die Entfernungen der Schwingungsmittelpunkte der Atome und Moleküle angesehen werden, so kann man auch von einer Positionsänderung der Atome und Moleküle selbst sprechen, und diese Positionsänderungen erfordern Arbeit, da die kleinsten Theile mit gewissen Kräften auf einander wirken. Diese Arbeit in Arbeitseinheiten gemessen, sei dJ.

3. Es findet im Allgemeinen eine Aenderung des Gesammtvolumens des Körpers statt. Bei einer Ausdehnung des Körpers wird der von Aussen gegen die Körperoberfläche wirkende Druck überwunden: die Arbeit, welche dieser Drucküberwindung entspricht, sei dL.

Diese drei Arbeitsmengen zusammengefasst stehen nun nach dem in der Einleitung gegebenen Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie in einfacher Beziehung zu der zugeführten Wärmemenge dQ. Da die ganze verrichtete Arbeit $dW + dJ + dL$ die Folge der Zuführung der Wärme dQ ist, und da der Arbeitseinheit eine Wärmemenge von $\frac{1}{424}$ Wärmeeinheiten entspricht (das Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit), welcher Werth mit A bezeichnet werden mag, so ist die der angegebenen Arbeit entsprechende Wärmemenge $A\,(dW + dJ + dL)$ und man hat daher die Gleichung:

$$dQ = A\,(dW + dJ + dL). \tag{1}$$

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass einzelne der Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung auch Null oder negativ ausfallen können; es ist nicht zu erwarten, dass mit einer Wärmezuleitung jederzeit alle drei Arten der genannten Aenderungen eintreten werden. So ist es denkbar, dass trotz der Wärmezuleitung die Schwingungsarbeit, d. h. die fühlbare Wärme ungeändert bleibt, also $dW = 0$ ist, wie das beim Schmelzen fester Körper und Verdampfen flüssiger Körper unter constantem Drucke wirklich beobachtet wird, oder dass eine Volumenänderung nicht stattfindet, in welchem Falle $dL = 0$ wäre, oder ferner dass eine Volumenverminderung stattfindet, in welchem Falle dL negativ ausfällt, wie das auch beobachtet wird, wenn Wasser unter atmosphärischem Drucke zwischen 0 und 4 °C. erwärmt wird.

Ebenso wenig wäre besonders hervorzuheben, dass die Wärmemenge dQ negativ zu setzen ist, wenn eine Wärmeableitung stattfindet.

Die Gleichung (1) gilt nur für den Ruhezustand des Körpers; für den allgemeinern Fall, dass sichtbare, oder wie besser gesagt wird, äussere Bewegung, stattfindet, die einzelnen Theile des Körpers während der Wärmezuführung also in Bewegung befindlich sind, in diesem Falle ist dann im Allgemeinen die Gleichung unvollständig, und nicht ohne Weiteres anwendbar, wenn gleichzeitig mit der Wärmezuleitung eine Aenderung dieser Bewegung verbunden ist.

Von der innern Arbeit.

Die Gleichung (1) gilt in der oben gegebenen Form, wie hervorgehoben wurde, zunächst nur für den Ruhezustand des Körpers; und soll vorläufig auch in dieser Form weiterer Behandlung unterworfen werden.

Man kann nun zunächst Gleichung (1), wie **Clausius** es gethan hat, dadurch in einfachere Form bringen, dass man zwei der drei Glieder der rechten Seite in eins zusammenfasst Setzt man zuerst $dJ + dL = dH$, so erhält man

$$dQ = A\ (dW + dH).$$

In dieser Gleichung bedeutet nun dW wie oben die Zunahme der Schwingungsarbeit, also $A\,dW$, nach den in der Einleitung entwickelten Ansichten die Zunahme der fühlbaren Wärme, oder wie es auch ausgesprochen wird, die Zunahme der wirklich im Körper vorhandenen Wärme. Hingegen repräsentirt dH die Arbeit, die zur Veränderung der Anordnung der kleinsten Theile des Körpers, oder wie sich **Clausius***) ausspricht, zur Vermehrung der Disgregation verwendet wurde. Diese Arbeit zur Aenderung der Disgregation umfasst also sowohl die Arbeit, welche der Positionsänderung der kleinsten Theile des Körpers, wie diejenige, welche bei der Volumenänderung der Wirkung des von Aussen her stattfindenden Druckes p entspricht. Gewisse Hypothesen über das Gesetz, welchem die Werthe dW und dH unterworfen sind, haben **Clausius** (a. a. O.) zu höchst interessanten Untersuchungen geführt, die wir jedoch hier nicht weiter verfolgen, da sie noch nicht als abgeschlossen zu betrachten sind.

Weit fruchtbarer war bis jetzt die andre Art der Umformung der Gleichung (1), welche die Gleichung in einer Gestalt lieferte, in der sie in der Folge immer verwendet werden soll. Setzt man nämlich $dW + dJ = dU$, so folgt

$$dQ = A\ (dU + dL). \qquad (2)$$

Hier bedeutet nun nach dem oben Gesagten dU die Zunahme der Schwingungsarbeit, die Zunahme der lebendigen Kraft

*) **Clausius**, Abhandlungen. No. VI.

der Molekularbewegung und die Arbeit, welche während der Wärmezuführung auf Ueberwindung der Kräfte verwendet wurde, mit welchen die kleinsten Theile auf einander wirken.

Es repräsentirt also dU die ganze Arbeit, welche während der Wärmezuführung im Innern des Körpers verbraucht worden ist.

Den Werth U nenne ich in der Folge die innere Arbeit, dU sonach die Zunahme der innern Arbeit*). Dieser Werth giebt die in einem Körper angehäufte mechanische Arbeit an und kann gemessen werden durch die Wirkungsgrösse, welche der Körper abgiebt, wenn er sich in seine Bestandtheile auflösen würde, d. h. wenn die kleinsten Theile gänzlich aus den Sphären ihrer gegenseitigen Krafteinwirkungen heraustreten und gleichzeitig in den Ruhezustand übergehen würden.

Diese ganze innere Arbeit lässt sich nun freilich nicht bestimmen, die weitern Untersuchungen erfordern aber auch die Kenntniss dieses Werthes nicht. Es genügt vollständig die Grösse U für einen gewissen Anfangszustand als bekannt vorauszusetzen, da es sich bei allen Problemen nur um Ermittelung der Zustandsänderungen der Körper handelt, also nur um Bestimmung der Vermehrung oder Verminderung der innern Arbeit.

Wäre es aber möglich, die innere Arbeit der Gewichtseinheit eines Körpers wirklich zu ermitteln, so würde sich offenbar diese Grösse als eine Funktion des spezifischen Volumens v und des spezifischen Druckes p darstellen; also schreiben lassen:

$$U = F(p, v).$$

Es lässt sich nicht anders denken, als dass diese in einem Körper angehäufte Arbeit, vorausgesetzt, er befinde sich im Ruhezustand, vollständig durch die beiden Grössen p und v bestimmt ist.

Wäre der Anfangszustand durch die Grössen p_1 und v_1 gegeben und der Körper durch Wärmezuführung oder irgendwie in einen andern durch p_2 und v_2 gegebenen Zustand übergegangen, so wäre die Veränderung der innern Arbeit

$$F(p_2, v_2) - F(p_1, v_1)$$

---

*) Kirchhoff nennt die Grösse U die »Wirkungsfunktion«, Thomson »the mechanical energy of a body in a given state.« — Clausius versteht unter innerer Arbeit nur den Theil, der in obiger Gleichung (1) mit dJ bezeichnet ist.

und die Veränderung wäre Null, wenn Anfangs- und Endwerthe von p und v gleich gross sind, von welcher Art während des Ueberganges die Aenderungen von p und v auch gewesen sein mögen.

Die Differentiation der Gleichung für U giebt

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) dp + \left(\frac{dU}{dv}\right) dv$$

oder wenn die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) = X \text{ und } \left(\frac{dU}{dv}\right) = Z$$

gesetzt werden

$$dU = Xdp + Zdv. \qquad (3)$$

Nach dieser Formel würde sich die Veränderung der innern Arbeit ermitteln, wenn das Volumen v der Gewichtseinheit Körpermasse um dv und der Druck p um dp wächst. Da nach dem Vorhergehenden Gleichung (3) ein vollständiges Differential ist, so gilt nach den Regeln der Differentialrechnung auch die Beziehung:

$$\left(\frac{dX}{dv}\right) = \left(\frac{dZ}{dp}\right) \qquad (4)$$

eine Beziehung, von der in der Folge Gebrauch gemacht wird.

Von der äussern Arbeit.

Das zweite Glied dL der Gleichung (2) giebt diejenige Arbeit an, welche bei der Volumenänderung des Körpers der Einwirkung des von Aussen her gegen die Körperoberfläche wirkenden Druckes p entspricht. Denkt man sich, dass, wie es gewöhnlich der Fall ist, während der Wärmezuführung eine Ausdehnung, eine Volumenvermehrung stattfindet, so wird Arbeit zur Ueberwindung des äussern Druckes verbraucht, Arbeit nach Aussen hin abgegeben; Clausius hat daher diese Arbeit dL, welche während der Zuführung der Wärmemenge dQ gethan

rd. sehr passend die »äussere Arbeit« genannt. Für den Fall, es während der Wärmemittheilung eine Zusammenziehung, eine lumenverminderung des Körpers unter Einwirkung eines äussern ckes stattfindet, erscheint dL negativ, dann hat der Körper e äussere Arbeit aufgenommen und die Arbeit kann als eine wonnene angesehen werden; dann ist nicht allein die zugeführte ärme, sondern auch die äussere Arbeit auf Vermehrung der ern Arbeit verwendet worden.

Beim Beginn und am Ende der Wärmezuführung setzt man derzeit Gleichgewichtszustand voraus, d. h. man denkt sich, ss zwischen dem äussern Druck p und dem Körperdruck Gleichheit stattfindet. Handelt es sich nun aber um Untersuchung der standsänderungen des Körpers durch Wärmemittheilung, so agt es sich, ob während des Ueberganges des Körpers aus einem stand in den andern, diese Gleichheit fortbesteht oder nicht. Beide Fälle sind möglich und sind bei allen folgenden Untersuchungen streng zu unterscheiden.

Zunächst kann man sich, und das ist der wichtigere Fall, rstellen, dass der äussere Druck p während der Wärmezuführung auf irgend einem Wege so geregelt werde, dass er in jedem Momente während der Zustandsänderung des Körpers dem Körperdrucke gleich, oder besser gesagt, weil wir gleichzeitig Volumenänderungen des Körpers voraussetzen wollen, dass in jedem Augenblicke der äussere Druck nur um unendlich wenig vom Körperdruck verschieden ist; bei der Ausdehnung denkt man sich den äussern Druck um unendlich wenig kleiner, bei der Zusammenziehung oder Compression hingegen um unendlich wenig grösser, als den Körperdruck; in beiden Fällen aber eben so wenig verschieden, dass man beide Drücke als gleich ansehen kann. Unter dieser Voraussetzung, die wir übrigens in den folgenden allgemeinen Untersuchungen durchgehends machen werden, lässt sich der äussere Druck als Eigenschaft des Körpers selbst betrachten und die äussere Arbeit wird dann während des ganzen Verlaufes der Zustandsänderungen zu denselben und zu r Art und Weise der Wärmezuleitung in ganz bestimmter anbarer Beziehung stehen. Für diesen Fall ist man, wie gezeigt werden soll, auch im Stande, die Zustandsänderungen der rper während der Wärmemittheilung Schritt für Schritt zu rfolgen.

Ganz andre Verhältnisse treten aber auf, wenn man annimmt, dass eine Gleichheit des äussern Druckes mit dem Körperdrucke während der Zustandsänderungen des Körpers nicht mehr besteht und diese Gleichheit nur angenommen wird, beim Beginn und am Ende der Operation, wenn der Körper aus dem einen in den andern Gleichgewichtszustand übergegangen ist. Das Verhalten des Körpers bei solchem Uebergange ist offenbar ganz anderer Art: man ist aber bis jetzt noch nicht im Stande, diese Uebergänge zu verfolgen: nur in einigen wenigen speziellen Fällen, auf die wir später zurückkommen werden, lässt sich unter gewissen Annahmen über das Gesetz der Veränderungen des äussern Druckes (der eben unabhängig vom Körperdruck angenommen wird) der Endzustand des Körpers, nach Eintritt des neuen Gleichgewichtszustandes ermitteln.

Die Wichtigkeit der Frage wird es rechtfertigen, wenn wir an einem einfachen Beispiele aus der Mechanik den genannten Unterschied der Arbeitsabgabe oder Arbeitsaufnahme unter den beiden angegebenen Voraussetzungen näher zu verdeutlichen suchen.

Denke man sich, zwei prismatische Stäbe A und B, beide von gleichem Material, gleichem Querschnitte F und gleicher Länge l, seien am obern Ende befestigt und sollen durch Krafteinwirkungen am freien Ende ausgedehnt werden: zunächst der Stab A dadurch, dass man in der Axenrichtung desselben eine Kraft X wirken lässt, die nur um unendlich wenig grösser als die Kraft ist, mit welcher der Stab im betreffenden Momente der Ausdehnung widersteht: ist die Ausdehnung x, so findet sich diese Kraft bekanntlich

$$X = \frac{x}{l} FE,$$

wobei E das Elasticitätsmodul des Stabmaterials ist. Daher folgt die Arbeit, um die Ausdehnung um dx zu vermehren,

$$X dx = \frac{x}{l} FE dx.$$

Soll die Ausdehnung am Ende λ sein, so ergiebt die Integration der letzten Gleichung für die Arbeit L der gesammten Ausdehnung:

$$L = \frac{FE\lambda^2}{2l}$$

Die ganze Kraft am Ende der Ausdehnung ist:

$$\frac{\lambda}{l} FE$$

und wenn daher schliesslich Gleichgewicht erzeugt werden soll, so kann man sich ein Gewicht G angehängt denken, welches gleich der gefundenen Kraft ist; es wäre sonach

$$G = \frac{\lambda}{l} FE \qquad (6)$$

und die aufgewandte Arbeit, wenn man in obiger Formel das Gewicht G substituirt:

$$L = \frac{G\lambda}{2} \qquad (7)$$

natürlich alle diese Bestimmungen unter der Voraussetzung gemacht, dass die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird; die Formeln gelten eben nur so lange, als die Proportionalität zwischen Ausdehnung und Spannkraft des Stabes angenommen werden kann. Die durch Gleichung (7) gegebene äussere Arbeit ist nun hier vom Stabe aufgenommen und zu innerer Arbeit verbraucht worden. Würde man nun aber das Gewicht entfernen und wieder eine variable Kraft in der Axenrichtung des Stabes wirken lassen, die in jedem Momente nur um unendlich wenig kleiner als die Spannkraft des Stabes ist, so würde sich der Stab wieder zusammenziehen und dabei auf dem gleichen Wege rückwärts die ganze Arbeit wieder nach aussen hin abgeben, die er ursprünglich bei der Ausdehnung aufgenommen hatte. Der ganze Prozess ist also umkehrbar.

Ganz anders gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn eine Gleichheit zwischen der auf den Stab wirkenden Kraft und der Spannkraft des Stabes während der Ausdehnung nicht besteht. Hier lassen sich hinsichtlich der Aenderungen der äussern Kraft unendlich viele verschiedene Annahmen machen. Es mag hier einer der einfachsten Fälle näher betrachtet werden, indem vorausgesetzt werden soll, die äussere Kraft wirke während der Ausdehnung des Stabes constant. Man mache folgenden Versuch. Der Stab B sei unten mit einem Vorsprung versehen und unmittelbar darüber befinde sich ein Gewicht G. Denken wir uns nun, das Gewicht werde zunächst gehalten, so dass es zwar den Vorsprung berührt, aber nicht darauf ruht, und werde nun plötz-

lich frei gelassen, so wird es auf den Stab ausdehnend wirken; diese Wirkung soll näher ermittelt werden.

Im Augenblicke, in welchem die Ausdehnung um x vorgeschritten ist, beträgt die Kraft X, mit welcher sich der Stab zusammenzuziehen sucht, wie oben

$$X = \frac{x}{l} FE,$$

daher ist die abwärts gerichtete Kraft $G - X$. Vernachlässigt man, da es sich hier nur um eine Nebenuntersuchung handelt, die Masse des Stabes gegen die Masse M des Gewichtes G, so ist die Acceleration p des sinkenden Gewichtes

$$p = \frac{G - X}{M}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Gewichtes in diesem Augenblicke mit w, so ergiebt die bekannte Gleichung

$$w\,dw = p\,dx$$

im vorliegenden Falle durch Substitution des Werthes p und gleichzeitige Benutzung des Werthes von X:

$$M w\,dw = G\,dx - \frac{FE}{l}\, x\,dx.$$

Durch Integration findet sich nun hieraus leicht, wenn man berücksichtigt, dass bei Beginn der Ausdehnung, d. h. für $x = 0$ auch $w = 0$ ist, und dass ebenso im Augenblicke der grössten Ausdehnung, die mit λ_1 bezeichnet werden mag, $w = 0$ ist

$$0 = G\lambda_1 - \frac{FE}{l} \cdot \frac{\lambda_1^2}{2}$$

und hieraus folgt die grösste Ausdehnung

$$\lambda_1 = 2\,\frac{Gl}{FE}.$$

Die Gleichung (6) ergab hingegen die Ausdehnung λ unter Voraussetzung des Gleichgewichtes

$$\lambda = \frac{Gl}{FE},$$

daher beträgt im vorliegenden Falle die grösste Ausdehnung $\lambda_1 = 2\,\lambda$, d. h. doppelt so viel, wie in dem zuerst betrachteten

Falle. Die Arbeit, welche der Stab im Momente der grössten Ausdehnung aufgenommen hat, ist

$$G\lambda_1 = 2\,G\lambda.$$

In diesem Augenblicke ist aber auch die Spannung des Stabes das Doppelte vom angehängten Gewichte, daher findet kein Gleichgewicht statt, der Stab zieht sich wieder zusammen, das Gewicht steigt wieder und zwar bis in die Anfangslage zurück. Die weitere Verfolgung des Problems zeigt, dass, mathematisch genommen, kein Gleichgewicht eintritt, das Gewicht schwingt auf und ab; die ganze Schwingungsweite beträgt $\lambda_1 = 2\lambda$ und die Schwingungszeit ergiebt sich durch leichte Rechnungen gleich der Schwingungszeit eines Pendels von der Länge λ.

Man erkennt also und das zu zeigen, war der Zweck dieser Abschweifung, dass der Stab in den beiden betrachteten Fällen, im Augenblicke, wenn die Ausdehnung λ ist, sich in ganz verschiedenen Zuständen befindet. Im erstern Falle tritt der Gleichgewichtszustand ein, die ganze äussere Arbeit ist vom Stabe aufgenommen worden; im andern Falle findet kein Gleichgewicht statt, es findet ein eigenthümlicher Wechsel von Arbeitsaufnahme und Arbeitsabgabe statt; bei der Ausdehnung wird die äussere Arbeit des sinkenden Gewichtes zu innerer Arbeit verbraucht und bei der Zusammenziehung wird diese innere Arbeit wieder frei und zu äusserer Arbeit, Hebung des Gewichtes, verwendet. Der wirkliche Versuch zeigt nun aber, dass zwar diese Schwingungserscheinungen wirklich auftreten, dass aber die Schwingungsweiten kleiner und kleiner werden, bis endlich der Gleichgewichtszustand doch eintritt und die bleibende Verlängerung des Stabes gleich der wird, die eben der ruhenden Belastung G entspricht. Aeusserlich befindet sich der Stab im Augenblicke der Ausdehnung λ in beiden Fällen im gleichen Zustande; offenbar kann das aber im Ganzen nicht der Fall sein; vorausgesetzt, der Stab hat nicht sonst nach Aussen hin Arbeit abgegeben, so muss offenbar die innere Arbeit im Stabe im zweiten Falle eine grössere sein als im erstern, und zwar erklärt sich die Sache nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie einfach dahin, dass, wenn die Anordnung der kleinsten Theile in beiden Fällen auch die gleiche sein kann, doch die Molekularbewegungen andre sein müssen; einfach ausgesprochen, die fühlbare Wärme, die Tem-

peratur wird in dem angegebenen Momente in beiden Stäben verschieden sein. Ist schliesslich nach dem Aufhören der Schwingungen auch der zweite Stab in den Gleichgewichtszustand übergegangen, so ist dann in beiden Stäben die Veränderung der innern Arbeit die gleiche und nach Gleichung (7) zu berechnen. Beide Fälle unterscheiden sich nur durch die Art des Ueberganges aus einem Gleichgewichtszustand in den andern.

Genau wie es hier durch dieses einfache Beispiel dargelegt wurde, verhält es sich nun auch mit dem allgemeinen Falle. Wenn während der Wärmemittheilung und den Zustandsänderungen des Körpers der äussere Druck nicht mit dem Körperdrucke im Gleichgewicht steht, so lässt sich der Uebergang ebenso wenig näher verfolgen; es lässt sich nur der Endzustand des Körpers unter der Annahme ermitteln, dass der Gleichgewichtszustand eingetreten ist und dass die äussere Arbeit bekannt ist.

Wie schon früher bemerkt wurde, werden wir später auf einige Probleme dieser Art zurückkommen, bei den weitern Betrachtungen und der Ableitung der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie machen wir nun aber durchgängig die Annahme, dass während der Zustandsänderungen des Körpers und der Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung der äussere Druck p gleich dem Körperdrucke ist oder dass beide Drücke nur um endlich wenig verschieden sind.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich dann in der oben gegebenen Gleichung

$$dQ = A(dU + dL)$$

die äussere Arbeit bestimmter angeben. Der Druck p ist auf die Quadrateinheit Fläche bezogen, wirkt nach unserer Voraussetzung gegen die ganze Oberfläche des Körpers gleich stark und normal gegen die Oberflächenelemente. Bezeichnet man vorübergehend diese Flächenelemente mit F_1, F_2, F_3 u. s. f. und denkt man sich, dass bei einer unendlich kleinen Volumenvergrösserung die einzelnen Elemente um die unendlich kleinen Strecken s_1, s_2, s_3 . . . nach den Richtungen ihrer Normalen fortrücken, so ist der Druck gegen die Elemente $F_1 p$, $F_2 p$, $F_3 p$ . . . . und da diese Pressungen auf den unendlich kleinen Verschiebungen s_1, s_2, s_3 . . als constant angesehen werden können, so folgen die zur Ueberwindung dieser Pressungen zu ver-

wendenden Arbeiten $F_1 p s_1$, $F_2 p s_2$, $F_3 p s_3$ .... also ist die ganze Arbeit dL:

$$(F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3 + \ldots .) p$$

oder da der ganze Werth in der Klammer offenbar nichts andres, als die Zunahme dv des Gesammtvolumens v der Gewichtseinheit des Körpers darstellt:

$$dL = p\,dv \tag{8}$$

und dann folgt im Weitern durch Gleichung (2):

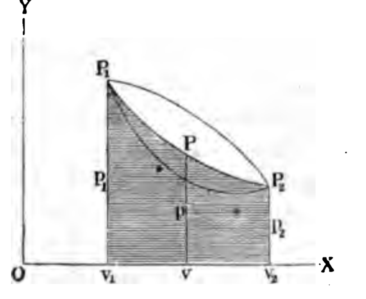
$$dQ = A\,(dU + p\,dv). \tag{9}$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man wie früher die innere Arbeit als Funktion von p und v, d. h. $U = F(p, v)$ bekannt annimmt und Anfangs- und Endzustand durch die Grössen p_1, v_1 und p_2, v_2 gegeben denkt, so findet sich die ganze Wärmemenge Q, die während des Ueberganges dem Körper mitzutheilen ist:

$$Q = AF\,(p_2, v_2) - AF\,(p_1, v_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv. \tag{10}$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist aber unbestimmt; de angedeutete Integration, durch welche man auf die ganze äussere Arbeit gelangen würde, ist unausführbar, so lange man nicht weiss, auf welche Weise sich während des Ueberganges der Druck p mit dem Volumen v geändert hat. In Folge davon ist natürlich auch die zuzuführende Wärmemenge Q unbestimmbar, so lange die Beziehung zwischen p und v unbekannt ist. Angenommen, diese Relation wäre bekannt, so kann man sich (Fig. 1) das spezifische Volumen v als Abscisse Ov und den zugehörigen Druck $vP = p$ als Ordinate aufgetragen und die Endpunkte der Ordinaten durch eine Curve $P_1 P P_2$ verbunden denken. Diese Curve giebt dann ein deutliches Bild vom Gesetze der Veränderung des Werthes p mit v. Dann repräsentirt aber auch die von der Curve $P_1 P P_2$ abgeschlossene Fläche (in der Figur horizontal schraffirt) den Werth des in Glei-

Fig. 1.



chung (10) stehenden Integrales, d. h. diese Fläche stellt die während des Ueberganges verrichtete äussere Arbeit dar. Da man die beiden Punkte P_1 und P_2 durch unendlich verschiedene Curven sich verbunden denken kann, so wird auch in jedem einzelnen Falle der von der Curve abgegrenzte Flächenraum, d. h. die vom Körper verrichtete äussere Arbeit und in Folge dessen auch die von aussen dem Körper mitzutheilende Wärme einen andern Werth haben.

Aus allem diesem geht nun folgender wichtige Satz hervor.

Geht durch Wärmemittheilung (oder Entziehung) ein Körper aus einem gewissen Zustand in einen andern über, so ist die Veränderung der innern Arbeit durch den Anfangs- und Endzustand vollständig bestimmt.

Nicht so ist es aber mit dem Werthe der äussern Arbeit und mit der Wärmemenge, welche dem Körper während der Zustandsänderungen von aussen mitzutheilen oder zu entziehen ist. Die Bestimmung der letztern Grössen erfordert noch die Kenntniss des Weges, auf welchem der Uebergang stattgefunden hat, d. h. man muss wissen, nach welchem Gesetze der Druck aus dem Anfangs- in den Endwerth übergegangen ist. Kurz gesprochen, lässt sich der Satz auch darstellen, indem man sagt, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (9) ist ein »unvollständiges Differential«; die Möglichkeit der Integration ist nur gegeben, wenn eine weitere Angabe über den Zusammenhang der Variabeln p und v vorliegt.

Es gebührt unzweifelhaft Clausius das Verdienst, diesen wichtigen Satz zuerst in bestimmter Form aufgestellt zu haben.

Die Annahmen über das Gesetz der Veränderungen des Druckes p mit dem Volumen v können begreiflicher Weise unendlich mannigfach sein; einige wenige Fälle sind aber von besonderer Wichtigkeit und auf diese mag schon hier verwiesen werden.

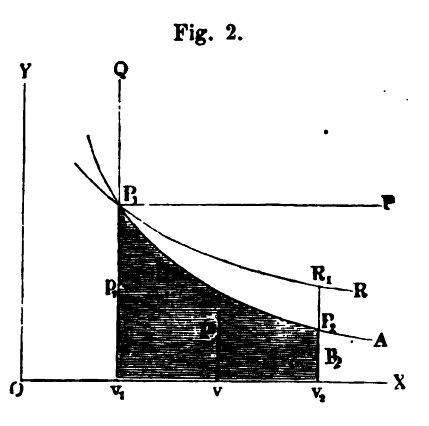
So kann z. B. die Wärmezuleitung so geregelt werden, dass der Druck p constant bleibt, in diesem Falle ist die Druckcurve eine gerade, zur Abscissenaxe parallele Linie $P_1 P$ (Fig. 2). Die Ausführung der in Gleichung (10) angedeuteten Integration ist dann sofort ermöglicht und zwar erhält man:

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p\,(v_2 - v_1).$$

Dann folgt ohne Weiteres nach Gleichung (10) die erforderliche Wärmemenge, vorausgesetzt freilich, es wäre $U = F(p, v)$ bekannt. Man sagt dann, die Wärmezuführung habe bei constantem Drucke stattgefunden.

In einem andern Falle könnte man das Volumen constant halten; man denke sich, dass eine den Körper umgebende feste Hülle eine Volumenvergrösserung nicht zulasse. Hier ist die Druckcurve wieder eine Gerade $P_1 Q$, die aber parallel der Ordinatenaxe OY liegt (Fig. 2); in diesem Falle ist natürlich die äussere Arbeit Null und die Gleichung (10) lehrt dann, dass bei Wärmemittheilung bei constantem Volumen die ganze zugeführte Wärme allein zur Vermehrung der innern Arbeit verwendet wird.

Fig. 2.



Wieder in einem andern Falle kann man sich vorstellen, dass der Uebergang des Körpers aus einem Zustand in den andern stattfindet, ohne dass eine Mittheilung oder Entziehung von Wärme erfolgt. Man denke sich nur, dass der äussere Druck immer unendlich wenig verschieden vom Körperdrucke gehalten werde.

Unter der gemachten Voraussetzung ist für jede Zustandsänderung in Gleichung (10) der Werth Q Null und ebenso $dQ = 0$ in Gleichung (9), daher

$$p\,dv = -\,dU$$

und

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = F(p_1, v_1) - F(p_2, v_2).$$

Dann ist also die äussere Arbeit gleich der Veränderung der innern Arbeit. Ist bei der Zustandsänderung von p_1, v_1 auf p_2, v_2 Arbeit nach Aussen hin abgegeben worden, so ist das gänzlich auf Kosten der innern Arbeit geschehen, und die in Fig. 2 schraffirte Fläche repräsentirt dann gleichzeitig die äussere

Arbeit, sowie die Aenderung der innern. Die Curve $P_1 P_2 A$ giebt für diesen speziellen Fall das Gesetz, nach welchem sich der spezifische Druck p mit dem Volumen ändert. Diese Curve, nach welcher die Druckänderungen erfolgen, wenn die Zustandsänderungen des Körpers ohne Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung stattfinden, spielt in der Wärmelehre eine so wichtige Rolle, dass wir sie mit einem besondern Namen einführen, und zwar soll für dieselbe der von Rankine vorgeschlagene Namen »adiabatische Curve« im Folgenden benutzt werden.

Wir werden später diese Curve für eine gewisse Art von Körpern näher bestimmen; allgemein lässt sich ihr Gesetz leicht darstellen. Setzt man wie früher

$$dU = X dp + Z dv,$$

so giebt die Substitution in Gleichung (9) unter der Voraussetzung $dQ = 0$ sofort:

$$X dp = -(Z + p)\, dv.$$

Würde man die beiden Grössen X und Z als Funktionen von p und v kennen, oder wäre kurz gesagt $U = F(p, v)$ bekannt, so würde die Integration vorstehender Gleichung sofort zur Gleichung der adiabatischen Linie führen.

Ein ähnlicher Fall wäre der, dass man während der Zustandsänderungen des Körpers den äussern Druck so regelt und die Mittheilung von Wärme der Art stattfinden lässt, dass die innere Arbeit unverändert bleibt, dann wäre $dU = 0$ und die Integration der Gleichung

$$0 = X dp + Z dv$$

würde auf die Gleichung der Curve führen, nach welcher sich in diesem Falle der Druck mit dem Volumen ändern müsste, welche Curve nach Cazin die »isodynamische Curve« genannt werden mag. Uebrigens ergiebt in diesem Falle Gleichung (9)

$$dQ = Apdv,$$

woraus zu schliessen ist, dass die ganze zugeführte Wärme in äussere Arbeit verwandelt wird.

Bemerkenswerth ist, dass in allen Fällen, wenn der äussere Druck dem Körperdruck gleich gehalten wird (wie es jetzt immer vorausgesetzt wurde), der Prozess umkehrbar ist. Hätte

sich nämlich in Folge gewisser Art der Wärmezuführung der Körper ausgedehnt von Ov_1 auf Ov_2 (Fig. 2) und wäre dabei der Druck aus dem Werthe $v_1 P_1 = p_1$ in den Endwerth $v_2 R_1$ übergegangen, wobei die Curve $P_1 R_1 R$ das Gesetz der Druckänderung angeben mag, so würde offenbar der Körper auf dem gleichen Wege wieder in den Anfangszustand zurückkehren, wenn man den Körper comprimirt und dabei den Druck nach dem gleichen durch die Curve $P_1 R_1 R$ gegebenen Gesetz ändert, überdies aber auch die Wärmeableitung nach dem nämlichen Gesetze, wie vorhin die Zuführung, auf dem umgekehrten Wege vor sich gehen lässt.

Ableitung der ersten Hauptgleichung.

Unter der Voraussetzung, dass der äussere Druck p, welchem ein Körper ausgesetzt ist, dem Körperdrucke gleichgehalten wird, betrug die äussere Arbeit, wenn das Volumen v der Gewichtseinheit um dv in Folge der Zuführung der Wärmemenge dQ sich verändert:

$$dL = p\,dv,$$

die Veränderung der innern Arbeit

$$dU = X dp + Z dv.$$

Substituirt man diese beiden Werthe in Gleichung (2)

$$dQ = A\,(dU + dL),$$

so folgt:

$$dQ = A\,[X dp + (Z + p)\,dv].$$

Wir setzen nun, weil dadurch die Formeln eine wesentlich einfachere Gestalt gewinnen, in Zukunft:

$$Z + p = Y \tag{11}$$

und erhalten daher:

$$dQ = A\,(X dp + Y dv). \tag{12}$$

In dieser Gleichung sind X und Y als Funktionen von p und v anzusehen, die zwar noch unbekannt sind, die aber in einem eigenthümlichen Zusammenhange stehen. Differentiirt man

nämlich Gleichung (11) auf beiden Seiten in Hinsicht p, so erhält man:

$$\left(\frac{dZ}{dp}\right) + 1 = \left(\frac{dY}{dp}\right)$$

oder:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dZ}{dp}\right) = 1.$$

Nun war aber nach unserer Darlegung über die innere Arbeit der Ausdruck für dU ein vollständiges Differential und es ergab sich (S. 28) nach Gleichung (4):

$$\left(\frac{dZ}{dp}\right) = \left(\frac{dX}{dv}\right).$$

Die Substitution in die vorige Gleichung giebt dann

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1 \qquad (I^a)$$

und das ist die sogenannte erste Hauptgleichung, wie sie, wenn auch in anderer Form, zuerst von Clausius gegeben wurde.

Die Gleichung zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden jetzt noch unbekannten Funktionen X und Y der Gleichung (12); sie zeigt aber auch zugleich, dass der Ausdruck in der Parenthese der Gleichung (12) ein unvollständiges Differential ist, denn wäre es ein vollständiges, so müsste die Differenz der beiden Differentialquotienten Null und nicht Eins sein. Man muss daraus schliessen, dass Gleichung (12) nicht integrabel ist, so lange nicht noch eine andre Beziehung zwischen den einzelnen Grössen der Gleichung gegeben ist. Hiernach spricht die Hauptgleichung (I^a) in mathematischer Form nur das aus, was wir schon oben ausdrücklich hervorgehoben haben, dass nämlich die einem Körper zuzuführende Wärmemenge Q nicht durch Angabe seines Anfangs- und Endzustandes allein bestimmt ist, sondern dass auch noch angegeben werden muss, auf welchem Wege der Körper aus dem einen in den andern Zustand übergegangen ist, nach welchem Gesetze beispielsweise der spezifische Druck sich mit dem spezifischen Volumen änderte.

Ableitung der zweiten Hauptgleichung.

Im Vorstehenden wurde hervorgehoben, dass Gleichung (12), nämlich

$$dQ = A\,(X dp + Y dv) \tag{12}$$

nicht integrabel sei, so lange nicht noch eine zweite Gleichung zwischen den einzelnen Grössen derselben gegeben ist.

Es sei nun aber S eine neue Funktion von p und v, deren Form zwar bis jetzt ebenso wenig bekannt sein mag, wie die der Funktionen X und Y, der wir aber eine Bedeutung beilegen wollen, die sogleich aus den weitern Betrachtungen hervorgehen wird.

Multiplizirt und dividirt man die rechte Seite vorstehender Gleichung mit S, so ergiebt sich:

$$dQ = AS\left[\frac{X}{S}dp + \frac{Y}{S}dv\right]. \tag{13}$$

Man kann nun offenbar S so wählen, dass der Ausdruck in der Klammer ein vollständiges Differential wird, mit andern Worten, es soll der Werth $\frac{1}{S}$ der integrirende Faktor oder wie sich auch sagen lässt, es soll S der integrirende Divisor des Ausdruckes in der Klammer der Gleichung (12) sein.

Hiermit ist denn die künftige Bedeutung dieser neuen Funktion S vollständig festgestellt und der Werth und die Form derselben angebbar, sobald die beiden Grössen X und Y als Funktionen von p und v gegeben sind.

Der Zusammenhang dieser drei Funktionen lässt sich aber durch eine Gleichung leicht feststellen.

Ist, wie wir voraussetzen, der Ausdruck in der Klammer der Gleichung (13) ein vollständiges Differential, so gilt bekanntlich die Beziehung

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{X}{S}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{Y}{S}\right)$$

oder die Differentiation ausgeführt

$$S\left(\frac{dX}{dv}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right) = S\left(\frac{dY}{dp}\right) - Y\left(\frac{dS}{dp}\right)$$

oder

$$S\left[\left(\frac{dY}{dp}\right)-\left(\frac{dX}{dv}\right)\right]=Y\left(\frac{dS}{dp}\right)-X\left(\frac{dS}{dv}\right).$$

Nun ist aber nach Gleichung I[a] der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite vorstehender Formel bekannt, er ist gleich Eins; man erhält daher:

$$S=Y\left(\frac{dS}{dp}\right)-X\left(\frac{dS}{dv}\right) \qquad \text{(II}^a\text{)}$$

und das ist die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie; während die erste Hauptgleichung den Zusammenhang der Funktionen X und Y darlegt, zeigt die zweite die Beziehung dieser Funktionen mit der neuen Funktion S, d. h. mit dem integrirenden Divisor des Klammerausdruckes der Gleichung (12).

Vorstehende Gleichung ist zuerst von Clapeyron*) und später von Clausius, von Beiden aber in ganz andrer Weise entwickelt worden; beide haben auf gewisse Hypothesen gestützt, auf die wir zurückkommen werden, die Bedeutung der Funktion S von vornherein anders dargelegt. Clapeyron hat nämlich, wie auch Clausius, von Anfang an die Grösse S als eine Funktion der Temperatur allein dargestellt. Ich habe aber vorgezogen, zu zeigen, dass man bei der Entwickelung beider Hauptgleichungen keine andern Grundsätze aufzustellen braucht, als den der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, und halte es für zweckmässig, den Begriff »Temperatur eines Körpers«, der sich nur schwer mathematisch scharf definiren lässt, so lange als möglich den vorliegenden mathematischen Entwickelungen fern zu halten.

Es ist gewiss nicht zu leugnen, dass gerade durch das Bestreben, diese Funktion von vornherein als eine Funktion der Temperatur hervortreten zu lassen, in den bisher erschienenen

*) Journal de l'école polytechnique. T. XIV, S. 170 (1834).

Poggendorff's Annalen. B. 59, S. 446. »Ueber die bewegende Kraft der Wärme«. — Diese meisterhaft geschriebene Abhandlung Clapeyron's, die sich durch grosse Klarheit und seltene Eleganz in der mathematischen Darstellung auszeichnet, ist im Grunde die erste mathematische Arbeit über mechanische Wärmetheorie und stützt sich auf das jetzt sehr seltene Werk von S. Carnot »Reflexions sur la puissance motrice du feu«. Paris, Bachelier, 1824. Beide Arbeiten sind lange Zeit fast unbeachtet, wenigstens unbenutzt geblieben, bis später, besonders durch die Abhandlungen von Clausius, deren Werth gebührende Würdigung fand.

Schriften über mechanische Wärmetheorie die Ableitung der zweiten Hauptgleichung als schwierig und umständlich erscheint. In diesem Falle muss man auch von der Annahme eines neuen, zuerst von **Carnot** aufgestellten, später von **Clausius** etwas veränderten Grundsatzes ausgehen, von dem wir hier vorläufig absehen können, auf dessen Annahme wir aber durch die weitern Betrachtungen gewissermassen von selbst geführt werden.

Durch das oben gegebene ist die Bedeutung der Funktion S so bestimmt und unzweideutig festgestellt, dass man mit Leichtigkeit weiter schliessen kann. Mit Hülfe der beiden entwickelten Hauptgleichungen lässt sich zunächst die Gleichung (12), welche die dem Körper mitzutheilende Wärme Q angiebt, in andre Formen bringen. Da S eine Funktion von p und v ist, so schreibt sich auch:

$$dS = \left(\frac{dS}{dp}\right) dp + \left(\frac{dS}{dv}\right) dv. \qquad (14)$$

Entwickelt man nun aus Gleichung (II^a) das eine Mal Y, das andre Mal X und substituirt die Werthe in Gleichung (12), die wir im Folgenden unter (III^a) wieder mit aufführen, so ergeben sich, wenn man dabei die Beziehung Gleichung (14) beachtet, sofort noch die beiden darauf folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A\,(X\,dp + Y\,dv) \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}\,(X\,dS + S\,dv) \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dS}{dv}\right)}\,[Y\,dS - S\,dp] \end{aligned}\right\} \qquad (III^a)$$

Die drei Gleichungen sind identisch; wir werden in der Folge bei Auflösung verschiedener Probleme immer diejenige herausgreifen, deren Anwendung am schnellsten zum Ziele führte. Die drei Grössen X, Y und S sind Funktionen von p und v, deren Zusammenhang allgemein durch die Gleichungen (I^a) und (II^a) dargelegt wird, die aber noch näher bestimmt sein müssen, ehe man von den Gleichungen (III^a) Gebrauch bei speziellen Untersuchungen machen kann.

Wäre bekannt, in welcher Beziehung die innere Arbeit U zu den Grössen p und v steht, so wäre damit auch unmittelbar die Grösse X, Y und S gegeben.

Wir setzten früher (S. 28)

$$X = \left(\frac{dU}{dp}\right).$$

Ferner:

$$Z = \left(\frac{dU}{dv}\right).$$

Da aber nach Gleichung (11) $Z + p = Y$ ist, so folgt

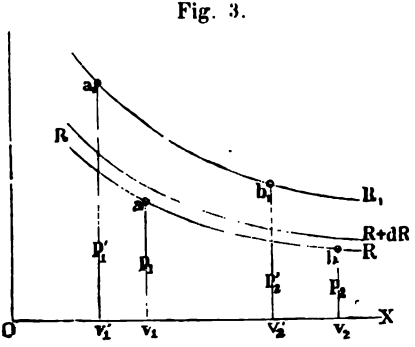
$$Y = p + \left(\frac{dU}{dv}\right)$$

und endlich könnte die Substitution dieser Grössen in Gleichung (IIa) auf den Werth S führen. Da nun aber im Allgemeinen $U = F(p, v)$ nicht bekannt ist, so muss auf anderm Wege, rückwärts auf die Form dieser Funktionen geschlossen werden: und das ist die Aufgabe, die durch das Folgende gelöst werden soll.

Von den einfachen umkehrbaren Kreisprozessen.

Der Gewichtseinheit eines Körpers, der durch das Volumen $Ov_1 = v_1$ und den Druck $v_1 a = p_1$ (Fig. 3) in seinem Anfangszustande bestimmt ist, soll nach einem bestimmten Gesetze die Wärmemenge Q mitgetheilt werden, nämlich so, dass die Beziehung zwischen Druck und Volumen während der Zustandsänderungen durch die Curve RR vorgezeichnet ist. Ist die Gleichung dieser Curve bekannt, so ist nach Früherem auch die mitzutheilende Wärmemenge bestimmbar, wenn der Druck aus dem Anfangswerth p_1 in den Endwerth p_2 übergeht. Die Gleichung der Curve denken wir uns nun in den weitern Entwickelungen immer in der Art

Fig. 3.



gegeben, dass wir annehmen, es sei eine Grösse R als Funktion von p und v, also

$$R = F(p, v),$$

bekannt, und es werde während der Zustandsänderung der Werth R constant erhalten. Für diesen Fall lässt sich, vorausgesetzt, die Form der Funktion sei gegeben, der Druck p durch das Volumen v ausdrücken und hiernach der Lauf der Curve beurtheilen.

Um nun anzudeuten, in welcher Weise die Wärmezuführung (oder Entziehung) und unter welchen Zustandsänderungen des Körpers die Wärmemittheilung stattgefunden hat, werden wir in der Folge, weil dadurch die Darlegungen ausserordentlich abgekürzt werden, kurz sagen: »dem Körper sei, während er auf der Curve R den Weg ab zurücklegt, die Wärmemenge Q zuzuführen (oder zu entziehen);« damit soll also kurz angedeutet werden, dass die Druckänderungen von p_1 auf p_2 nach dem Gesetze:

$$R = F(p, v) = \text{Const.},$$

stattgefunden haben; die von dem Curvenstück ab abgegrenzte Fläche $v_1\, v_2\, b\, a$ giebt dann die äussere Arbeit.

War eine Wärmezuführung nöthig, um den Körper auf der Curve R den Weg ab zurücklegen zu lassen, so ist es natürlich nothwendig, die gleiche Wärmemenge auf umgekehrte Weise dem Körper wieder zu entziehen, wenn der Körper auf der gleichen Curve R auf dem Wege ba in seinen Anfangszustand zurückgeführt werden soll. Wäre hingegen auf dem Wege ab eine gewisse Wärmemenge Q abzuleiten gewesen, so würde auf dem Wege ba die gleiche Wärmemenge Q auf umgekehrtem Wege zuzuführen sein.

Ist die Form der Funktion $F(p, v)$ die gleiche, aber die Constante R eine andre, z. B. R_1, so deutet das an, dass eine andre Curve R_1 (Fig. 3) von gleicher Art den Weg der Zustandsänderungen des Körpers angeben soll. Stellt man sich den gleichen Körper das eine Mal im Zustande $a\ (p_1, v_1)$, das andre Mal im Zustande $a_1\ (p'_1\, v'_2)$ (Fig. 3) vor, so wird, wenn auf dem Wege ab auf der Curve R eine Wärmemittheilung nöthig ist, offenbar auch eine solche nothwendig werden, wenn der Körper den Weg $a_1\, b_1$ auf der Curve R_1 beschreibt; würde aber

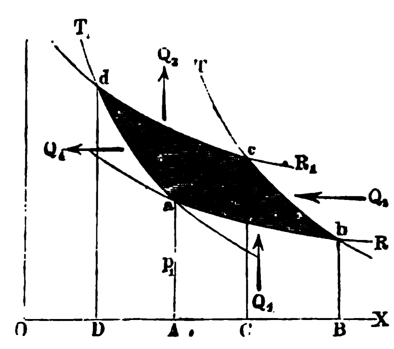
derselbe Körper bei zwei Versuchen die Wege ab und $a_1 b_1$ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so würde auf dem einen Wege eine Wärmeentziehung stattfinden müssen, wenn auf dem andern Wege eine Wärmemittheilung stattgefunden hatte.

Die beiden Curven R und R_1 rücken unendlich nahe an einander, wenn die Constanten R und R_1 nur um unendlich wenig von einander verschieden sind; wir bezeichnen das in der Folge dadurch, dass wir $R + dR$ statt R_1 schreiben; die Differentiation der Gleichung $R = F(p, v)$ ergiebt übrigens für diesen Fall:

$$dR = \left(\frac{dR}{dp}\right) dp + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv.$$

Wir wollen uns nun zwei Paare von zusammengehörigen Curven denken; bei dem einen Paare sei $R = F(p, v)$; bei dem andern $T = \varphi(p, v)$. Die Curven R und R_1 (Fig. 4) sind von gleicher Art, unterscheiden sich also nur durch den Werth des Constanten R; ebenso sei es mit den Curven T und T_1 der Fall.

Fig. 4.



Denken wir uns den Anfangszustand a des Körpers durch die Grössen $OA = v_1$ und $Aa = p_1$ gegeben, und führen wir den Körper auf der Curve R durch den Weg ab, so ist eine Wärmemenge Q_1 zuzuführen (wir denken uns, um die Ideen zu fixiren, eine Wärmemittheilung nothwendig), die sich bestimmen lässt und zwar auf Grund der Gleichung (2).

$$dQ = A(dU + dL).$$

Integrirt man diese Gleichung, was hier möglich ist, da wir uns durch das Gesetz:

$$R = F(p, v) = \text{Const.},$$

die Aenderung von p mit v gegeben denken, so findet sich die zuzuführende Wärmemenge:

$$Q_1 = A(U_2 - U_1 + L_1). \tag{1}$$

Die Differenz $U_2 - U_1$ deutet die Veränderung der innern Arbeit an, während L_1 die äussere Arbeit darstellt, die durch den Inhalt der Fläche $ABba$ repräsentirt wird; U_1 ist die innere Arbeit im Anfange (im Zustand a); U_2 der gleiche Werth am Ende (im Zustand b). Den Angaben der Figur 4 gemäss hat während dieser Aenderungen eine Ausdehnung des Körpers von OA auf OB stattgefunden, die äussere Arbeit L_1 ist sonach nach aussen hin abgegeben, im gewöhnlichen Sinne gewonnen worden; in diesem Sinne soll die äussere Arbeit in der Folge mit dem positiven Zeichen versehen werden, während umgekehrt die äussere Arbeit, die bei Volumenverminderung des Körpers verbraucht wird, mit dem negativen Zeichen versehen werden mag.

Was das Vorzeichen der Wärmemengen betrifft, so soll jederzeit eine Mittheilung von Wärme durch das positive Zeichen, eine Entziehung durch das negative Zeichen angedeutet werden. Die Werthe Q_1 und L_1 haben sonach in Gleichung (15) schon die richtigen Vorzeichen.

Wir wollen nun mit den Zustandsänderungen des Körpers weiter gehen und voraussetzen, derselbe werde jetzt auf der Curve

$$T = \varphi(p, v) = \text{Const.} \qquad \text{(Fig. 4)}$$

durch den Weg bc geführt; bezeichnen wir die innere Arbeit im Zustand c mit U_3 und setzen wir voraus, dass eine Mittheilung der Wärmemenge Q_2 sich während dieses Ueberganges nöthig macht, so folgt, wie vorhin

$$Q_2 = A[U_3 - U_2 - L_2], \tag{16}$$

wobei L_2 die äussere Arbeit $CBbc$ darstellt, die hier negativ zu setzen ist, da nach Annahme der Figur 4 eine Volumenverminderung des Körpers auf dem Wege bc stattfindet.

Wird nun der Körper weiter auf der Curve

$$R_1 = F(p, v) = \text{Const.}$$

durch den Weg cd und endlich auf der Curve

$$T_1 = \varphi(p, v) = \text{Const.}$$

durch den Weg da in seinen Anfangszustand a zurückgeführt und ist U_4 die innere Arbeit im Zustande d, so ergeben sich in gleicher Art, wie vorhin auch die beiden Gleichungen

$$-Q_3 = A[U_4 - U_3 - L_3], \tag{17}$$

$$-Q_4 = A[U_1 - U_4 + L_4]. \tag{18}$$

Die durch Q_3 und Q_4 angedeuteten Wärmemengen sind negativ in Rechnung zu stellen, weil auf beiden Wegen *cd* und *da* eine Wärmeentziehung nöthig war; das Letztere ist der Fall, weil wir auf den Wegen *ab* und *bc* eine Wärmemittheilung angenommen haben und weil die Wege *ab* und *cd*, sowie *bc* und *da* auf Curven gleicher Art in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden.

Die Arbeit L_3 in Gleichung (17) und die Arbeit L_4 in Gleichung (18) werden durch die Flächen *DCcd* und *DAad* dargestellt, und zwar ist L_3 negativ und L_4 positiv in Rechnung gebracht, weil auf dem Wege *cd* eine Volumenverminderung und auf dem Wege *da* eine Volumenvergrösserung stattfindet, im erstern Falle die Arbeit L_3 verrichtet werden muss, im andern Falle die Arbeit L_4 gewonnen wird. Endlich ist noch hervorzuheben, dass in Gleichung (18) schliesslich wieder die innere Arbeit U_1 erscheint, die dem Körper schon bei Beginn des Versuches innewohnte. Da der Körper am Ende sich im gleichen Zustande wie im Anfange befindet, also Druck und Volumen wieder in die Anfangswerthe übergegangen sind, so muss das auch mit der innern Arbeit der Fall sein, da wir ja von vornherein die innere Arbeit als eine Funktion von p und v hingestellt haben.

Addirt man jetzt die vier Gleichungen (15), (16), (17) und (18), so heben sich die Werthe U und man erhält:

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = A[L_1 - L_2 - L_3 + L_4]. \tag{19}$$

Die Werthe L in der Klammer der rechten Seite dieser Gleichung sind aber, wie schon hervorgehoben wurde, durch die einzelnen Flächenräume

ABba, *CBbc*, *DCcd* und *DAad* (Fig. 4)

vollständig bestimmt und es ergiebt sich

$$L_1 + L_4 = \text{Fläche } DBbad,$$

$$L_2 + L_3 = \text{Fläche } DBbcd.$$

Die Differenz dieser Flächen ist nun offenbar nichts Anderes, als die Fläche *abcd*, welche von unseren vier Curven umschlossen wird, und die in der Figur 4 horizontal schraffirt erscheint. Denken wir uns den Flächenraum bestimmt und mit F bezeichnet, so schreibt sich Gl. (19) einfacher:

$$- [(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)] = - AF. \qquad (20)$$

Da F negativ erscheint, so deutet dies auf Verbrauch von Arbeit hin: die Arbeit, welche zur Compression des Körpers auf dem Wege *bcd* verbraucht wurde, ist grösser, als die Arbeit, welche bei der Volumenvergrösserung des Körpers auf dem Wege *dab* gewonnen, d. h. vom Körper verrichtet wurde. Der Werth AF stellt die Wärmemenge dar, welche dieser Arbeit entspricht, und da hier Arbeit verbraucht wurde, so muss eine dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge (AF) erschienen sein, erzeugt worden sein. Im Körper, mit dem wir den Versuch ausführten, findet sich diese Wärmemenge nicht vor, denn derselbe ist in seinen Anfangszustand zurückgekehrt, die innere Arbeit desselben ist also die anfängliche. Gl. (20) giebt aber nun über die Frage, wohin diese erzeugte Wärmemenge gekommen ist, vollständigen Aufschluss. Da $(Q_3 + Q_4)$ die Wärmemenge darstellt, welche auf dem Wege *cda* dem Körper entzogen wurde und $Q_1 + Q_2$ die Wärmemenge, welche ihm auf dem Wege *abc* mitgetheilt wurde, so spricht eben Gl. (20) aus, dass während des Prozesses, dem der Körper unterworfen worden ist, mehr Wärme abzuführen war, als zugeleitet wurde, und dass die Differenz genau gleich der durch Arbeit erzeugten Wärmemenge AF ist.

Bei dem Versuche, welchem der Körper unterworfen wurde, durchlief derselbe, oder richtiger gesagt, der Endpunkt der Ordinate, welche den Druck p darstellt, den Umfang der Fläche F in der Richtung *abcd*, was durch den im Innern der Fläche F in Figur 4 dargestellten Pfeil angedeutet werden soll. Auf den Strecken *ab* und *bc* haben wir Wärmezuleitung angenommen, was in der Figur dadurch angedeutet ist, dass bei den Buchstaben Q_1 und Q_2 Pfeile angegeben sind, die nach den Curven hinzeigen. Die Ableitung von Wärme auf den Strecken *cd* und *da* ist hingegen durch Pfeile bezeichnet, die sich von diesen Strecken abkehren.

Wir haben ferner vorausgesetzt, dass der Körper während des ganzen Prozesses unter einem äussern Druck steht, der in jedem Augenblicke dem Körperdrucke gleich ist, oder besser gesagt, nur unendlich wenig von diesem verschieden ist. In diesem Falle ist aber der ganze Prozess, der hier beschrieben wurde, umkehrbar. der Körper kann sonach den Umfang der Fläche F (Fig. 4) auch in umgekehrter Folge auf dem Wege *adcba* beschreiben: in diesem Falle ändern einfach, was sich nach Vorstehendem von selbst versteht, alle Glieder der Gl. (20) das Zeichen und man erhält

$$(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2) = AF. \tag{21}$$

Auf diesem Wege gewinnt man dann die Arbeit F und die Summe der auf den Wegen *ad* und *dc* zugeführten Wärmemengen Q_4 und Q_3 ist grösser, als die Summe der Wärmemengen Q_2 und Q_1, die auf den Strecken *cb* und *ba* dem Körper zu entziehen sind. Es verschwindet in diesem Falle eine Wärmemenge $(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)$ und diese Wärmemenge entspricht nach Gl. (21) genau der gewonnenen Arbeit F. Man kann hienach sagen, dass bei der ersten Art der Aufeinanderfolge der Operationen die Arbeit F in Wärme verwandelt wurde, dass durch diese Arbeit eine derselben entsprechende Wärmemenge erzeugt wurde; dass hingegen bei Umkehrung der Reihenfolge Wärme verschwindet und eine dieser Wärmemenge entsprechende Arbeit gewonnen wurde; immer vorausgesetzt, dass der Körper, mit welchem die Veränderungen vorgenommen werden, am Ende des Prozesses in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist.

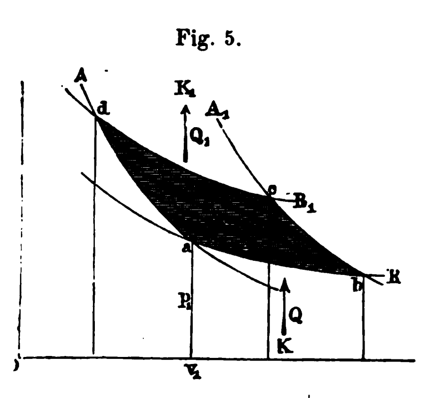
Einen Prozess der vorgeführten Art nennt man (nach Clausius) einen Kreisprozess, und zwar wenn, wie hier, der äussere Druck in jedem Augenblicke dem Körperdrucke gleich ist, einen umkehrbaren Kreisprozess, weil der Umfang der Fläche F (Fig. 4) nach der einen oder der andern Richtung beschrieben werden kann. Auf dem einen Wege wird durch Verbrauch von Arbeit Wärme erzeugt, auf dem andern Wege verschwindet Wärme und Arbeit wird gewonnen.

Wird die Fläche, wie oben angenommen wurde, von zwei Paaren von Curven gebildet, so soll in der Folge der Kreisprozess ein einfacher genannt werden, dabei wird aber aus-

drücklich vorausgesetzt, dass die beiden Curven eines Paares Curven **gleicher Art** sind, deren Gleichungen sich nur durch verschiedenen Werth einer bestimmten Constanten unterscheiden. In jedem andern Falle, und auf solche Fälle kommen wir zurück, soll der Kreisprozess ein **zusammengesetzter** genannt werden.

Bei dem einfachen Kreisprozess, wie er oben behandelt wurde, haben wir über die Gesetze, welche die beiden Curvenpaare befolgen sollen, ganz allgemeine Annahmen gemacht. Man kann nun aber, ohne etwas an der Allgemeinheit der Betrachtungen zu ändern in Betreff des einen Curvenpaares und zwar des Paares T und T_1 (Fig. 4) eine bestimmte Annahme knüpfen. Der nächst liegende Gedanke, den wir auch weiter verfolgen werden, ist nun der, anzunehmen, dass die beiden Curven T und T_1 adiabatische Linien sind, d. h. Linien, welche die Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v angeben unter der Voraussetzung, dass das Körpervolumen sich ändert, **ohne** dass dem Körper Wärme mitgetheilt oder entzogen wird. Es sei also wieder der Anfangszustand a des Körpers durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 bestimmt (Fig. 5). Die Curven R und R_1 befolgen beide das Gesetz

Fig. 5.



$$R = F(p, v) = \text{Const.},$$

nur dass bei der zweiten Curve die Constante R durch den constanten Werth R_1 ersetzt ist.

Die beiden andern Curven A und A_1 sind adiabatische Linien, die beide das nämliche Gesetz befolgen, die sich aber durch verschiedene Werthe derselben Constanten in ihren Gleichungen unterscheiden.

Die Gleichungen (20) und (21) gelten nun ohne Weiteres auch für den einfachen Kreisprozess vorliegender Art, nur dass sie sich wesentlich vereinfachen; wir haben hier nämlich, da auf

den Wegen bc und da Wärme dem Körper weder mitgetheilt noch entzogen wird, in den genannten Gleichungen $Q_2 = 0$ und $Q_4 = 0$ zu setzen; ersetzen wir noch entsprechend der neuen Figur 5 die Grösse Q_1 durch Q und Q_3 durch Q_1, so folgt:

$$\mp Q_1 - Q = \mp AF$$

wofür wir einfach

$$Q_1 - Q = AF \tag{22}$$

setzen wollen, da über das den beiden Seiten der Gleichung zu ertheilende Vorzeichen kein Zweifel herrschen kann.

Beschreibt hiernach der Körper den Umfang der Fläche F in der Richtung des angegebenen Pfeiles, also in der Richtung $abcda$, so ist auf der Strecke ab die Wärmemenge Q zuzuführen und auf der Strecke cd dem Körper die Wärmemenge Q_1 zu entziehen; der letztere Werth Q_1 ist grösser als Q und zwar genau um die Wärmemenge AF, welche der aufgewandten äussern Arbeit entspricht. Beim umgekehrten Lauf ist auf der Strecke dc die Wärme Q_1 zuzuführen und auf der Strecke ba die Wärmemenge Q abzuleiten, die Differenz $Q_1 - Q$ stellt dann die in Arbeit verwandelte Wärmemenge dar.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir keinerlei Annahme gemacht über die Art und Weise, wie die Wärmemittheilung und Wärmeentziehung eigentlich stattfinden soll. Der gewöhnliche Fall ist der, dass zwei Körper in unmittelbarer Berührung stehen und die Wärme durch Leitung von einem Körper auf den andern übergeht. Es ändert nun nichts an der Allgemeinheit der Untersuchung des einfachen Kreisprozesses, wenn wir annehmen, die Mittheilung oder Entziehung von Wärme geschehe in Wirklichkeit dadurch, dass wir unsern Körper, mit dem wir den Versuch ausführen und den wir von jetzt an den vermittelnden Körper nennen wollen, mit andern Körpern in Berührung setzen, von denen er Wärme empfängt oder an welche er solche abgiebt.

Wir können uns sonach vorstellen, wenn wir den durch Fig. 5 angedeuteten Kreisprozess noch einmal der Betrachtung unterwerfen, der vermittelnde Körper stehe, während er die Strecke ab der Curve R durchläuft, mit einem Körper K in Berührung, der ihm die Wärmemenge Q mittheilt oder der

ihm dieselbe Wärmemenge entzieht, wenn die Strecke ab vom vermittelnden Körper in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird.

Diesem Körper K müssen wir nun freilich ganz besondere Eigenschaften beilegen; dass er nämlich die Wärmemenge Q nach und nach wirklich in dem Maasse liefert oder vom vermittelnden Körper aufnimmt, dass die Druckänderung genau der Curve R entspricht. Um anzudeuten, dass der Körper gerade diese Eigenschaft besitzt, wollen wir ihn einen »Körper vom Zustande R« nennen; man kann dann kurzweg sagen, auf der Stecke ab habe der Körper K vom Zustande R dem vermittelnden Körper die Wärmemenge Q geliefert, oder wenn die Strecke in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wurde, er habe ihm diese Wärmemenge entzogen.

Auf gleiche Weise lässt sich dann die Entziehung der Wärmemenge Q_1 auf der Strecke cd (Fig. 5) dadurch bewerkstelligt denken, dass während des Durchlaufens dieser Strecke der vermittelnde Körper mit einem »Körper K_1 vom Zustande R_1« in Berührung steht, der diese Wärmemenge aufnimmt oder der diese Wärmemenge liefert, wenn die Strecke cd in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

Führt man auf die angegebene Art die beiden Hülfskörper mit den bezeichneten Eigenschaften ein, so erscheint jetzt der einfache Kreisprozess (Fig. 5) als eine Wechselwirkung zwischen drei Körpern.

Durchläuft der vermittelnde Körper den Umfang der Fläche $abcd$ in der Richtung des Pfeiles, so wird die äussere Arbeit F verbraucht, dem Körper K vom Zustande R die Wärmemenge Q entzogen und dem Körper K_1 vom Zustande R_1 die Wärmemenge Q_1 mitgetheilt; die letztere Wärmemenge Q_1 ist genau um die in Wärme verwandelte Arbeit F grösser, als die Wärmemenge Q. Der vermittelnde Körper ist genau in seinen Anfangszustand zurückgekehrt; im Ganzen sind aber doch in sofern die Verhältnisse nicht mehr diejenigen vor Beginn der Operation, als der Körper K die Wärmemenge Q verloren, der Körper K_1 die Wärmemenge Q_1 gewonnen hat; diese Ueberführung von Wärme ist dann mit einem Arbeitsaufwande verbunden.

Führen wir jetzt den Prozess in umgekehrter Folge aus, so wird dem Körper K_1 die Wärmemenge Q_1 entzogen und dem

Körper K die Wärmemenge Q wieder gegeben, dabei aber ist die gleiche Arbeit F zurück gewonnen worden. Jetzt sind die drei Versuchskörper wieder im Anfangszustande und Arbeit ist, wie sich nach den Grundsätzen der Mechanik nicht anders erwarten liess, weder verloren noch gewonnen worden. Die beiden Hülfskörper K und K_1 haben wir übrigens zunächst nur vorübergehend in unsere Betrachtungen aufgenommen, und zwar nur, um geschichtliche Notizen über den Kreisprozess hier anfügen zu können.

Die Einführung der Kreisprozesse in die Untersuchungen über die Wärme verdanken wir Carnot (a. a. O.), nach ihm hat dann Clapeyron (a. a. O.) den Kreisprozess analytischen Betrachtungen unterworfen. Beide Schriftsteller und so auch alle andern, die bis jetzt über mechanische Wärmetheorie geschrieben haben, machen aber bei der Betrachtung des einfachen Kreisprozesses in Betreff der Curven R und R_1 (Fig. 5) von vornherein bestimmte Annahmen, indem sie die Temperatur in die Rechnung einführen und voraussetzen, diese Curven stellen die Beziehung zwischen Druck und Volumen dar, wenn der vermittelnde Körper beim Durchlaufen der Wege ab und cd auf constanter Temperatur erhalten werde. In unseren obigen Gleichungen:

$$R = F(p, v) = \text{Const.}$$

$$R_1 = F(p, v) = \text{Const.}$$

bedeutet in diesem Fall R die Temperatur des Körpers auf dem Wege ab und R_1 die Temperatur desselben auf der Strecke cd. Wir ersetzen vorübergehend, dem Gebrauche entsprechend, für diesen Fall die Buchstaben R und R_1 durch die Buchstaben t und t_1. Die beiden Hülfskörper K und K_1 erscheinen nun jetzt als Körper, welche die Fähigkeit haben, den ermittelnden Körper einfach durch Berührung auf constanter Temperatur t oder t_1 zu erhalten; und solche Körper sind denkbar, man braucht sich den Körper K nur von der Temperatur t und den Körper K_1 von der Temperatur t_1 und beide als sehr gross gegen den vermittelnden Körper vorzustellen, so dass sie trotz Aufnahme oder Abgabe von Wärme keine oder nur unmerklich geringe Temperaturänderungen erleiden.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich nun der einfache

Kreisprozess in der Art darlegen, wie es zuerst von Carnot geschah. Sind die Curven A und A_1 (Fig. 5) wieder adiabatische Linien und durchläuft der Körper den Umfang der Fläche F in der Richtung des Pfeiles, so wird dem Körper K von der Temperatur t die Wärmemenge Q entzogen und dem Körper K_1 von der Temperatur t_1 die Wärmemenge Q_1 mitgetheilt, und die Arbeit F verbraucht. Da nun $t_1 > t$ ist, so ist hiermit mit einem Aufwand von Arbeit Wärme von einem Körper von niederer, zu einem andern Körper von höherer Temperatur übergeführt worden und dabei standen immer Körper von gleicher Temperatur (richtiger, Körper deren Temperaturdifferenz unendlich klein ist) miteinander in Berührung.

Bei der Umkehrung des Prozesses wird auf gleiche Weise Wärme von einem Körper K_1 nach einem andern Körper K von geringerer Temperatur übertragen und dabei eine entsprechende Arbeitsmenge F gewonnen.

Diese Betrachtung führte nun Carnot auf folgenden Grundsatz:

»Dem Uebergange einer gewissen Wärmemenge aus einem Körper (K_1) von höherer zu einem anderen (K) von niederer Temperatur ist ein gewisses Arbeitsquantum aequivalent, wenn im Zustande des vermittelnden Körpers keine bleibenden Veränderungen eintreten. Die Quantität der Wärme bleibt dabei constant.«

Auf diesem Satze ruhen auch die Rechnungen Clapeyron's. In dieser Form gegeben widerspricht aber der Grundsatz dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit und zwar ist, worauf Clausius zuerst hingewiesen hat, der Nachsatz »die Quantität der Wärme bleibt constant« zu verwerfen. Carnot, wie Clapeyron wollten damit aussprechen, dass (wenn wir die obige Bezeichnung beibehalten), die Wärmemenge Q_1, welche beim Umlaufen der Fläche F in der Richtung *adcba* dem Körper K_1 von der höhern Temperatur t_1 entzogen wird, gleich der Wärmemenge Q sei, die auf dem Wege *ba* dem Körper K der niedern Temperatur t zugeführt wird. Damit wurde ausgesprochen, dass bei diesem Prozesse der Gewinn der Arbeit F einfach nur in dem Uebergange der Wärmemenge Q von höherer zu niederer Temperatur seinen Grund habe; die ge-

wonnene Arbeit sollte dann nach Carnot und Clapeyron der übertragenen Wärmemenge proportional sein.

Nach dem Hauptgrundsatze der mechanischen Wärmetheorie, wonach mit einem Gewinn von Arbeit ein Verschwinden einer dieser Arbeit entsprechenden Wärmemenge verbunden ist, kann aber die Annahme $Q = Q_1$ nicht zugegeben werden, vielmehr besteht, wie Clausius zuerst zeigte und wie wir oben dargelegt haben, für den einfachen Kreisprozess die Beziehung

$$Q_1 - Q = AF.$$

Zu Carnot's und Clapeyron's Zeit war der Satz der Aequivalenz von Wärme und Arbeit noch nicht bekannt, trotzdem muss man deren Arbeiten zu den Schriften über mechanische Wärmetheorie zählen, denn der Carnot'sche Grundsatz wird heute noch als richtig angesehen, nur der Nachsatz »die Quantität der Wärme ist dabei constant« muss ersetzt werden durch den Satz »dabei verschwindet eine der gewonnenen Arbeit proportionale Wärmemenge.«

Wir kommen in der Folge auf die Frage zurück und heben hier nur noch als bemerkenswerth hervor, dass die meisten Rechnungsresultate Clapeyron's noch heute volle Gültigkeit haben und dass wir Clapeyron die Gleichung verdanken, die oben als die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie hingestellt worden ist. Die Aenderung des Nachsatzes des Carnot'schen Grundsatzes in Berücksichtigung des Satzes von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit führte dann Clausius auf die Gleichung, die oben als die erste Hauptgleichung angegeben wurde.

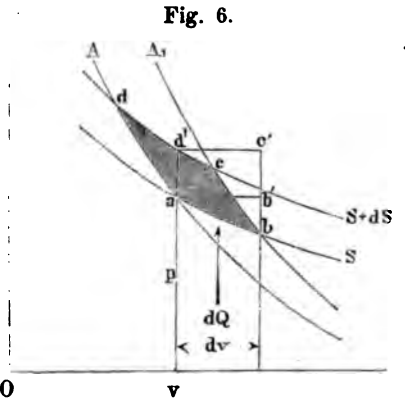
Ueber die Eigenschaften der Funktion S und von den zusammengesetzten umkehrbaren Kreisprozessen.

Die Sätze über den einfachen Kreisprozess und zwar in der allgemeinern Form, wie wir sie oben gegeben haben, werden wir nun benutzen, um die Eigenschaften der Funktion S, die wir bei Entwickelung der zweiten Hauptgleichung eingeführt haben, näher zu untersuchen.

Es seien A und A_1 (Fig. 6) zwei unendlich nahe bei einander liegende adiabatische Curven und der Zustand a eines Körpers sei durch den Druck p und das Volumen v gegeben.

Die andern beiden Curven ab und dc seien dadurch bestimmt, dass wir annehmen, es ändere sich der Druck p auf der Curve ab der Art nach v, dass in der Gleichung

Fig. 6.



$$S = f(p, v)$$

der Werth S constant erhalten wird, während die zweite, der erstern unendlich nahe liegende Curve dc dem Gesetze

$$S + dS = f(p, v) = \text{Const.}$$

unterworfen ist, wobei in der Folge, wie wiederholt bemerkt werden mag, nun durchgängig angenommen werden soll, es sei S diejenige Funktion von p und v, die wir bei Aufstellung der zweiten Hauptgleichung (S. 41) eingeführt haben.

Unterwerfen wir jetzt unsern Körper einem Kreisprozesse, d. h. lassen wir den Endpunkt der Ordinate p den Weg $abcda$ durchlaufen, so repräsentirt der Inhalt der von den unendlich kurzen Linienstrecken ab, bc, cd, da begrenzten Fläche die Arbeit, welche während des Prozesses verbraucht worden ist.

Der Inhalt dieser Fläche, den wir mit d^2F bezeichnen wollen, lässt sich aber leicht bestimmen, da die Fläche als ein unendlich kleines Parallelogramm angesehen werden kann, dessen Inhalt gleich dem unendlich kleinen Rechtecke $ab'c'd'$ ist; daher folgt zunächst

$$d^2F = \overline{ab'} \times \overline{ad'}.$$

Nun ist aber ab' die Ausdehnung dv des Körpers auf dem Wege ab und ad' ist das Wachsthum von p, wenn bei constantem Volumen v der Werth S in $S + dS$ übergeht. Setzen wir daher in der Gleichung

$$dS = \left(\frac{dS}{dp}\right) dp + \left(\frac{dS}{dv}\right) dv$$

$dv = 0$, so bestimmt sich

$$dp = \frac{dS}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}$$

und das ist der gesuchte Werth von ad'. Die Substitution in die Gleichung für d^2F giebt dann die Fläche:

$$d^2F = \frac{dS \,.\, dv}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}. \tag{23}$$

Nun lässt sich ferner auch die Wärmemenge dQ ermitteln, die man dem Körper auf dem Wege ab zuführen muss, damit die Zustandsänderung des Körpers, wie vorausgesetzt wurde, bei constantem Werthe von S erfolge. Wir haben einfach in unserer früher gegebenen Gl. ($\mathrm{III^a}$), S. 43

$$dQ = \frac{A}{\left(\frac{dS}{dp}\right)} [XdS + Sdv]$$

den Werth $dS = 0$ zu setzen, und erhalten sonach für vorliegenden Fall:

$$dQ = \frac{ASdv}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}. \tag{24}$$

Die Division der Gl. (23) durch Gl. (24) führt nun ohne Weiteres auf folgende einfache Beziehung:

$$d^2F = \frac{dS}{AS} \cdot dQ. \tag{25}$$

Diese Gleichung lässt sich aber integriren unter der Voraussetzung, dass sowohl S als dS constant ist. Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Ausdehnung auf dem Wege ab Figur 7 eine endliche sei, dass die beiden adia-

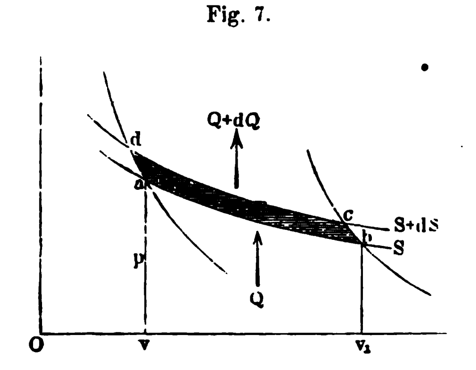
batischen Linien nicht mehr unendlich nahe bei einander liegen. Die Integration giebt

$$dF = \frac{dS}{AS} \cdot Q. \tag{26}$$

Hier ist nun Q die Wärmemenge, die bei constantem Werthe von S dem Körper auf dem Wege ab zuzuführen ist.

Denken wir uns jetzt den Kreisprozess vollständig vollzogen, so ist auf dem Wege cd (wobei $S + dS$ constant ist) eine Wärmemenge abzuleiten, von der wir aus den frühern allgemeinen Betrachtungen wissen, dass sie grösser als Q ist und zwar genau um die Wärmemenge, welche der aufgewandten Arbeit dF entspricht. (Vergleiche Gl. 22.) Setzen wir die abzuleitende Wärmemenge $Q + dQ$, so findet sich hiernach

Fig. 7.



$$dQ = AdF$$

und die Substitution des hieraus hervorgehenden Werthes von dF in Gl. 26 ergiebt

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dS}{S}$$

und wenn man integrirt

$$\text{logn. } Q = \text{logn. } S + \text{Const.}$$

oder:

$$\text{logn. } \frac{Q}{S} = \text{Const.},$$

und noch einfacher:

$$\frac{Q}{S} = \text{Const.} \tag{27}$$

Diese Gleichung spricht nun ein merkwürdiges Gesetz aus und deutet auf ganz besondere Eigenschaften der Funktion S.

Das Resultat, das sich durch Gl. (27) herausstellt, ist folgendermassen zu verstehen.

Denkt man sich einen beliebigen Körper in verschiedenen Anfangszuständen a, a_1, a_2 (Fig. 8) so aber, dass der Endpunkt der Ordinate, die den Druck repräsentirt, in die adiabatische Linie A fällt, so wird jedem dieser Zustände ein gewisser Werth unserer Funktion S entsprechen, welche Werthe beziehungsweise mit S, S_1 und S_2 bezeichnet werden mögen. Führt man nun diesem Körper Wärme von aussen zu und zwar der Art, dass während der Ausdehnung des Körpers der dem Anfangszustande entsprechende Werth S constant ist, und setzt man Ausdehnung des Körpers und Wärmezuführung in jedem einzelnen Falle so weit fort, bis eine bestimmte zweite adiabatische Linie A_1 getroffen wird, so stehen die zuzuführenden Wärmemengen Q, Q_1, Q_2 in einfacher Beziehung zu einander, es ist nämlich, wie Gl. (27) ausspricht:

Fig. 8.

$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_2}{S_2}. \tag{28}$$

Dieser einfache Satz, auf dessen besondere Bedeutung wir später zurückkommen, erlaubt uns, die früheren Sätze über den einfachen Kreisprozess wesentlich zu erweitern.

Es seien Figur 9 A und A_1 zwei adiabatische Curven, ferner S und S_1 wie bisher zwei Curven, welche den Gleichungen

$$S = f(p, v) = \text{Const. und } S_1 = f(p, v) = \text{Const.}$$

entsprechen. Lassen wir nun einen Körper, der im Zustande a durch das Volumen v und den Druck p gegeben ist, den Umfang der durch die vier Curven umschlossenen Fläche beschreiben und zwar in der Richtung des Pfeiles, so ist auf dem Wege ab

die Wärmemenge Q zuzuführen, auf dem Wege *cd* die Wärmemenge Q_1 abzuleiten, und die Fläche F repräsentirt dabei die verbrauchte Arbeit. Nun war aber nach Gl. (22)

$$AF = Q_1 - Q,$$

daher folgt, wenn wir nach Angabe der Gl. (28).

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q}{S}$$

setzen, durch Substitution:

$$F = \frac{Q}{AS}(S_1 - S) \tag{29}$$

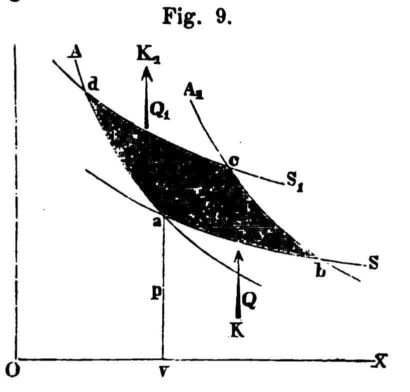
oder auch:

$$F = \frac{Q_1}{AS_1}(S_1 - S). \tag{30}$$

Hieraus folgt nun der wichtige Satz:

»Die bei einem einfachen Kreisprozesse der vorliegenden Art **aufgewandte** Arbeit F oder, wenn der Prozess in umgekehrter Folge stattfand, die **gewonnene** Arbeit steht in direktem Verhältniss zu der zugeführten und der während des Prozesses abgeführten Wärmemenge und ist überdies der Differenz der Werthe S_1 und S proportional.« *)

Fig. 9.



Die soeben entwickelten Gleichungen lassen sich leicht in allgemeinerer Form darstellen. Denken wir uns die drei adia-

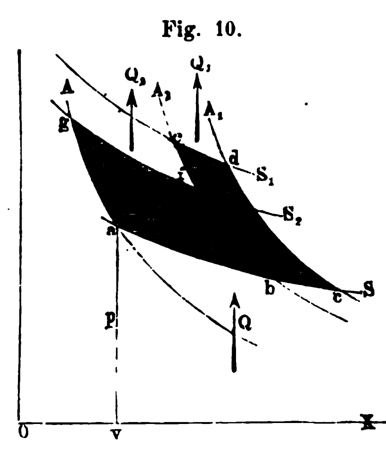
*) Wollten wir schon hier die Temperatur in die Rechnungen einführen und die Hypothese aufstellen, dass S nichts andres als die Temperatur oder eine Funktion derselben sei, so würde dieser Satz mit dem Carnot'schen Grundsatze den wir auf S. 55 anführten, übereinstimmen. Dann würden auch die Gleichungen (29) und (30) des Textes der Form und Bedeutung nach mit Gleichungen identisch, die zuerst von Rankine und Thomson gegeben wurden.

batischen Linien A, A_1, A_2 (Fig. 10) und die drei Curven S, S_1, S_2, welche der Bedingung

$$S = f(p, v) = \text{Const.}$$

entsprechen, mit dem Unterschiede, dass eben die Constante S in jedem Falle einen besondern Werth hat; nehmen wir ferner einen Körper im Zustande a, durch den Druck p und das Volumen v gegeben an, so lässt sich Wärmezuleitung und Wärmeableitung so geregelt denken, dass der Endpunkt der Ordinate p den Umfang der schraffirten Fläche F in der Richtung $abcdefga$ durchläuft. Nach dem früher Angegebenen ist dann auf dem Wege ac eine gewisse Wärmemenge Q zuzuführen, während auf den Wegen de und fg beziehungsweise die Wärmemengen Q_1 und Q_2 abzuführen sind. Der Ueberschuss der Summen der Werthe Q_1 und Q_2 über dem Werthe Q ist nun auch hier, da der Körper sich am Ende wieder im Anfangszustande befindet, gleich der Wärmemenge AF, welche der durch die schraffirte Fläche repräsentirten Arbeit F entspricht. Es ist sonach:

Fig. 10.



$$AF = Q_1 + Q_2 - Q. \tag{31}$$

Die Wärmemenge Q lässt sich aber aus zwei Theilen Q' und Q'' bestehend annehmen und zwar sei Q' der Theil der Wärmemenge, welcher der Strecke ab, und Q'' der Theil, welcher der Strecke bc entspricht; nach Gl. (28) folgt aber entsprechend der Figur 10:

$$\frac{Q'}{S} = \frac{Q_2}{S_2},$$

$$\frac{Q''}{S} = \frac{Q_1}{S_1},$$

und hieraus folgt durch Addition, wenn man die Beziehung $Q' + Q'' = Q$ beachtet:

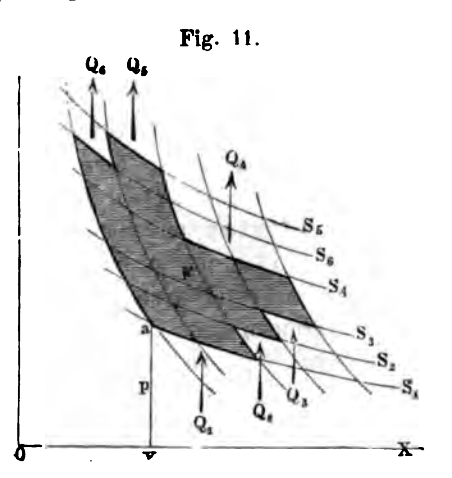
$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2}$$

oder:

$$0 = \frac{Q_1}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2} - \frac{Q}{S}. \quad (32)$$

Die beiden Gleichungen (31) und (32) gelten nun für den zusammengesetzten Kreisprozess, wie Figur 10 einen solchen darstellt; auf gleiche Weise, wie es hier dargelegt wurde, lässt sich aber auch der komplizirtere Kreisprozess verfolgen, wie er durch Figur 11 dargestellt ist. Auf gleiche Weise wie vorhin, folgt für die durch Figur 11 dargestellte Aufgabe:

Fig. 11.



$$AF = Q_4 + Q_5 + Q_6 - Q_1 - Q_2 - Q_3$$

und

$$0 = \frac{Q_4}{S_4} + \frac{Q_5}{S_5} + \frac{Q_6}{S_6} - \frac{Q_1}{S_1} - \frac{Q_2}{S_2} - \frac{Q_3}{S_3},$$

welche beiden Gleichungen sich, wenn man das Summenzeichen Σ einführt, einfach schreiben:

$$AF = \Sigma\,(Q), \quad (33)$$

$$0 = \Sigma\left(\frac{Q}{S}\right)^{*}). \quad (34)$$

Die beiden Gleichungen kann man auch in der Form:

---

*) Die Gl. (34) und ebenso die weiter unten im Text folgende Gl. (37) hat zuerst Clausius aufgestellt, aber nicht in der Art, wie es oben geschehen ist. In dessen Abhandlungen wird unter Zugrundelegung des von ihm modifizirten Carnot'schen Satzes (S. 55) der Funktion S von vornherein eine andre, bestimmte Bedeutung untergelegt.

$$F = \Sigma\left(\frac{Q}{A}\right), \tag{35}$$

$$0 = \Sigma\left(\frac{Q}{AS}\right) \tag{36}$$

aufführen, indem man beide durch A, dem Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit dividirt. In dieser zuletzt angegebenen Form werden wir sie unten zu verwerthen suchen.

Das sind denn nun die allgemeinen Gleichungen, die für jeden umkehrbaren Kreisprozess gültig sind. Denken wir uns die zugeführten Wärmemengen mit den positiven, die abgeleiteten mit den negativen Zeichen versehen, so ist nach Gl. (33) die in Wärme ausgedrückte aufgewandte oder gewonnene Arbeit F gleich der algebraischen Summe aller einzelnen Wärmemengen. Ist die Summe negativ, so wurde die Arbeit F verbraucht und in Wärme verwandelt; ist die Summe positiv, so wurde die Arbeit F durch den Kreisprozess gewonnen, also Wärme in Arbeit verwandelt.

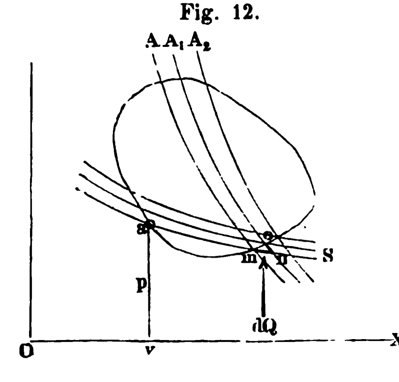
Die Gl. (34) spricht fernerhin aus, dass bei einem umkehrbaren Kreisprozess die algebraische Summe der einzelnen Wärmemengen, jede einzelne dividirt durch den Werth S, entsprechend der Curve

$$S = f(p, v) = \text{Const.},$$

auf welcher diese Wärmemenge zugeführt wurde, der Null gleich ist.

Man sieht leicht ein, dass der vorstehende Satz selbst im allgemeinsten Falle noch gültig ist, nämlich selbst dann, wenn die Fläche F von einer geschlossenen Curve, wie in Fig. 12, begrenzt ist. Man denke sich die Fläche durch unendlich viele, unendlich nahe bei einander liegende adiabatische Linien $A, A_1, A_2 \ldots$ durchzogen, ebenso durch unendlich viele Curven S; so kann man sich die Strecke mn des Umfanges der Fläche in die Curven S fallend denken

Fig. 12.



und sich die Curve als ein Vieleck mit unendlich vielen vorspringenden Ecken *mno* überhaupt von der Gestalt Figur 11 vorstellen. Ist Q die Wärmemenge, die auf der Strecke *mn* zuzuführen ist, so gelten die Gln. (33) und (34) offenbar auch hier. Da Q unendlich klein ist, also mit dQ bezeichnet werden kann, so giebt übrigens noch Gl. (34), wenn das Summenzeichen durch das Integralzeichen ersetzt wird:

$$\int \frac{dQ}{S} = 0, \tag{37}$$

eine Gleichung, die aber vermöge ihrer Entstehung nur für den vollständigen Kreisprozess gilt, d. h. wenn die Integration über den ganzen Umfang der geschlossenen Curve ausgeführt wird.

Die letzte Gleichung enthält übrigens für uns keinen neuen Satz, da wir bei der Ableitung der zweiten Hauptgleichung auf S. 41 in der Gl. (13)

$$\frac{dQ}{AS} = \frac{X}{S}\, dp + \frac{Y}{S}\, dv$$

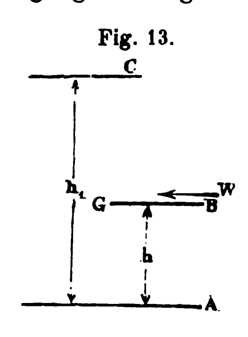
die Funktion S gerade so gewählt haben, dass der Ausdruck rechts ein vollständiges Differential ist. Würden wir daher diese Gleichung integriren und die Grenzen gleich annehmen, d. h. voraussetzen, dass die Werthe p und v am Ende die gleichen, wie im Anfange sind, so würde der Werth des Integrals Null, und das ist eben das, was Gl. (37) ausspricht.

Erläuterung der Sätze über den Kreisprozess durch analoge, bekannte Sätze der Mechanik.

Den Formeln, welche wir für den einfachen und zusammengesetzten Kreisprozess entwickelt haben, lässt sich eine sehr einfache Deutung geben, durch die das Verständniss der weitern Schlüsse ausserordentlich erleichtert wird. So einfach die ganzen Betrachtungen unstreitig sind, welchen die Formeln ihre Entstehung verdanken, so hat doch das Verfolgen des ganzen Gedankenganges beim ersten Studium seine Schwierigkeiten; auch

die Formeln, auf die man schliesslich kommt, erscheinen trotz ihrer einfachen Gestalt fremdartig; im Grunde sind es aber, wie ich zeigen will, Formeln, auf die man bei einer der einfachsten Betrachtungen der Mechanik stösst. Zunächst sollen diejenigen Gleichungen (29) und (30) näher erläutert werden, die sich bei Betrachtung des einfachen Kreisprozesses unter Zugrundelegung von Figur 10 ergeben haben.

Fig. 13.



Man denke sich drei Horizontalebenen A, B, C über einander liegend (Fig. 13). Die Ebene B liegt um h und die Ebene C um h_1 über der untersten Ebene A, in welcher also der Nullpunkt liegt, von dem aus wir die Abstände h und h_1 messen.

Auf der Ebene B liege ein Körper vom Gewicht G; würde man dieses Gewicht langsam, gleichförmig herab in's unterste Niveau A sinken lassen, so würde eine Arbeit gewonnen werden, die bekanntlich

$$Gh$$

beträgt: es mag diese Arbeit mit W bezeichnet werden, also sei:

$$W = Gh. \tag{38}$$

Man kann hiernach sagen, im Gewichte G stehe uns auf der Höhe h eine Arbeit W zur Disposition; und wenn das Gewicht G im Niveau B herbeigeschoben wurde, es sei uns eine Arbeit W geliefert, zugeführt worden.

Heben wir jetzt das Gewicht G langsam und gleichförmig in das Niveau C, so ist eine gewisse Arbeit aufzuwenden, die mit F bezeichnet werden mag und die sich leicht bestimmt: sie ist:

$$F = G\,(h_1 - h). \tag{39}$$

Die Arbeit, die uns jetzt im Gewicht G auf der Höhe h_1 zu Gebote steht und die W_1 heissen mag, ist einfach

$$W_1 = Gh_1. \tag{40}$$

Bestimmt man G aus Gl. (38) und (40), so findet sich

$$G = \frac{W}{h} = \frac{W_1}{h_1} \tag{41}$$

und die Substitution in Gl. (39) giebt:

oder

$$\left.\begin{array}{l} F = W_1 - W \\ F = \frac{W}{h}(h_1 - h) \\ F = \frac{W_1}{h_1}(h_1 - h) \end{array}\right\} \quad (42)$$

Wird sonach im Niveau B in dem Gewichte G eine Arbeit W geliefert, dann das Gewicht in's Niveau C gehoben und dort die Arbeit W_1, die jetzt im Gewichte enthalten ist, abgeliefert, so ist damit ein Arbeitsaufwand verbunden, der durch die Gln. (42) bestimmt wird. Wir haben also Arbeit aus einem tiefern in ein höheres Niveau übertragen, übergeführt und diese Ueberführung entspricht einer zu verrichtenden Arbeit, die nach den letzten Gleichungen bei gleichen Höhen der Differenz $W_1 - W$, sowie den einzelnen Werthen W und W_1 selbst, sowie der Höhendifferenz proportional ist. Der ganze Versuch kann aber auch umgekehrt werden. Wird im Niveau C ein Gewicht G, also mit ihm die Arbeit W_1 geliefert, sinkt dann das Gewicht langsam arbeitsverrichtend ins untere Niveau B und wird es dort mit der jetzt in ihm enthaltenen Arbeit W wieder abgeliefert, so ist mit dieser Arbeitsübertragung aus einem höhern in ein tieferes Niveau ein Arbeitsgewinn verbunden, der sich aber gleichfalls nach den Gln. (42) bestimmt.

Vergleichen wir vorstehende Formeln mit den Gln. (28), (29) und (30) S. 61, die sich für den einfachen Kreisprozess herausstellten, so zeigen sie sich im Baue vollkommen gleich.

Es ergab sich dort zunächst die Beziehung:

$$\frac{Q}{AS} = \frac{Q_1}{AS_1}$$

und dann die gewonnene oder aufgewandte Arbeit:

$$F = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q}{A}$$

oder

$$F = \frac{Q}{AS}(S_1 - S)$$

oder

$$F = \frac{Q_1}{AS_1} (S_1 - S).$$

Die Werthe Q und Q_1 stellten Wärmemengen in Wärmeeinheiten gemessen dar; da sie hier durch A dividirt erscheinen, so sind nach vorstehenden Formeln diese Wärmemengen in Arbeitseinheiten gemessen und die Quotienten $\frac{Q}{A}$ und $\frac{Q_1}{A_1}$ sind sonach identisch mit den Arbeitsmengen, die vorhin mit W und W_1 bezeichnet wurden.

Der weitere Vergleich führt daher zu dem interessanten Resultate, da wir die Funktion S als eine Länge, als eine Höhe auffassen können und dass der Ausdruck

$$\frac{Q}{A\,S}$$

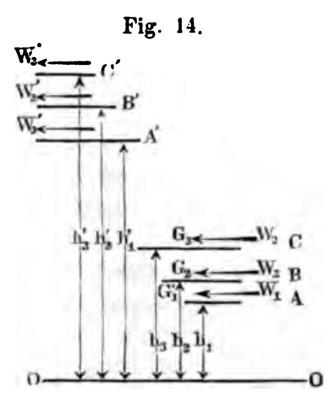
als ein Gewicht angesehen werden kann; ich werde daher auch in der Folge den vorstehenden Werth das Wärmegewicht nennen. Der einfache Kreisprozess lässt sich nun in eigenthümlicher Weise darlegen.

Die Wärmezuleitung auf dem Wege ab (Fig. 9. S. 61) bei constantem Werthe von S lässt sich auffassen, wie ein Herbeischieben eines Gewichtes $\frac{Q}{A\,S}$ im Niveau S, und die Wärmeableitung auf dem Wege cd wie ein Wegnehmen, ein Abliefern des gleichen Gewichtes im Niveau S_1 und endlich stellt F die Arbeit dar, die nothwendig ist, das Gewicht $\frac{Q}{A\,S} = \frac{Q_1}{AS_1}$ aus einem Niveau S in das höher gelegene Niveau S_1 langsam und gleichförmig zu heben. Wird der Kreisprozess umgekehrt ausgeführt, so wird im höher gelegenen Niveau S_1 das Wärmegewicht $\frac{Q_1}{AS_1}$, also die Arbeit $\frac{Q_1}{A}$ geliefert, dann sinkt dieses Gewicht arbeitsverrichtend langsam herab in's tiefer gelegene Niveau S und dort ist das Gewicht und die in demselben enthaltene Arbeit $\frac{Q}{A}$ abzuliefern.

Eine ebenso einfache Deutung lässt sich nun auch dem zusammengesetzten Kreisprozess, wie er oben auf S. 63 unter Zugrundelegung von Fig. 11 betrachtet wurde, geben.

Nehmen wir an, auf den Horizontalebenen A, B, C Fig. 14, die um h_1, h_2, h_3 über der Ebene OO liegen, werden die Gewichte G_1, G_2, G_3 herbeigeführt, so stehen uns in denselben die Arbeiten $W_1 = G_1\, h_1$; $W_2 = G_2\, h_2$; $W_3 = G_3\, h_3$ zur Disposition, d. h. man würde diese Arbeiten gewinnen können, wenn diese Gewichte arbeitsverrichtend langsam in das unterste Niveau OO herabsinken würden. Hebt man nun die gegebenen Gewichte langsam in die höher gelegenen Horizontalebenen A' B' C', die beziehungsweise um h'_1, h'_2, h'_3 über OO liegen, so ist die Arbeit

Fig. 14.



$$F = G_1\,(h'_1 - h_1) + G_2\,(h'_2 - h_2) + G_3\,(h'_3 - h_3)$$

zu verrichten und schliesslich stehen uns auf diesen Höhen die Arbeiten:

$$W'_1 = G_1 h'_1\,,\quad W'_2 = G_2 h'_2 \text{ und } W'_3 = G_3 h'_3$$

zur Disposition oder gehen verloren, wenn dort die gehobenen Gewichte wieder abzuliefern sind. Setzt man die Werthe von W_1 W'_1 W_2 u. s. w. in die Gleichung für F ein, so folgt

$$F = W'_1 - W_1 + W'_2 - W_2 + W'_3 - W_3$$

oder in einfacher Schreibweise

$$F = \Sigma\,(W). \tag{43}$$

Die aufzuwendende Arbeit oder (wenn die Gewichte umgekehrt aus den höher gelegenen nach den tiefer gelegenen Horizontalebenen arbeitsverrichtend langsam herabgelassen wurden), die gewonnene Arbeit F stellt sich sonach als die algebraische Summe der gelieferten und abzugebenden Arbeitsgrössen heraus. Bei dem soeben betrachteten Prozesse ist nun aber die Summe der Gewichte, die in den Ebenen $A\,B\,C$ zur Disposition gestellt wurden nach vorstehenden Gleichungen:

$$G_1 + G_2 + G_3 = \frac{W_1}{h_1} + \frac{W_2}{h_2} + \frac{W_3}{h_3}.$$

Nach der Hebung waren dieselben Gewichte wieder abzuliefern und zwar ist ihre Summe auch:

$$G_1 + G_2 + G_3 = \frac{W'_1}{h'_1} + \frac{W'_2}{h'_2} + \frac{W'_3}{h'_3}.$$

Versieht man die gelieferten Gewichte mit dem positiven, und die abgelieferten Gewichte mit dem negativen Zeichen, so ist hiernach, da die Summen beider gleich sind, die algebraische Summe aller Gewichte gleich Null und es ergiebt sich aus der Vereinigung vorstehender Gleichungen allgemein:

$$0 = \Sigma\left(\frac{W}{h}\right) \tag{44}$$

Der Vergleich dieser Formeln (43) und (44) mit den Gln. (35) und (36), die wir oben auf S. 64 für den umkehrbaren, zusammengesetzten Kreisprozess gefunden haben, zeigt wieder vollkommen gleichen Bau der Formeln.

Die Gl. (35)

$$F = \Sigma\left(\frac{Q}{A}\right)$$

spricht daher aus, dass die bei einem vollständigen umkehrbaren Kreisprozesse aufgewandte oder gewonnene Arbeit F einfach die algebraische Summe der zugeführten und abgeleiteten Wärmemengen ist, letztere jedoch in Arbeitseinheiten gemessen. Die andere Gl. (36) nämlich:

$$0 = \Sigma\left(\frac{Q}{AS}\right)$$

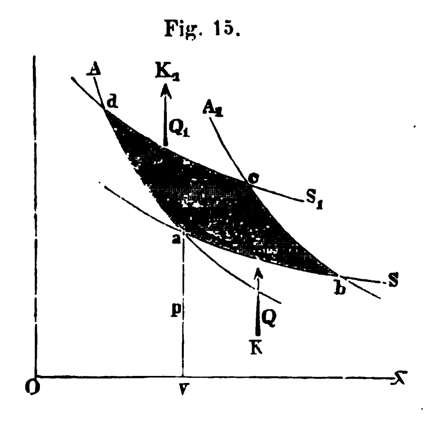
sagt hingegen aus, dass dabei die algebraische Summe der Wärmegewichte gleich Null ist, mit andern Worten, dass im ganzen Umfang des Prozesses die Summe der gelieferten, gleich der Summe der abgegebenen Wärmegewichte ist.

Hypothese über die Bedeutung der Funktion S und Umformung der Hauptgleichungen.

Die Sätze über den Kreisprozess im Verein mit den Erklärungen, die vorhin über derartige Prozesse gegeben wurden, führen nun leicht auf die wahrscheinlichste Bedeutung der Funktion S.

Kehren wir nochmals zur Betrachtung des einfachen Kreisprozesses zurück. Wir denken uns, dass die Zuführung der Wärmemenge Q auf dem Wege ab (Fig. 15) bei constantem Werthe S dadurch erfolge, dass wir den vermittelnden Körper mit einem Körper K in Berührung setzen, der diese Wärmemenge liefert, der aber gleichzeitig die Eigenschaft besitzt, durch Berührung mit dem vermittelnden Körper den Werth $S = f\,(p, v)$ constant zu erhalten; der Körper K soll also die Ursache sein, weshalb die Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v genau nach der Curve ab erfolge; ebenso soll auf dem Wege cd der vermittelnde Körper mit einem Körper K_1 in Berührung erhalten werden, der die Wärmemenge Q_1 aufnimmt und durch den gleichzeitig bewerkstelligt wird, dass die Aenderungen im Zustande des vermittelnden Körpers genau nach dem Gesetze $S_1 = f\,(p, v) =$ Const. erfolgen. Ob solche Körper mit den angenommenen Eigenschaften wirklich existiren oder nicht, bleibe vorläufig dahingestellt; die so eben gemachte Annahme ändert nichts an der Allgemeinheit unserer Betrachtungen.

Fig. 15.



Wird nun jetzt der Kreisprozess so vollführt, dass der Endpunkt der Ordinate p den Umfang der Fläche F in der Richtung des Pfeiles beschreibt, so wird, wenn man die obigen Sätze zur Erklärung des hier stattfindenden Vorganges benutzt, vom Körper K auf dem Wege ab das Wärmegewicht $\frac{Q}{AS}$ geliefert und vom Körper K_1 auf dem Wege cd das Wärmegewicht $\frac{Q_1}{AS_1}$ aufgenommen. Bezeichnen wir dieses Gewicht mit G und berücksichtigen wir die Gl. (28) nach welcher hier das gelieferte und abgelieferte Wärmegewicht sich als gleich herausstellt, so erscheint hier der Kreisprozess als eine Uebertragung des Wärmegewichtes G von einem Körper K des Zustandes S auf einen andern K_1 vom

Zustande S_1. Die zu dieser Uebertragung erforderliche Arbeit F ist nach dem oben Gegebenen

$$F = G (S_1 - S)$$

und die Uebertragung erscheint wie ein langsames gleichförmiges Heben eines Gewichtes G auf die Höhe $S_1 - S$.

Wird der Prozess umgekehrt ausgeführt, so wird das Wärmegewicht G vom Körper K_1 auf den Körper K übertragen, die gewonnene Arbeit F ist ebenfalls nach vorstehender Formel zu beurtheilen. Der Vorgang lässt sich dann so erklären, dass man sagt, das Wärmegewicht G sei langsam und gleichförmig, arbeitsverrichtend um die Höhe $S_1 - S$ herabgesunken. Die Ueberführung eines gewissen Wärmegewichtes von einem Körper auf einen andern durch einen umkehrbaren Kreisprozess ist also zu vergleichen mit dem Heben oder Sinken eines Körpers vom Gewichte G aus einem Niveau in ein anderes, aber mit einem langsamen und gleichförmigen Heben oder allgemeiner ausgesprochen, man hat sich vorzustellen, dass der Körper in demselben Bewegungszustande (mit derselben Geschwindigkeit) im zweiten Niveau anlangt, in welchem er das erste verliess. Denken wir uns einen Körper vom Gewichte G anfangs in einem bestimmten Niveau in Ruhe und nehmen wir an, dass er auch mit unendlich kleiner Geschwindigkeit im zweiten Niveau anlangt, so ist die beim Sinken des Gewichtes gewonnene Arbeit ein Maximum und die zum Heben erforderliche Arbeit ein Minimum, denn würde der Körper im zweiten Niveau mit einer gewissen endlichen Geschwindigkeit anlangen, so ist die beim Sinken gewonnene Arbeit kleiner und die beim Heben aufgewandte Arbeit grösser als sie sich nach der Formel (39)

$$F = G (h_1 - h)$$

herausstellt. Es ist überhaupt unmöglich, ein Gewicht G aus einem tiefern in ein höher gelegenes Niveau ohne Arbeitsaufwand zu heben, wenn das Gewicht im untern Niveau sich in Ruhe befindet. Die aufzuwendende Arbeit ist mindestens so gross, wie sie sich durch vorstehende Formel ergiebt.

Umgekehrt kann aber auch ein Körper aus einem höher gelegenen Niveau, wo er sich in Ruhe befindet, in das tiefer gelegene auf verschiedene Weise arbeitsverrichtend herabsinken; das Maximum der gewonnenen Arbeit stellt sich heraus, wenn

der Körper im zweiten Niveau mit der Geschwindigkeit Null anlangt, in jedem andern Falle ist diese Arbeit geringer und könnte selbst negativ sein.

Ein besonderer Fall, den wir hier vor Allem in's Auge zu fassen haben, ist der, dass der Körper frei, ohne einen Widerstand zu überwinden aus einem Niveau in's andere herabfällt, dann ist die gewonnene Arbeit Null und die ganze Arbeit $W_1 = Gh_1$ (Gl. 40, S. 66) die im höher gelegenen Niveau im Körper enthalten ist, findet sich dann auch in ihm im zweiten, tiefer gelegenen wieder vor, ein Theil davon, und zwar der, welcher der Fallhöhe $h_1 - h$ entspricht, in Form von lebendiger Kraft.

Ueberträgt man nun diese Sätze auf den einfachen Kreisprozess, so lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Geht bei einem einfachen Kreisprozess (Fig. 15, S. 71) das Wärmegewicht $G = \frac{Q}{AS} = \frac{Q_1}{AS_1}$ von einem Körper K_1 vom Zustande S_1 auf einen zweiten Körper K vom Zustande S über, so wird die Arbeit $F = G(S_1 - S)$ gewonnen und diese Arbeit ist ein Maximum.

2. Der Uebergang des Wärmegewichtes vom Körper K_1 auf den Körper K kann auch ohne Gewinn von Arbeit erfolgen, dieser Uebergang lässt sich dann ansehen, wie ein freies Herabfallen des Wärmegewichtes G durch die Höhe $S_1 - S$.

3. Das Wärmegewicht G kann umgekehrt nie von selbst vom Körper K zum Körper K_1 übergehen; vielmehr ist mit einem solchen Uebergange jederzeit ein Aufwand von Arbeit verbunden und zwar ist das Minimum dieser Arbeit: $F = G(S_1 - S)$.

Es tritt nun die Frage heran, ob diese Sätze durch die Erfahrung ganz oder wenigstens theilweise bestätigt werden, und ob sich nun auf die wahre Bedeutung der Funktion S schliessen lässt.

Die Frage ist zu bejahen; am häufigsten beobachten wir den freien Uebergang von Wärme von einem Körper K_1 auf einen andern K, den Uebergang ohne Arbeitsgewinn. Dieser Uebergang ist unter dem Namen Wärmeleitung bekannt; beide Körper, zwischen denen ein solcher Uebergang stattfindet, wirken jederzeit verschieden auf unsere Thermometer ein und man sagt dann, dass derjenige Körper, welcher die Wärme liefert, eine höhere Temperatur habe, als derjenige, welcher die Wärme empfängt. Die Wärmeleitung lässt sich sonach auch auf-

fassen, wie das Herabfallen eines Wärmegewichtes von höherer zu niederer Temperatur.

Niemals haben wir aber bis jetzt beobachtet, dass die Wärme von selbst aus einem Körper von niederer Temperatur zu einem von höherer Temperatur übergeht; mit einem solchen Uebergange ist, wenn wir ihn beobachten, immer ein Arbeitsaufwand verbunden.

Weiter zeigt aber auch die Erfahrung, dass wir Arbeit gewinnen können, wenn der Uebergang der Wärme aus einem Körper von höherer Temperatur nach einem von niederer Temperatur nicht direkt, sondern durch Vermittlung eines dritten Körpers erfolgt. Die Dampfmaschinen und Luftexpansionsmaschinen sind Apparate, durch welche wir einen Uebergang von Wärme solcher Art bewerkstelligen; die Feuergase im Feuerraume bilden den Körper, welcher die Wärme liefert; das Kühlwasser ist derjenige Körper, welcher Wärme empfängt, das Kesselwasser (bei calorischen Maschinen die atmosphärische Luft) ist der vermittelnde Körper.

Alles was wir unter der allgemeinen Annahme hinsichtlich der Eigenschaften der Funktion S vorhin in den drei Sätzen ausgesprochen haben, wird also durch die Erfahrung bestätigt, wenn wir die Funktion S einfach durch die Temperatur ersetzen.

Wir sind daher berechtigt, den weitern Untersuchungen die Hypothese zu Grunde zu legen:

»dass die Funktion S das wahre Temperaturmaass darstellt«,

und mit dieser Hypothese ist dann, wenn alle weiteren auf ihr ruhenden Schlüsse in Uebereinstimmung mit den Erfahrungen stehen, durch die mathematisch scharf gestellte Definition der Funktion S zugleich eine klare Definition des Temperaturmaasses gegeben.

Die Zustandsänderung eines Körpers bei constantem Werthe S, wie sie bei Vorführung der Kreisprozesse angenommen wurde, erscheint jetzt als eine Zustandsänderung des Körpers unter der Voraussetzung, dass sich zwar Druck und Volumen, nicht aber seine Temperatur ändert: die Curve $S = f(p, v) = \text{Const.}$ stellt nun diejenige Curve dar, welche der Zustandsänderung dieser Art entspricht.

Ein Körper K vom Zustande S, von dem wir vorhin beim

einfachen Kreisprozess gesprochen haben, erscheint jetzt als ein Körper von bestimmter Temperatur.*)

Die Temperatureinheit kann man beliebig wählen; wir nehmen hierzu die Angaben des Centesimalluftthermometers, indem wir die Temperaturdifferenz des unter atmosphärischem Drucke schmelzenden Eises und des bei 760^{mm} Quecksilbersäule siedenden

---

*) Zunächst dürfte man allerdings nur schliessen, dass S eine Funktion der Temperatur ist, nicht dass S zugleich als Temperaturmaass selbst, im gewöhnlichen Sinne, anzusehen ist. Die Annahme, dass S eine Funktion der Temperatur sei, hat, im Grunde genommen, zuerst Clapeyron gemacht; die Funktion C seiner Abhandlung, die er als eine Temperaturfunktion hinstellt und die früher unter dem Namen der »Carnot'schen Funktion« in die Wärmelehre aufgenommen wurde, unterscheidet sich von der Funktion S des Textes nur durch einen constanten Faktor.

Bestimmter hat sich später Clausius über diese Fragen ausgesprochen, indem er in seinen Abhandlungen zuerst den Grundsatz aufstellte: »dass es unmöglich sei, ohne Aufwand von Arbeit Wärme aus einem Körper von niederer, zu einem andern von höherer Temperatur überzuführen«, den Satz, den wir schon oben im Text angeführt haben. Mit Hülfe dieses Satzes beweist dann Clausius ebenfalls, dass die Carnot'sche Funktion nur eine Funktion der Temperatur sein könne. Den Werth dieser Funktion für einzelne Temperaturwerthe giebt schon Clapeyron, aber später wurde von Helmholtz (Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. S. 36) auch die Form dieser Temperaturfunktion erkannt, als derselbe die Clapeyron'sche Gleichung (unsere zweite Hauptgleichung) mit einer Formel verglich, die von Holtzmann (Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim 1845) freilich unter Annahmen entwickelt wurde, die heute nicht mehr als in jeder Beziehung zulässig erscheinen. Aus den später folgenden Arbeiten von Clausius ging dann hervor, dass die von Helmholtz gegebene Form der Carnot'schen Funktion wirklich die wahrscheinlichste ist.

Wenn ich im Text gleich von vorn herein über die Form der Funktion S eine bestimmte Annahme mache, nämlich die Hypothese voranstelle, dass S die Temperatur selbst sein müsse, so geschieht das im Wesentlichen deshalb, um schon hier in den allgemeinen Betrachtungen eine bestimmte Definition des Temperaturmaasses zu gewinnen und weil dadurch der Einblick in die folgenden Betrachtungen ganz wesentlich erleichtert wird.

Die Grösse der Wahrscheinlichkeit der Hypothese wird freilich erst durch die Untersuchungen der folgenden Abschnitte hervortreten; es darf jedoch hier schon bemerkt werden, dass alle Beobachtungen für die Richtigkeit der Annahme sprechen, dass keine Beobachtung existirt, die dagegen spricht.

Hervorzuheben ist noch, dass übrigens schon Thomson (Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1854) die obige Definition des Temperaturmaasses auf Grund der Betrachtungen über Kreisprozesse gegeben hat. (S. auch Jochmann. Beiträge zur Theorie der Gase. 1859.)

Wassers gleich 100 setzen. Die Temperatur nach der Scala von Celsius gemessen, also vom Gefrierpunkt des Wassers abgerechnet, bezeichnen wir, wie gebräuchlich mit t.

Wenn nun die obige Hypothese ausspricht, S stelle ebenfalls ein Temperaturmaass dar, so darf man doch nicht ohne Weiteres S mit t identisch annehmen, denn die Wahl des Gefrierpunktes des Wassers als Nullpunkt der Thermometerscala ist willkürlich; käme in allen Formeln die Differenz $S_1 - S$ vor, so könnten wir allerdings auf Grund der Hypothese dafür den Werth $t_1 - t$ substituiren. Da nun aber S nicht allein in dieser Verbindung in den früheren Gleichungen auftritt, so müssen wir setzen:

$$S = a + t \tag{45}$$

wobei a eine constante Grösse ist, auf deren Werth wir erst später durch Anwendung der allgemeinen Formeln auf spezielle Fälle gelangen werden.

Stellt sich a verschieden von Null heraus, so deutet das auf einen neuen Nullpunkt hin, für den Fall, dass wir die Temperatur durch S messen. Unsere Hypothese führt uns also dann auf einen von der Natur selbst fest vorgeschriebenen Nullpunkt der Thermometerscala.

Die späteren Untersuchungen über das Verhalten der Gasarten werden uns für a den Werth 273 liefern; der Nullpunkt, von dem aus durch die Grösse S die Temperatur in Centesimalscala zu messen ist, liegt also 273° unter dem Gefrierpunkte. Diesen Punkt der Scala nennt man den absoluten Nullpunkt und die Temperatur von diesem Punkte aus gemessen, die absolute Temperatur; sie findet sich also einfach, wenn man zur Temperatur t nach Celsius gemessen, den Werth 273 addirt.

Vorläufig betrachten wir die Constante a noch als unermittelt, können nun aber unsere Fundamentalgleichungen I^a, II^a, III^a S. 40 u. f. dadurch in andere Gestalt bringen, dass wir S durch die Temperatur t ersetzen. Da wir vermöge unserer Hypothese haben:

$$S = a + t = f(p, v)$$

so findet sich:

$$\left(\frac{dS}{dp}\right) = \left(\frac{dt}{dp}\right) \text{ und } \left(\frac{dS}{dv}\right) = \left(\frac{dt}{dv}\right)$$

rch Substitution in die angegebenen Gleichungen stellen n die Hauptformeln in einer Gestalt dar, wie folgt:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1. \qquad \text{I.}$$

$$a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right) \qquad \text{II.}$$

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A\,.\,[Xdp + Ydv] \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,[Xdt + (a+t)\,dv] \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}\,[Ydt - (a+t)\,dp] \end{aligned}\right\} \qquad \text{III.}$$

In dieser Form sollen die Gleichungen in den folgenden chnitten verwerthet werden; für solche Körper, bei denen die Beziehung zwischen Temperatur, Druck und Volumen nt, und das ist bei Gasen und Dämpfen der Fall, handelt es schliesslich nur noch um Bestimmung der Werthe von X Y als Funktionen von p und v; und diese Bestimmung untert wenigstens für die genannten Körper keinen Schwierigkeiten, unten im 2. und 3. Abschnitt gezeigt werden soll.

Von den unvollständigen umkehrbaren Kreisprozessen.

lus den Untersuchungen über die Kreisprozesse geht hervor, zwei Arten von Curven eine wichtige Rolle in der Wärmespielen. Die eine Curve, deren Gleichung durch Integraer Gleichung:

$$Xdp + Ydv = 0$$

rgiebt, wie schon auf S. 38 hervorgehoben wurde, nannten ch **Rankine** die adiabatische Curve; dieselbe giebt an,

nach welchem Gesetze sich bei einem Körper der Druck p mit dem Volumen v ändert, wenn die Zustandsänderungen des Körpers ohne Wärmemittheilung und ohne Wärmeentziehung erfolgen.

Die andre Curve war diejenige, deren Gleichung wir in folgender Art darstellten:

$$S = f(p, v) = \text{Const.}$$

Unter Annahme der oben gegebenen Hypothese über die Bedeutung von S giebt diese Gleichung die Aenderungen von Druck und Volumen, wenn die Temperatur t des Körpers während der Zustandsänderungen constant gehalten wird. Wir werden in Zukunft, ebenfalls nach Rankine, diese Curve die isothermische Curve nennen.

Zu diesen beiden Curvenarten gesellt sich nun noch eine dritte Art, deren Einführung das Mittel an die Hand giebt, die Zustandsänderungen eines Körpers, wie sie aus Wärmemittheilung hervorgehen, recht übersichtlich graphisch darzustellen. Es ist nämlich diejenige Curve, nach welcher sich Druck und Volumen ändert, wenn die innere Arbeit U constant erhalten wird. Wir werden diese Curve nach Cazin die isodynamische Curve nennen, ihre Gleichung würde sich durch Integration der Gleichung:

$$X dp + (Y - p) dv = 0$$

finden, wie schon auf S. 38 bemerkt wurde.

Nehmen wir an, dass für den der Veränderung unterworfenen Körper, die Gleichungen der drei genannten Curven bekannt seien und denken wir uns, ein Körper sei durch Zuleitung der Wärmemenge Q aus einem Zustande auf bestimmt vorgeschriebenem Wege ab Fig. 16 in einen andern Zustand übergeführt worden, so wird nach den oben entwickelten Ansichten die innere Arbeit aus einem gewissen Werthe U im Zustande a in einen andern Werth U_1 im Zustande b übergegangen, und überdies die äussere Arbeit L verrichtet worden sein. Man hat nach Gl. (2) S. 26

$$\frac{Q}{A} = (U_1 - U) + L, \tag{46}$$

wobei $\frac{Q}{A}$ die in Arbeitseinheiten gemessene Wärmemenge Q darstellt. Die äussere Arbeit L wird dabei durch den Flächenraum

$a b v_2 v_1$ (Fig. 16) dargestellt. Legt man nun durch den Punkt a die adiabatische Curve $a A$, so giebt diese die Druckänderungen an, wenn Wärme weder zu noch abgeleitet wird, man hätte dann nach Gl. (46)

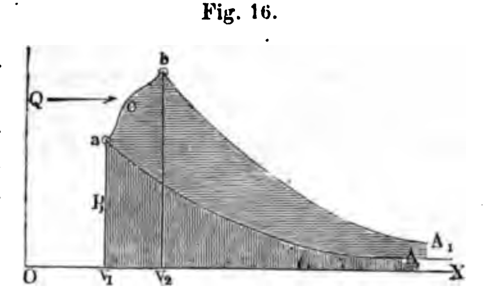
$$L = U - U_1,$$

und wenn die Ausdehnung so weit fortgesetzt würde, dass schliesslich die innere Arbeit $U_1 = 0$ wäre, so würde folgen:

$$L = U.$$

Macht man nach Rankine die sehr wahrscheinliche Annahme, dass die adiabatischen Curven sich sämmtlich asymptotisch der Abscissenaxe $O X$ nähern, so ergiebt sich, weil L für diesen Fall der Zustandsänderungen durch die Fläche $a A X v_1$ dargestellt wird, dass diese Fläche (in der Fig. 16 vertical schraffirt) die innere Arbeit U des Körpers im Zustande a, der dem Volumen $O v_1 = v_1$ und dem Drucke $v_1 a = p_1$ entspricht, repräsentirt.

Fig. 16.



Ebenso würde die Fläche $b A_1 X v_2$ die innere Arbeit U_1 für den Anfangszustand b darstellen. Angenommen nun, der Körper sei auf der Curve $a c b$ aus dem Zustand a in den Zustand b übergeführt worden, so findet sich die erforderliche Wärmemenge Q in Arbeitseinheiten gemessen durch Gl. (46), wenn man daselbst statt der Werthe U, U_1, L die angegebenen Flächeninhalte einsetzt.

$$\frac{Q}{A} = \text{Fläche } (b A_1 X v_2) - \text{Fläche } (a A X v_1) + \text{Fläche } (a b v_2 v_1).$$

Der Werth auf der rechten Seite stellt aber nichts anderes als den Inhalt der Fläche $a c b A_1 A$ dar. (In der Figur horizontal schraffirt.) Man erhält daher den Satz, dass derjenige Flächenraum die zuzuführende oder abzuleitende Wärmemenge in Arbeitseinheiten gemessen angiebt, der einestheils von dem Wege $a c b$ der Zustandsänderungen, anderseits von den beiden adiabatischen

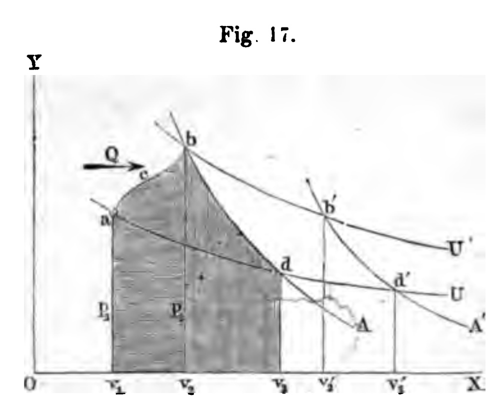
Linien umschlossen wird, die dem Anfangs- und Endzustande entsprechen.

Diese Art der graphischen Darstellung rührt von **Rankine***) her. So einfach die Darstellung ist, so wollen wir sie doch nicht weiter zur Erläuterung der Kreisprozesse verwenden, da sie für wirkliche Messungen von Wärmemengen durch Flächenbestimmung nicht geeignet ist und es sich hier um Ermittelung von Flächen handeln würde, die theilweise von zwei sich asymptotisch nähernden Curven begrenzt werden.

Wir werden daher im Folgenden eine andre Methode der graphischen Darstellung geben, die, so weit es sich um die Bestimmung der zuzuführenden Wärmemenge Q handelt, zuerst von **Cazin****) angegeben wurde.

Es sei wieder (Fig. 17) der Anfangszustand a eines Körpers durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 gegeben und der Körper auf irgend einen durch die Curve acb vorgezeichneten Weg durch Zuführung der Wärmemenge Q in den Zustand b gebracht worden, der durch den Druck p_2 und das Volumen v_2 bestimmt ist. Im Zustand a sei die innere Arbeit U, im Zustand b aber U_1. Wir legen nun durch den Punkt a die isodynamische Curve $a\,U$, welche der Gleichung $U = \text{Const.}$ entspricht und durch den Punkt b die adiabatische Curve bA; beide Curven werden sich in einem Punkte d schneiden.

Fig. 17.



Bei der Zustandsänderung von a auf b wird die äussere Arbeit L verrichtet, die durch die Fläche $a\,b\,v_2\,v_1$ (horizontal schraffirt) angegeben wird; dabei geht die innere Arbeit aus dem Werthe U in den Werth U_1 über und es gilt daher, wie oben die Gleichung:

*) **Rankine**, A Manuel of the steam engine and other prime movers. London und Glasgow, 1859.

) **Cazin, Théorie élémentaire des machines à air chaud. Versailles, 1865.

$$\frac{Q}{A} = U_1 - U + L.$$

Würden wir jetzt den Körper auf der adiabatischen Curve (ohne Zu- und Ableitung von Wärme) bis zum Durchschnittspunkte d der beiden Curven weiter führen, so würde die innere Arbeit wieder vom Werthe U_1 zum Werthe U zurückgehen und eine äussere Arbeit L' verrichtet werden, die durch die Fläche $b\,d\,v_3\,v_2$ dargestellt wird. Für diese Zustandsänderung gilt daher die Gleichung

$$0 = U - U_1 + L',$$

woraus

$$L' = U_1 - U = \text{Fläche } b\,d\,v_3\,v_2.$$

»Während sonach die horizontal schraffirte Fläche $a\,b\,v_2\,v_1$ die äussere Arbeit L darstellt, die während des Ueberganges von a nach b verrichtet wird, giebt die vertical schraffirte Fläche $b\,d\,v_3\,v_2$ die Veränderung $U_1 - U$ der innern Arbeit. Beide Flächen zusammen genommen stellen nach Gl. (46) durch den Werth $\frac{Q}{A}$ die Wärmemenge in Arbeit gemessen dar, die von aussen her dem Körper zuzuführen ist, um ihn vom Zustande a auf dem vorgeschriebenen Wege $a\,c\,b$ in den Zustand b überzuführen.«

Bemerkenswerth ist, dass es unnöthig ist, die adiabatische Linie jederzeit durch den Endpunkt b zu legen; man kann auch durch diesen Punkt die zugehörige isodynamische Curve U_1 und dann irgend eine adiabatische Linie $d'\,A'$ ziehen: die Fläche $b'\,d'\,v'_3\,v'_2$ (Fig. 17) stellt dann ebensowohl die Veränderung $(U_1 - U)$ der innern Arbeit dar, wie die vertical schraffirte Fläche $b\,d\,v_3\,v_2$. Soweit Cazin; man erkennt, dass diese Darstellungsweise vortrefflich geeignet ist, ohne Rechnung, nur durch Flächenbestimmung (mittelst des Planimeters) die äussere Arbeit und die Veränderung der innern Arbeit, sowie die erforderliche Wärmemenge zu ermitteln, wenn der Weg $a\,b$ der Zustandsänderungen graphisch (z. B. durch ein Indicatordiagramm) gegeben ist; freilich setzt diese Methode die Kenntniss des Gesetzes voraus, nach welchem die adiabatische und die isodynamische Linie resp. vom Punkte b und a aus verläuft. Für gewisse Körper werden wir später die Gesetze ermitteln, welchen diese Curven unterworfen sind.

Vorstehender Satz gilt ganz allgemein, er behält also auch seine Richtigkeit, wenn die Curve $a b$ (Fig. 17) eine geschlossene ist, also die beiden Endpunkte a und b schliesslich zusammenfallen; in diesem Falle repräsentirt die von der Curve umschlossene Fläche gleichzeitig die äussere Arbeit und die von aussen während der Zustandsänderungen zugeführte Wärmemenge Q in Arbeit gemessen; die Aenderung der innern Arbeit ist dabei Null. weil der Körper wieder in den Anfangszustand zurückgekehrt ist; wir haben dann einen vollständigen, umkehrbaren Kreisprozess, wie wir ihn oben schon betrachtet haben.

Fig. 18.

Ist hingegen die Curve $a c b d$ (Fig. 18), welche die Zustandsänderungen des Körpers angiebt, nicht geschlossen, so haben wir es mit einem unvollständigen, umkehrbaren Kreisprozess zu thun.

Legen wir, wie vorhin, durch den Anfangspunkt a Figur 18 die isodynamische Curve $a U$ und durch den Endpunkt d die adiabatische Curve $d A$, so stellt hier, wie vorhin, die horizontal schraffirte Fläche die äussere Arbeit, die vertical schraffirte Fläche die Veränderung der innern Arbeit dar, und die beiden Flächen vereinigt repräsentiren den Werth $\Sigma\left(\frac{Q}{A}\right)$ d. h. die algebraische Summe der Wärmemengen, die auf dem Wege $a c b d$ zu- und abzuleiten waren, ausgedrückt in Arbeitseinheiten.

Für einen vollständigen Kreisprozess fand sich aber früher (S. 64) noch eine zweite Gleichung, nämlich:

$$\Sigma\left(\frac{A S}{Q}\right) = 0 \text{ oder } \int \frac{d Q}{A S} = 0,$$

d. h. die zu- und abgelieferten Wärmegewichte stellten sich als gleich heraus; ihre algebraische Summe war Null.

Bei dem vorliegenden unvollständigen Kreisprozess gelten nun aber vorstehende Gleichungen nicht mehr, vielmehr hat hier das Integral, das sich jetzt nur auf den Weg *acbd* bezieht, einen bestimmten positiven Werth P, wir schreiben daher:

$$P = \int \frac{dQ}{AS}. \tag{47}$$

Benutzen wir die frühere Darstellungsweise, so lässt sich sagen, der Werth P giebt den Ueberschuss der Summe der gelieferten über die Summe der abgelieferten Wärmegewichte an.

Wie erwähnt, erstreckt sich das Integral über den Weg *acbd*; wenn wir nun aber die adiabatische Linie dA rückwärts bis zum Durchschnittspunkte c verlängern, so lässt sich das Integral in zwei Theile spalten, der eine Theil entspricht dem Wege ac, der andere dem Wege cbd; der letztere Theil ist nun aber offenbar Null, denn die unbeschriebene Fläche cbd entspricht einem vollständigen Kreisprozesse; hiernach folgt weiter der einfache Satz, dass der Werth P des Integrales (47) nichts Anderes, als die Summe der auf dem Wege ac gelieferten Wärmegewichte darstellt.

Der Werth P lässt sich sehr leicht auf graphischem Wege ermitteln.

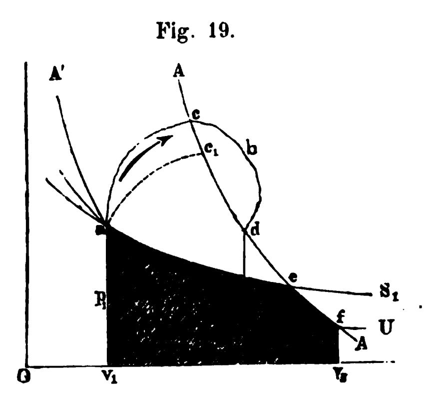


Fig. 19.

Legen wir wieder durch den Anfangspunkt a (Fig. 19) die isodynamische Curve aU und durch den Endpunkt d die adiabatische Curve dA, die sich beide im Punkte f schneiden; nehmen wir ferner an, die Temperatur, die dem Anfangszustand a (p_1, v_1) entspricht, sei t_1, also der zugehörige Werth von S sei

$$S_1 = a + t_1$$

und legen wir durch a noch die isothermische Curve aS_1, deren Gleichung $S_1 = f(p, v) =$ Const. ist, so wird diese Curve die adiabatische Linie im Punkte e schneiden.

Wir wollen nun den Körper von d aus weiter zunächst die Strecke de der adiabatischen Linie (ohne Wärmemittheilung und Wärmeentziehung) zurücklegen lassen und dann auf der isothermischen Curve aS_1 in seinen Anfangszustand zurückführen. Auf dem Wege ea ist ihm dabei eine gewisse Wärmemenge Q_1 zu entziehen.

Da nun die Veränderungen des Körpers auf dem Wege $acdea$ einen vollständigen Kreisprozess bilden, so ergiebt sich die Gleichung

$$P - \frac{Q_1}{AS_1} = 0$$

und daher folgt der Werth des Integrales (47) für den Weg ac

$$P = \frac{Q_1}{AS_1}. \tag{48}$$

Nach dem oben Gegebenen wird jedoch der Werth $\frac{Q_1}{A}$ durch die schraffirte Fläche $aefv_3v_1$ dargestellt, und S_1 repräsentirt die dem Anfangszustande a entsprechende absolute Temperatur $a + t_1$, man hat sonach nur den Inhalt der bezeichneten Fläche durch die absolute Temperatur $a + t_1$ zu dividiren, um den Werth des Integrales (47) d. h. die Summe der auf dem Wege ac zu liefernden Wärmegewichte zu ermitteln oder wie sich auch sagen lässt, um die Summe der Wärmegewichte zu erhalten, die abzuliefern sind, wenn der Körper schliesslich wieder in den Anfangszustand zurückgeführt werden soll.

Uebrigens geht aus dem Gesagten auch hervor, dass es in Betreff des Werthes P gar nicht auf den Weg ankommt, auf welchem der Körper von a nach c geführt wurde; P behält selbst dann noch den gleichen Werth, wenn der Körper von a nach irgend einem andern Punkte c_1 der adiabatischen Linie dA geführt wird.

Aber auch der Ausgangspunkt a braucht nicht der gleiche zu sein; legt man durch a eine zweite adiabatische Linie aA_1, so ist für jeden Uebergang von einer adiabatischen Linie zur andern der Werth P der nämliche; es geht das unmittelbar aus Gl. (48) hervor, wenn man auf die Bedeutung der Gl. (28) S. 60 Rücksicht nimmt. Geht der Körper bei seinen Zustandsänderungen

vom Punkte *a* (Fig. 19) aus, so hat also das Integral P immer den gleichen Werth, wenn der Körper ein- und dieselbe adiabatische Linie durchschreitet.

»Die Funktion P spielt daher in der Wärmelehre eine ähnliche Rolle, wie in der Mechanik die sogenannte Kraftfunktion und die adiabatischen Curven spielen eine ähnliche Rolle, wie dort die Niveauflächen.«

Es steht unbenommen, die Funktion P als eine Kraftfunktion aufzufassen, ich ziehe jedoch vor, diesen Werth P als eine Kraft, nach Befinden, wie es bei den vollständigen Kreisprozessen erläutert wurde, als ein Gewicht darzustellen, weil nämlich dadurch, wie sich später zeigen wird, eine Reihe von Untersuchungen, die für die Technik von Wichtigkeit sind, übersichtlicher sich darlegen lassen.

Von den nicht umkehrbaren Kreisprozessen.

Bei allen bisherigen Untersuchungen haben wir vorausgesetzt, dass während der Zustandsänderungen, welchen ein Körper unterworfen wird, der äussere Druck jederzeit mit dem Körperdruck im Gleichgewicht stehe oder richtiger, dass beide Drücke nur unendlich wenig von einander verschieden seien. In diesem Falle ist der äussere Druck als eine Eigenschaft des Körpers selbst anzusehen, die Wärmemenge, die von aussen zuzuführen war, ist in jedem Momente der Zustandsänderungen durch den bereits zurückgelegten Weg vollständig bestimmt und der Prozess ist umkehrbar, d. h. der Körper kehrt auf dem gleichen Wege in den Anfangszustand zurück, wenn die Wärmeentziehung und die Druckänderung nach dem gleichen Gesetz rückwärts erfolgt.

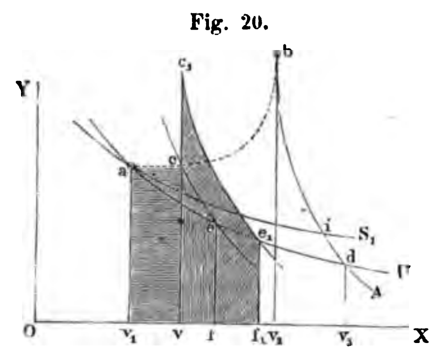
Anders sind aber die Verhältnisse, wenn die Gleichheit des äussern und des Körperdruckes während der Zustandsänderungen nicht mehr besteht, ein Fall, auf den schon oben bei Darlegung der Sätze über die äussere Arbeit hingewiesen wurde; dann treten im Körper, gewöhnlich äusserlich wahrnehmbare, Bewegungen auf, deren lebendige Kraft schliesslich, wenn am Ende

des Ueberganges der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten ist, als Vermehrung der innern Arbeit erscheint. Die Sätze über die graphische Darstellung der Vorgänge, wie sie eben bei Betrachtung der unvollständigen aber umkehrbaren Kreisprozesse angegeben wurden, müssen dann erweitert werden, in einer Weise, wie das hier noch dargelegt werden soll.

Wir nehmen an, ein Körper sei aus dem Anfangszustand a in den Endzustand b (Fig. 20) übergegangen, und die Curve acb stelle das Gesetz der Aenderungen des äussern Druckes während des Ueberganges dar. Die Curve acb ist in der Figur punktirt, um dadurch ausdrücklich anzudeuten, dass sie allein nur die Aenderungen des äussern Druckes angiebt. Denken wir uns nun, dass am Ende der Zustandsänderungen, also im Zustande b der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten sei, also der äussere Druck wieder dem Körperdrucke gleich ist, so repräsentirt hier, wie das schon bei Betrachtung der Fig. 17, S. 80 dargelegt wurde, die Fläche abv_2v_1 die äussere Arbeit und die Fläche bdv_3v_2 die Zunahme der innern Arbeit; beide Flächen zusammen genommen geben die während des Ueberganges zugeführte Wärmemenge Q in Arbeit gemessen. Soweit stimmt der vorliegende Fall vollständig mit dem in Fig. 17 dargestellten überein; im Uebrigen besteht aber ein wesentlicher Unterschied.

Wählen wir irgend einen zwischen den Endpunkten a und b liegenden Punkt c der Druckcurve; zeichnen wir die Ordinate cv dieses Punktes und legen wir durch diesen Punkt die zugehörige adiabatische Curve ce, welche die durch den Anfangspunkt a gehende isodynamische Curve in e schneidet, so giebt auch hier wieder die Fläche $acvv_1$ die äussere Arbeit, welche während des Ueberganges von a nach c verrichtet wurde. Die Sätze über Bestimmung der Zunahme der innern Arbeit und Bestimmung der zugeführten Wärmemenge gelten aber hier nicht mehr. Wären die Zustandsänderungen auf dem Wege ac umkehrbar, d. h. hätte der Körper auf dem Wege ac fortwährend einen seinem

Fig. 20.



eignen Drucke entsprechenden Widerstand überwunden, so würde allerdings die Fläche $cefv$ die Zunahme der innern Arbeit repräsentiren und die beiden Flächen $acvv_1$ und $cefv$ zusammen genommen würden die zugeführte Wärme, in Arbeit gemessen, darstellen; in diesem Falle giebt allein der Verlauf der Curvenstrecke ac über alle Fragen Aufschluss.

Ist aber, wie wir es hier voraussetzen, die genannte Bedingung nicht erfüllt, bestand also auf dem Wege ac keine Gleichheit zwischen Körperdruck und äusserm Widerstand, sondern war, wie das allein der Fall sein kann, der äussere Druck kleiner, so giebt uns die Curvenstrecke ac nur Aufschluss über den Werth der äussern Arbeit bei der Ausdehnung des Körpers von v_1 auf v, nicht aber über die Zunahme der innern Arbeit und in Folge dessen auch nicht über die Wärmemenge, die auf dem Wege ac zu- oder abgeführt wurde. Die Fläche $cefv$, welche, wenn der Prozess umkehrbar ist, die Zunahme der innern Arbeit giebt, verliert hier ihre bisherige Bedeutung.

Bezeichnen wir den äussern Druck im Zustande c mit p, setzen wir also (Fig. 20) $cv = p$, ist ferner v das Volumen im Zustande c, sowie p_1 und v_1 Druck und Volumen im Anfange, so ist die Veränderung der innern Arbeit auf dem Wege ac nicht mehr durch den Anfangszustand (p_1, v_1) und Endzustand (p, v) allein bestimmt, wie das bei allen bis jetzt angestellten Untersuchungen vorausgesetzt wurde, sondern der Werth:

$$dU = \left(\frac{dU}{dp}\right) dp + \left(\frac{dU}{dv}\right) dv$$

erscheint als ein unvollständiges Differential; wenn wir also auch in der Fundamentalgleichung der mechanischen Wärmetheorie

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$

das Glied pdv integriren können, vorausgesetzt das Gesetz der Aenderung des äussern Druckes p, die Curve ac sei gegeben, so ist das doch nicht mit dem Gliede dU der Fall, die Aufgabe bleibt also eine unbestimmte, so lange nicht ausser der Angabe über den Verlauf der Curve acb noch eine weitere Angabe über den ganzen Verlauf der Vorgänge vorliegt.

Diese weitere Angabe bezieht sich gewöhnlich auf das Gesetz, nach welchem die Wärmezuführung von aussen her erfolgt.

Denken wir uns, der Körper sei auf dem Wege ab der Zustandsänderungen bis c gelangt, das Volumen von v_1 auf v gewachsen, und stellen wir uns vor, von diesem Momente an werde plötzlich eine weitere Ausdehnung verhindert, indem wir den äussern Druck in gleichem Maasse vergrössern, wie der Körperdruck wächst, und ebenso werde die Wärmezuführung abgebrochen, so wird nach und nach der Druck $vc = p$ in den Werth vc_1 übergehen, welch' letzterer Werth dem Gleichgewichtszustande entsprechen soll.

Legen wir durch den Punkt c_1 die adiabatische Linie $c_1 e_1$ bis zum Durchschnitt e_1 mit der isodynamischen Linie aU, so stellt nun offenbar die Fläche $vcc_1e_1f_1$ (die Summe der vertical und schräg schraffirten Fläche Fig. 20) die Zunahme der innern Arbeit auf dem Wege ac dar; die horizontal schraffirte Fläche v_1acv ist die äussere Arbeit und die Summe aller schraffirten Flächen giebt die auf dem Wege ac von der Wärmequelle gelieferte Wärmemenge in Arbeit gemessen.

Wäre die Letztere gegeben, so liesse sich also für jeden Moment des Ueberganges des Körpers von a nach b neben der äussern Arbeit auch die Zunahme der innern Arbeit ermitteln. Ebenso wäre auch der ganze Vorgang zu übersehen, wenn der Weg gegeben wäre, auf welchem der Punkt c_1 von a nach b sich bewegt.

Im Vergleich mit dem früher Gegebenen erkennt man jetzt deutlich aus der Figur, unter welchen Verhältnissen der Prozess umkehrbar ist oder nicht; im ersteren Falle liegen nämlich die Punkte c_1 in der Druckcurve, im andern Falle nicht.

Die ganze Zunahme der innern Arbeit findet sich, wie erwähnt. durch die Fläche $vcc_1e_1f_1$; diese Fläche lässt sich aber in zwei Theile zerlegen; der vertical schraffirte Theil $vcef$ repräsentirt die Zunahme der innern Arbeit unter der Voraussetzung, dass der Körper auf dem Wege ac einen seinem Drucke gleichen Widerstand überwunden hat; der zweite Theil $cc_1e_1f_1fe$ (schräg schraffirt) ist derjenige, welcher als innere Arbeit hervortritt, wenn die Zustandsänderungen im Zustande c plötzlich unterbrochen werden, diese Arbeit ist es wahrscheinlich, welche der lebendigen Kraft der

äussern Bewegung der Bestandtheile entspricht, wie sie aus der Störung des Gleichgewichtszustandes hervorgeht. Ein Beispiel mag diese Darstellung näher erläutern. Denkt man sich in einem Cylinder durch einen beweglichen Kolben eine gewisse Quantität Gas abgesperrt; das Gas, welches nur einen Theil des Cylinders ausfüllen soll (der Kolben mag etwa in der Mitte der Cylinderhöhe stehen), wird dann gegen den Kolben, den wir uns festgehalten denken, einen gewissen Druck ausüben. Sobald wir nun gegen den Kolben von aussen her einen Druck entgegensetzen, der geringer als der Gasdruck ist und den Kolben frei lassen, so wird derselbe mit Heftigkeit zurückgetrieben. Führt man, um den Fall ganz allgemein zu halten, dem Gase während des Zurückweichens des Kolbens auch noch Wärme von aussen zu und hält man den Kolben, den wir uns als gewichtslos denken wollen, plötzlich fest, so befindet sich in diesem Momente das Gas genau in dem Zustande, wie wir ihn bei Betrachtung der Fig. 20 als den Zustand c bezeichnet haben. Die Gastheilchen werden sich in heftiger wirbelnder Bewegung befinden und erst nach und nach zur Ruhe übergehen: dann erst im neuen Gleichgewichtszustande ist die Veränderung der innern Arbeit durch den Druck und Volumen des Gases messbar; der Druck wird dabei aus dem Werthe vc in den Werth vc_1 (Fig. 20) übergehen. Wäre bei diesem Versuche dem Gase von aussen her keine Wärme zugeführt worden, und hätte auch keine Wärmeentziehung stattgefunden, so würde schliesslich im neuen Gleichgewichtszustand die innere Arbeit genau um den Betrag der äussern Arbeit kleiner, als anfangs sein. Wäre dabei endlich auch noch die äussere Arbeit Null, was der Fall sein würde, wenn sich vor dem Kolben ein luftleerer Raum befunden hätte, so würde die innere Arbeit des Gases schliesslich wieder die anfängliche sein, was sich in Fig. 20 dadurch anzeigt, dass der Punkt c_1 in die isodynamische Linie aU fällt.

Kehren wir wieder zum allgemeinen Fall zurück, und setzen wir voraus, dass der Körper den ganzen Weg acb durchlaufen habe, und dass am Ende im Zustande b der Gleichgewichtszustand eingetreten sei, so ergiebt, wie schon hervorgehoben wurde, die ganze Fläche, welche von der Druckcurve acb und der adiabatischen Linie bd, so wie von den Ordinaten av_1 und dv_3 begrenzt wird, die ganze Wärmemenge in Arbeit gemessen an, die während

der Zustandsänderungen dem Körper mitgetheilt wurde; »der Körper kann aber hier nicht wieder auf dem gleichen Wege in den Anfangszustand zurückgeführt werden, vorausgesetzt die Wärmeentziehung sollte nach dem gleichen Gesetze umgekehrt, wie auf dem Hinwege die Wärmemittheilung erfolgen.«

Während der Ausdehnung wird, wenn der Körper eben nicht den vollen seinem Drucke entsprechenden Widerstand überwindet, im Anfange ein Theil der zugeführten Wärme und im Allgemeinen auch ein Theil der innern Arbeit zur Erzeugung von Bewegung der Bestandtheile des Körpers verwendet, die nicht mit der eigentlichen Wärmebewegung, Molekularbewegung, zu verwechseln ist, die sich aber in letztere umwandelt und als Vermehrung der innern Arbeit schliesslich erscheint. Ein Zurückführen des Körpers in den Anfangszustand ist aber nur auf einem Wege möglich, der auch hinwärts zurückgelegt werden kann.

Legen wir durch den Anfangspunkt a (Fig. 20) die isothermische Linie aS_1, welche die adiabatische Linie bA im Punkte i schneidet, so lässt sich die Zurückführung des Körpers in den Anfangszustand beispielsweise auf folgende Weise bewerkstelligen. Wir führen den Körper auf der adiabatischen Linie von b nach i (ohne Wärmemittheilung und Wärmeentziehung) und dann auf der isothermischen Linie von i nach a; auf der letztern Strecke ist eine Wärmemenge Q_1 abzuleiten, die in Arbeit ausgedrückt durch die Fläche $aidv_3v_1$ angegeben wird, wie das oben bei Betrachtung der unvollständigen Kreisprozesse gezeigt wurde. Nennen wir nun Q die Wärmemenge, die auf dem nicht rückkehrbaren Wege acb zugeleitet wurde, so findet sich die äussere Arbeit F, welche bei diesem Kreisprozesse gewonnen wurde:

$$F = \frac{Q - Q_1}{A},$$

da die Fläche $acbia$ diese Arbeit darstellt. Der vorliegende einfache Kreisprozess ist ein nicht umkehrbarer, denn es kommt in ihm eine Wegstrecke acb vor, die der Körper nicht unter den gleichen Verhältnissen rückwärts zurücklegen kann, unter welchen er sie auf dem Hinwege durchschritt. Nichtsdestoweniger ist vorstehende Formel die gleiche, die wir auch für den umkehrbaren Kreisprozess gefunden haben, und es ist leicht zu übersehen, dass nun die Formel

$$F = \Sigma\left(\frac{Q}{A}\right) \qquad (49)$$

die wir für den zusammengesetzten umkehrbaren Kreisprozess gewonnen haben, auch für den zusammengesetzten, nicht umkehrbaren Kreisprozess gilt, unter Letzterem einen solchen verstanden, bei welchem der Körper bis zu seiner Rückkehr in den Anfangszustand eine beliebige Reihe von Curvenstrecken zurücklegt, die nur theilweise auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden könnten.

Es tritt aber nun die Frage heran, ob auch die zweite Formel:

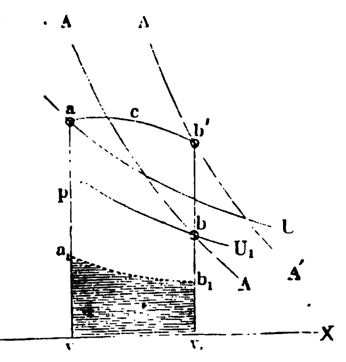
$$0 = \Sigma\left(\frac{Q}{AS}\right)$$

die sich für den umkehrbaren Kreisprozess herausgestellt hat (S. 64) hier ihre Gültigkeit behält. Wir haben früher bei Betrachtung der unvollständigen Kreisprozesse gezeigt, dass das Integral

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

immer den gleichen Werth behält, wenn der Körper aus einem gewissen Anfangszustand auf irgend einem Wege, aber umkehrbarem Wege, nach irgend einem Punkte einer gewissen adiabatischen Linie sich bewegt.

Fig. 21.



Wir wollen nun zunächst zeigen, dass der Werth des vorstehenden Integrales jederzeit ein kleinerer ist, wenn dieser Uebergang auf nicht umkehrbarem Wege erfolgt.

Es sei a (p, v) der Anfangszustand eines Körpers (Fig. 21), der sich von Ov auf Ov_1 ausdehnen und dabei einen äussern Druck überwinden soll, dessen Veränderlichkeit durch die Curve $a_1 b_1$ gegeben sein mag; die horizontal schraffirte Fläche giebt die während der Ausdehnung von v auf v_1 verrichtete äussere Arbeit

an. Es mag nun zunächst angenommen werden, dass während dieser Ausdehnung dem Körper weder Wärme mitgetheilt noch entzogen werde. Hat der Körper das Volumen v_1 erreicht, so wird nun der Druck aus dem Werthe $v_1 b_1$ in den Werth $v_1 b$ übergehen und bei diesem Drucke der Gleichgewichtszustand eingetreten sein. Bezeichnet U die innere Arbeit im Anfangszustande a und U_1 die innere Arbeit im Endzustande b, so ist die äussere Arbeit L, welche durch die schraffirte Fläche angegeben wird

$$L = U - U_1.$$

weil der Voraussetzung gemäss Wärmemittheilung und Wärmeentziehung nicht stattfand.

Legen wir nun durch den Punkt b die adiabatische Linie AbA, so hat also hier ein Uebergang des Körpers vom Anfangszustande a aus nach einem Punkte b der adiabatischen Linie AbA stattgefunden; für diesen Uebergang ist aber, weil keine Wärmemittheilung stattfand, offenbar der Werth des Integrales P gleich Null. Hätte man hingegen unter sonst gleichen Umständen während des Ueberganges noch die Wärmemenge Q zugeführt, so wäre der Körper am Ende in den Zustand b' (Fig. 21) übergegangen, welchem die adiabatische Linie $A'b'A'$ entspricht: dann hat allerdings für den Uebergang des Körpers aus der einen adiabatischen Linie AA in die andere $A'A'$ das Integral

$$\int \frac{dQ}{AS}$$

einen bestimmten Werth, »derselbe ist aber offenbar kleiner, als er sein würde, wenn der Körper von a aus auf umkehrbarem Wege in den Zustand b' übergegangen wäre.«

Es findet sich sonach allgemein folgendes Gesetz: »Geht ein Körper aus einem Zustand in einen andern über, so hat das Integral:

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

d. h. die Summe der gelieferten Wärmegewichte für jede Art des Ueberganges immer den gleichen Werth, vorausgesetzt, der Uebergang geschehe auf umkehrbarem Wege, ist die letztere Bedingung nicht erfüllt, so ist der Werth P

für jeden Uebergang ein anderer, aber immer ein kleinerer.«

Führen wir den Körper aus dem Zustande b' auf dem Wege $b'ca$ in den Anfangszustand, so ist, weil diese Zurückführung nur auf umkehrbarem Wege möglich ist, die Summe $\int \frac{dQ}{AS}$ der abzuliefernden Wärmegewichte wieder P; für die Hinführung in den Zustand b' war aber die Summe der zu liefernden Wärmegewichte kleiner, daher stellt sich für diesen nicht umkehrbaren Kreisprozess die algebraische Summe aller Wärmegewichte negativ heraus; bezeichnen wir diese Summe mit N, so findet sich für den nicht umkehrbaren Kreisprozess die Gleichung:

$$\int \frac{dQ}{AS} = -N \tag{50}$$

während für den umkehrbaren Prozess (S. 65) die Gleichung

$$\int \frac{dQ}{AS} = 0$$

erschien.

Der zuletzt gegebene Satz findet sich zuerst bei Clausius*), wenn auch in ganz anderer Art entwickelt.

Fig. 22.

Die Vorgänge bei einem umkehrbaren Kreisprozesse haben wir oben S. 66 mit dem langsamen gleichförmigen Heben und Senken von Gewichten verglichen. Aehnlich lassen sich auch die Vorgänge bei einem nicht umkehrbaren Kreisprozess verfolgen, was wir in der Kürze noch andeuten wollen.

Wir denken uns (Fig. 22) auf den Höhen $h_1 h_2 h_3 \ldots$ stehen uns die Gewichte $G_1\ G_2\ G_3$, also die Arbeiten

$$W_1 = G_1 h_1;\ W_2 = G_2 h_2;\ W_3 = G_3 h_3 \tag{51}$$

zu Gebote; lassen wir nun diese Gewichte arbeitsverrich-

*) Clausius, Abhandlungen. No. IV, V und VI.

tend in die tiefer gelegenen Horizontalebenen $h'_1 h'_2 h'_3$ herabsinken: setzen wir aber dabei voraus, dass der von den sinkenden Gewichten zu überwindende Widerstand kleiner als die Gewichte sei, so werden dieselben in den Horizontalebenen $h'_1 h'_2 h'_3$ mit den Geschwindigkeiten $w_1 w_2 w_3$ anlangen und die Arbeiten, die nun daselbst abzuliefern wären, werden sein:

$$W'_1 = G_1\left(h'_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right); \qquad W'_2 = G_2\left(h'_2 + \frac{w_2^2}{2g}\right);$$

$$W'_3 = G_3\left(h'_3 + \frac{w_3^2}{2g}\right);$$

oder wenn wir die einzelnen Geschwindigkeitshöhen mit $x_1 x_2 x_3$ bezeichnen:

$$W'_1 = G_1(h'_1 + x_1); \; W'_2 = G_2(h'_2 + x_2); \; W'_3 = G_3(h'_3 + x_3). \quad (52)$$

Hiernach folgt zunächst die gewonnene Arbeit

$$F = W_1 + W_2 + W_3 - W'_1 - W'_2 - W'_3$$

oder

$$F = \Sigma(W)$$

identisch mit Gl. (49).

Was hingegen den Summenausdruck

$$\Sigma\left(\frac{W}{h}\right) = \frac{W_1}{h_1} + \frac{W_2}{h_2} + \frac{W_3}{h_3} - \frac{W'_1}{h'_1} - \frac{W'_2}{h'_2} - \frac{W'_3}{h'_3}$$

betrifft, so bestimmt sich dieser mit Hülfe der Gln. (51) und (52) in folgender Art. Aus (52) folgt

$$\frac{W'_1}{h'_1} = G_1\left(1 + \frac{x_1}{h'_1}\right)$$

$$\frac{W'_2}{h'_2} = G_2\left(1 + \frac{x_2}{h'_2}\right)$$

$$\frac{W'_3}{h'_3} = G_3\left(1 + \frac{x_3}{h'_3}\right)$$

Substituirt man hier die Werthe von G_1, G_2, G_3, wie sie sich aus Gl. (51) ergeben, so folgt im Weitern:

$$\frac{W_1}{h_1} - \frac{W'_1}{h'_1} = - G_1 \frac{x_1}{h'_1}$$

$$\frac{W_2}{h_2} - \frac{W'_2}{h'_2} = - G_2 \frac{x_2}{h'_2}$$

u. s. w.:

und hieraus durch Addition und unter Benutzung der bisher angewandten Bezeichnung:

$$\Sigma\left(\frac{W}{h}\right) = - \Sigma\left(\frac{Gx}{h'}\right)$$

und diese Gleichung ist identisch mit Gl. (50), wenn wir die Summe auf der rechten Seite mit N bezeichnen. Für den Fall, dass die Gewichte im untern Niveau mit der Geschwindigkeit Null anlangen, ist natürlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ... und daher

$$\Sigma\left(\frac{W}{h}\right) = 0,$$

wie sich für den umkehrbaren Kreisprozess fand.

Diese Darstellung gewährt sonach einen recht klaren Einblick in die Vorgänge bei den Kreisprozessen; bei den nicht umkehrbaren Kreisprozessen gewinnen wir, wenn dabei Wärme aus einer Wärmequelle von höherer Temperatur zu einer von niederer Temperatur übergeht, nicht den vollen Werth, nicht das Maximum der Arbeit; man lässt vergleichungsweise ein Gewicht nicht um die ganze gegebene Fallhöhe herabsinken, sondern liefert es in einem höher gelegenen Niveau ab.

Aehnlich verhält es sich mit dem umgekehrten Falle. Wenn bei einem nicht umkehrbaren Kreisprozesse Wärme von einem Körper von niederer zu einem von höherer Temperatur übergeführt wird, wird nicht das Minimum der Arbeit aufgewandt. Wir heben gewissermassen ein Gewicht aus einem tiefer gelegenen in ein höher gelegenes Niveau, aber nicht gleichförmig, sondern mit zunehmender Geschwindigkeit.

Auf die hier behandelten Fragen werden wir unten ausführlich zurückkommen, die hier aufgestellten Sätze noch auf

andre Art nachweisen und zugleich eine neue Gleichung für den Werth N des Integrales der Gl. (50) aufstellen. Es bietet sich unten besser Gelegenheit den Sinn und Gebrauch der hier schon erwähnten Sätze an speziellen Fällen (in ihrer Anwendung auf Gase und Dämpfe) zu erläutern.

ZWEITER ABSCHNITT.

Untersuchungen über das Verhalten

der

permanenten Gase.

Das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac.

Unter einem »permanenten Gase« versteht man im Gegensatz zu den Dämpfen ein Gas, das man bis jetzt durch kein Mittel in den flüssigen oder festen Zustand überführen konnte; während die Dämpfe Gasarten sind, die (gewöhnlich durch Wärmezuführung) aus festen oder flüssigen Körpern entstanden sind und durch geeignete Mittel auch in diesen Zustand wieder zurückgebracht werden können.

Höchst wahrscheinlich giebt es in Wirklichkeit gar kein permanentes Gas; der Umstand, dass wir diejenigen Gase, die wir zu den permanenten zählen, nicht in einen andern Aggregatzustand überzuführen vermögen, liegt wahrscheinlich nur in der Unzulänglichkeit der Mittel, die uns zu derartigem Ueberführen bis jetzt zu Gebote stehen. Dass dem so ist, beweist schon der Umstand, dass einzelne Gase, die früher zu den permanenten Gasen gerechnet wurden, wie z. B. Kohlensäure, sich später als Dämpfe herausstellten.

Nichtsdestoweniger behält man die angegebene Unterscheidung der Luftarten noch bei, und mit einem gewissen Rechte gerade bei Untersuchungen, wie diejenigen sind, mit denen wir es in der vorliegenden Schrift zu thun haben.

Wendet man nämlich die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie zur Untersuchung des Verhaltens der Gase und Dämpfe an, indem man gleichzeitig die Resultate experimenteller Prüfungen berücksichtigt, so ergeben sich für beide Luftarten, wie aus dem Weitern hervorgehen wird, verschiedene Grundformeln. Die eine Art Formeln gilt nur für die permanenten Gase, die andere Classe von Formeln gilt nur für Dämpfe und zwar für Letztere auch nur für den Zustand, in welchem sich die Dämpfe befinden, wenn sie mit der Flüssigkeit, aus der sie

entstanden, in Berührung sind, für die gesättigten Dämpfe. Es ist nun zwar nicht zu zweifeln, dass beide Classen von Formeln ein gemeinsames Band umschliesst, dass sie aus den gleichen Grundformeln abgeleitet werden können; diese Grundformeln sind aber bis jetzt noch nicht bekannt. Die Formeln, auf welche bis jetzt die mechanische Wärmetheorie führte, gelten nur für Grenzzustände. Permanente Gase sind ohne Zweifel Dämpfe, die sehr weit von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, die ausserordentlich beträchtlicher Volumenverminderung und Abkühlung (das gewöhnliche Mittel der Condensation von Dämpfen) bedürfen, um in den flüssigen Zustand übergeführt zu werden, während gesättigte Dämpfe solche Gasarten sind, die eben den Condensationspunkt, denjenigen Zustand erreicht haben, in welchem sie bei der geringsten Volumenänderung und Abkühlung flüssig werden.

Die Gleichungen, die wir nun zunächst für den einen Grenzzustand ableiten werden, gelten streng nur für ein Gas, das sich unendlich weit vom Condensationspunkt entfernt befindet, und ein solches Gas existirt in Wirklichkeit sicher nicht; die folgenden Gleichungen gelten sonach nur für ein ideelles permanentes Gas; es wird dann die weitere Aufgabe sein, zu prüfen, wie weit das eine oder andere der wirklich vorhandenen, sogenannten permanenten Gase sich in seinem Verhalten dem vollkommenen permanenten Gase nähert.

Die genannten Gase sind bis jetzt die einzigen Körper, bei denen die Beziehung zwischen Volumen, Druck und Temperatur bekannt ist und zwar durch das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac.

Man stellt dieses Gesetz gewöhnlich durch folgende Gleichung dar:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \tag{53}$$

wo v und v_0 die Volumina der Gewichtseinheit eines gewissen Gases und p und p_0 die Pressungen desselben bei den Temperaturen t und t_0 (nach Celsius gemessen) darstellen und in welcher Formel ferner α der Ausdehnungscoefficient des Gases ist.

Bezeichnen die Werthe p_0, v_0 und t_0 den Anfangszustand der Gewichtseinheit Gas und stellen wir uns vor, die Anfangstemperatur

t_0 sei 0°, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung leicht folgende Beziehung:

$$\frac{p v - p_0 v_0}{p_0 v_0} = \alpha t. \tag{54}$$

Diese Formel hat Regnault benutzt, um aus seinen Versuchen mit verschiedenen Gasen, für jedes derselben den Ausdehnungscoefficienten α zu bestimmen.

Bei der einen Versuchsreihe wurde das Volumen des Gases constant erhalten, die Erwärmung von 0° auf 100° ausgedehnt und die Druckzunahme von p_0 auf p beobachtet; für diesen Fall ergiebt vorstehende Formel:

$$\alpha = \frac{p - p_0}{100 . p_0}.$$

Bei der andern Versuchsreihe wurde der Druck constant erhalten und die Volumenzunahme bei der Erwärmung von 0° auf 100° beobachtet; für diesen Fall ergiebt Formel (54)

$$\alpha = \frac{v - v_0}{100 . v_0}.$$

Die Untersuchung verschiedener Gase führte nun Regnault keineswegs bei beiden Methoden auf den gleichen Werth des Ausdehnungscoefficienten α; so fand sich z. B.

für	atmosphärische Luft	bei	Druckänderung	$\alpha = 0{,}003665$,
»	»	»	Volumänderung	$\alpha = 0{,}003670$,
»	Wasserstoff	»	Druckänderung	$\alpha = 0{,}003667$,
»	»	»	Volumänderung	$\alpha = 0{,}003661$,
»	Kohlensäure	»	Druckänderung	$\alpha = 0{,}003688$,
»	»	»	Volumänderung	$\alpha = 0{,}003710$.

Die ersten beiden Luftarten betrachten wir als permanente Gase; Kohlensäure rechnen wir zu den Dämpfen.

Die vorstehenden Angaben im Verein mit den Resultaten der Versuche Regnault's bei einer Reihe anderer Gase führen zu dem Resultate, dass der Ausdehnungscoefficient α für permanente Gase sich nach beiden Methoden, wenn auch wenig verschieden, dass aber der Werth α für die eigentlichen Dämpfe sich ungleich aber entschieden grösser, als für permanente Gase herausstellt.

Es zeigten die Versuche im Fernern auch, dass bei Druckänderung (erste Methode) der Coefficient α mit dem Anfangsdrucke p_0 zunimmt und dass eine solche Zunahme sich auch bei Volumenänderung (zweite Methode) ergiebt; der Coefficient ist um so grösser, je grösser der Druck ist, unter welchem die Ausdehnung des Gases bei der Erwärmung unter constantem Drucke erfolgt.

So ergaben z. B. die Versuche bei der Volumenänderung:

	Druck in Millimeter Quecksilbersäule.	α.
Atmosphärische Luft	760	0,0036706
	2525	0,0036944
Wasserstoffgas	760	0,0036613
	2520	0,0036616
Kohlensäure	760	0,0037099
	2545	0,0038455.

Aus diesen Versuchen ist zu schliessen, dass keine Luftart dem Mariotte und Gay-Lussac'schen Gesetze, wie es durch Gl. (53) angegeben ist, vollständig genügt, am wenigsten die Dämpfe; dass aber die Luftarten in ihrem Verhalten hinsichtlich des Ausdehnungsgesetzes einem vollkommen permanenten Gase um so näher zu kommen scheinen, je kleiner der Druck ist, unter welchem die Ausdehnung erfolgt. Setzen wir voraus, dass der wahre Ausdehnungscoefficient eines vollkommenen Gases α sei, dass derselbe dem Drucke proportional wachse und zwar dass er für den kleinern Druck p_1 gleich α_1 und für den grössern Druck p_2 gleich α_2 sei, also die Beziehungen

$$\alpha_1 = \alpha + \beta p_1 \text{ und } \alpha_2 = \alpha + \beta p_2$$

stattfinden, so würde aus der Verbindung beider Formeln sich ergeben:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}{p_2 - p_1}.$$

Benutzt man hier die in der vorstehenden Zusammenstellung der Versuche Regnault's angegebenen Werthe, so ergiebt sich*) für:

*) Mousson. »Die Physik auf Grundlage der Erfahrung«. Zürich 1860. Bd. II. S. 59.

	α	$\frac{1}{\alpha}$
Atmosphärische Luft	0,0036603	273,20
Wasserstoffgas	0,0036612	273,13
Kohlensäure	0,0036522	273,81.

Aus Allem geht hervor, dass das Wasserstoffgas dem vollkommenen Gaszustande **am nächsten** steht und dass wir bis auf Weiteres ohne Bedenken für den reciproken Werth $\frac{1}{\alpha}$ des Ausdehnungscoefficienten eines vollkommenen Gases den Werth 273 einsetzen können, woraus sich

$$\alpha = 0,0036630$$

ergiebt.

Dieser Werth weicht von dem Werthe α, der für atmosphärische Luft gegeben wurde, so wenig ab, dass wir annehmen können, dieses Gas, welches wir später allein unsern Betrachtungen zu Grunde legen werden, verhalte sich ebenfalls, wie ein vollkommenes Gas.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun für die weitern Zwecke die Gl. (53), welche das Mariotte und Gay-Lussac'sche Gesetz ausspricht, nach dem Vorgange von Clapeyron in eine bequemere Form gebracht werden. Dividirt man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit α und setzt man $\frac{1}{\alpha} = 273$, so folgt

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{273 + t}{273 + t_0}$$

und daraus:

$$\frac{pv}{273 + t} = \frac{p_0 v_0}{273 + t_0} \tag{55}$$

Man erkennt hieraus, dass für ein bestimmtes permanentes Gas der Werth

$$\frac{pv}{273 + t}$$

eine constante Grösse ist; bezeichnen wir diese Grösse allgemein zunächst mit R, so schreibt sich die vorstehende Gleichung viel einfacher

$$pv = R\,(273 + t) \tag{56}$$

und in dieser Form, in welcher Form sie zuerst von **Clapeyron** geschrieben wurde, soll sie in der Folge Verwendung finden.

Der Werth v, das Volumen der Gewichtseinheit Gas lässt sich aber auch durch die **Dichtigkeit**, d. h. durch das **Gewicht der Volumeneinheit** (Gewicht von 1 Cubikmeter Gas in Kilogrammen gemessen) ersetzen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit mit γ, so ist nach der Definition:

$$v\gamma = 1$$

und daher auch:

$$\frac{p}{\gamma} = R\,(273 + t). \tag{57}$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass beiden Gleichungen eine besondere Bedeutung untergelegt werden kann. Das Product pv in Gl. (56) repräsentirt eine Arbeitsmenge, nämlich diejenige Arbeit, welche gewonnen wird, wenn die Gewichtseinheit Gas in ein Gefäss (z. B. einen Cylinder) eingeführt wird, in welchem es sich (durch Zurückschieben eines Kolbens) unter Ueberwindung eines äussern constanten Druckes p Raum machen muss. Gl. (56) zeigt, dass diese Arbeit um so grösser ist, je höher die Temperatur ist.

Man kann auch den Werth pv oder $\frac{p}{\gamma}$ als eine Länge auffassen. Der Werth repräsentirt nämlich die Höhe einer Luftsäule, deren Dichtigkeit überall gleich γ ist und die vermöge ihres Gewichtes gegen die Quadrateinheit Basis den Druck p ausübt.

Nehmen wir an Gl. (57) gelte für ein ganz bestimmtes Gas, so wird für ein anderes Gas bei gleichem Drucke p und gleicher Temperatur t die Dichtigkeit γ einen Werth γ_1 und daher auch die Constante R einen andern Werth R_1 haben, und für dieses zweite Gas die Beziehung

$$\frac{p}{\gamma_1} = R_1\,(273 + t)$$

bestehen.

Dividirt man Gl. (57) durch die vorstehende Gleichung, so folgt:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{R}{R_1}$$

Nun ist aber der Quotient $\gamma_1 : \gamma$ das spezifische Gewicht des zweiten Gases in Hinsicht des ersten; bezeichnen wir das spezifische Gewicht mit ε so folgt:

$$R = R_1 \, \varepsilon$$

und daraus schliesst man, dass der Werth $R_1 \, \varepsilon$ für alle permanenten Gase eine constante Grösse ist.

Betrachtet man die atmosphärische Luft als ein vollkommenes Gas und ist R die ihr zukommende Constante, so hätte man für irgend ein anderes Gas die Gleichung

$$pv = \frac{p}{\gamma} = \frac{R}{\varepsilon} (273 + t).$$

Wir werden jedoch im Weiteren die Gleichung in der Form (56) oder (57) benutzen, indem wir uns für jedes der permanenten Gase den Werth R bestimmt denken.

Für atmosphärische Luft fand Regnault den Werth γ bei $t = 0^\circ$ Temperatur und beim mittlern Atmosphärendruck von 760 Millim. Quecksilbersäule d. h. für den Druck $p = 10334$ Kilogramm pro Quadratmeter

$$\gamma = 1{,}29318 \text{ Kilogr.}$$

Die Substitution in Gl. (57) ergiebt dann für atmosphärische Luft

$$R = 29{,}272.$$

Die folgende Zusammenstellung giebt ausserdem noch die Versuchsresultate Regnault's für einige andre und zwar für diejenigen chemisch einfachen Gase*), die wir zu den permanenten Gasen zählen.

	Werthe von γ.	Spez. Gewicht ε in Hinsicht der Luft.	Werthe von R.
Atmosphärische Luft	1,29318	1,00000	29,272
Stickstoff	1,25616	0,97137	30,134
Sauerstoff	1,42980	1,10563	26,475
Wasserstoff	0,08957	0,06926	422,612 (S. Anm.)

*) Für Kohlensäure, die zu den Dämpfen zu zählen ist und für die daher stärkere Abweichungen vom Mariotte und Gay-Lussac'schen Gesetze zu erwarten sind, fand Regnault $\gamma = 1{,}97741$ und $\varepsilon = 1{,}52901$, woraus sich bestimmen würde $R = 19{,}143$.

Anmerkung. Es ist wohl nichts weiter, als ein merkwürdiger Zufall, dass sich, wie obige Zusammenstellung zeigt, der Werth von R für Wasser-

Die Werthe von γ, des Gewichts der Cubikeinheit der vorstehenden Gase, beziehen sich auf Paris. Wegen der Aenderung der Acceleration g des freien Falles stellen sich diese Werthe für andere Orte der Erdoberfläche etwas anders heraus; der Unterschied ist aber so unbedeutend, dass man füglich diese Veränderlichkeit übersehen darf. Da, wie schon oben hervorgehoben wurde, das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac von dem wirklichen Gase nicht genau befolgt wird, so ist der Werth R der Gl. (56) streng genommen keine constante Grösse, sondern muss als eine Funktion von p und v aufgefasst werden, als eine Funktion, die sich allerdings mit p und v ausserordentlich wenig ändert; die Bestrebungen, eine genaue Gleichung aufzustellen, welche das Verhalten der Gase genau darlegt, haben aber bis jetzt noch nicht zu einem bestimmten Ziele geführt und die empirischen Formeln, die zu diesem Zwecke gegeben worden sind*), eignen sich nicht wohl als Grundlage zu weitern theo-

---

stoff, d. h. für dasjenige Gas, welches dem vollkommenen Gaszustande am nächsten steht, fast gleich dem mechanischen Wärmeaequivalent 424 Meterkil. herausstellt. Man könnte leicht durch höchst unbedeutende Aenderung der Regnault'schen Zahlenwerthe die vollkommene Gleichheit herbeiführen; würde man dann noch die spezifischen Gewichte aller Gasarten nicht auf Luft, sondern auf Wasserstoff beziehen (wie es mit den Atomgewichten geschieht), so würden die Formeln, auf die uns im Folgenden die weiteren Untersuchungen der Gasarten noch führen werden, sich ausserordentlich vereinfachen. Wäre für Wasserstoff $R = 424$ und das spez. Gewicht eines andern Gases in Hinsicht des Wasserstoffes ε, so wäre für dieses Gas $R = \frac{424}{\varepsilon}$; nun spielt aber, wie sich zeigen wird, in allen folgenden Formeln das Product AR eine hervorragende Rolle, wobei A das Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit, nämlich $\frac{1}{424}$ ist; es fände sich sonach:

$$AR = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ohne theoretischen Nachweis der Richtigkeit dieser Beziehung wäre aber die Benutzung dieser Relation, trotz ihrer grossen Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten nicht gerechtfertigt.

*) Ueber die Abweichungen der Gase vom Mariotte und Gay-Lussac-schen Gesetze siehe u. A.

Joule und Thomson. On the thermal effects of fluids in motion. Phil. Transactions for 1854.

Jochmann. Beiträge zur Theorie der Gase. Programm des Külnischen Realgymnasii 1859.

retischen Untersuchungen. Da in dieser Schrift wesentlich die Bedürfnisse der Technik im Auge behalten werden sollen, und unter den permanenten Gasen hier vor Allem das Verhalten der atmosphärischen Luft von Interesse ist, so werden wir in der Folge Gl. (56) ohne weitere Correction verwenden. Gerade bei atmosphärischer Luft zeigen sich so unbedeutende Abweichungen, dass wir ohne Bedenken von der angegebenen Formel Gebrauch machen können.

Von der Wärmecapacität der Gase.

Zur Bestimmung der Wärmemenge, die der Gewichtseinheit irgend eines Körpers mitzutheilen ist, um seine Temperatur t um dt zu erhöhen, verglich man bis jetzt in der Physik diese Wärmemenge mit derjenigen, welche erforderlich ist, der Gewichtseinheit Wasser von 0^0 dieselbe Temperaturerhöhung zu ertheilen. Das Verhältniss beider Wärmemengen lieferte dann ein Maass für die Grösse der Empfänglichkeit des Körpers für Wärme im Vergleich zu Wasser. Dieses Verhältniss nennt man die spezifische Wärme oder die Wärmecapacität des Körpers oder noch bestimmter, um anzudeuten, dass man die Wärmeempfänglichkeit gleicher Gewichtsmengen von Körpermasse und Wasser vergleicht, die spezifische Wärme bei gleichem Gewichte oder kurz die Gewichtscapacität.

Das Verhältniss wird ein anderes, wenn man nicht gleiche Gewichte, sondern gleiche Volumina mit einander vergleicht, man nennt dann dieses Verhältniss die spezifische Wärme bei gleichem Volumen oder kurz die Raumcapacität der Körper.

Gewichts- und Raumcapacität stehen übrigens in sehr einfacher Beziehung zu einander. Bezeichnet man die Gewichtscapacität eines Körpers mit c, seine Dichtigkeit (Gewicht von einem Cubikmeter) mit γ_1 und die Dichtigkeit des Wassers mit γ,

---

Reye. Die mechanische Wärmetheorie und das Spannungsgesetz der Gase. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1861.

Schröder van der Kolk. Ueber die Abweichungen der wirklichen Gase vom Mariotte'schen Gesetz. Poggendorff's Annalen 1862.

so ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um γ_1 Kilogr. Körpermasse d. h. 1 Cubikmeter um dt zu erwärmen:

$$c\gamma_1\, dt.$$

Hingegen die Wärmemenge, die γ Kil. Wasser oder 1 Cubikmeter Wasser zu seiner Erwärmung von 0° um dt erfordert

$$\gamma\, dt.$$

Das Verhältniss beider Wärmemengen giebt die Raumcapacität. Bezeichnen wir diese mit ω, so folgt

$$\omega = \frac{\gamma_1}{\gamma} c.$$

Nun ist $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ einfach das spezifische Gewicht des Körpers auf Wasser bezogen, dasselbe mit ε bezeichnet giebt

$$\omega = \varepsilon c. \qquad (58)$$

Die Raumcapacität eines Körpers findet sich also einfach, indem man die Gewichtscapacität mit dem specifischen Gewichte des Körpers multiplicirt.

So ist z. B. für chemisch reines Eisen die Gewichtscapacität $c = 0,1138$; das spezifische Gewicht 7,8439 daher die Raumcapacität $\omega = c\varepsilon = 0,8926$; d. h. ein Kilogr. Eisen erfordert für eine gewisse Temperaturerhöhung das 0,1138-fache der Wärmemenge, welche bei gleicher Temperaturerhöhung von 0° abgerechnet das Wasser verlangt, während 1 Cubikmeter Eisen das 0,8926-fache von einem Cubikmeter Wasser erfordert. Dies die Darlegung in den Lehrbüchern der Physik.

Vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie aus ist aber diese Darlegung eine unrichtige, wenigstens unvollständige. Die Wärmemenge, die einem Körper mitgetheilt wird, ist nicht allein aus der Temperaturerhöhung bestimmbar, sondern man muss noch wissen, welche Aenderungen sonst noch mit dem Körper während der Wärmezuführung vorgenommen wurden. Man setzt überhaupt bei der gewöhnlichen Darstellung über die Bedeutung der Wärmecapacität stillschweigend voraus, dass die Disgregationsarbeit (S. Einleitung) bei allen Körpern die gleiche sei. Gewöhnlich ist mit der Erwärmung eine Ausdehnung der Körper verbunden: stehen dieselben unter einem äussern Drucke,

wird schon in Folge dieser Ausdehnung vom Körper Arbeit
i der Drucküberwindung verrichtet und dieser Arbeit entspricht
ıe gewisse Wärmemenge, welche dabei verschwindet, also nicht
r Temperaturerhöhung beiträgt. Die Wärmecapacität ist daher
ch abhängig von dem äussern Druck, unter welchem der Körper
in Volumen ändert und überdies von dem Gesetze abhängig,
ch welchem sich möglicher Weise während der Ausdehnung
eser Druck ändert. Da diese Druckänderung unendlich mannig-
ltig sein kann, so giebt es auch unendlich verschiedene Werthe
r Wärmecapacität für einen Körper. Die bisherigen Bestim-
ıngen der spezifischen Wärmen der Körper sind aber deshalb
cht werthlos, da man weiss unter welchen Umständen bei den
ersuchen, z. B. denen von Regnault, die Erwärmung der Körper
ıttfand. Die Körper standen nämlich dabei unter dem con-
ınten, atmosphärischen Drucke: man sollte aber bei Aufführung
r Versuchsresultate über die spezifische Wärme der Körper nie
rsäumen, anzuführen, dass die Werthe genau genommen eben
ır für constanten äussern Druck (den atmosphärischen Druck)
lten.

Bei festen und den meisten tropfbar flüssigen Körpern ist
eilich die Ausdehnung eine höchst geringe, also auch die in
rbeit verwandelte Wärme unbedeutend und daher werden auch
ie bei verschiedenen Verhältnissen durch Versuche ermittelten
Värmecapacitäten wenig von einander abweichen, immerhin er-
cheint es an der Zeit, in Werken über Physik diese Verschieden-
ıeit nicht mehr unerwähnt zu lassen.

Bei Körpern, wie bei den Gasen konnte allerdings der an-
gegebene Umstand nicht übersehen werden, weil hier die Volumen-
änderungen bei Erwärmung beträchtlich sind und daher im Allge-
meinen die bei Ausdehnung unter Ueberwindung eines äussern
Druckes in Arbeit verwandelte Wärme der Beobachtung nicht
entgehen konnte. Man hat daher von Anfang an bei Gasen
wenigstens zwei verschiedene Arten von spezifischer Wärme unter-
schieden, bei denen man über das Verhalten des Gases während
der Wärmezuführung eine nähere Angabe macht. Man unter-
scheidet nämlich in der Physik bei Gasen die Wärmecapacität
bei constantem Drucke von der bei constantem Volu-
men, beide bezogen auf ein gleiches Gewicht oder auf ein gleiches
Volumen Wasser.

Spricht man von der Wärmecapacität bei constantem Drucke, so denkt man sich, das Gas dehne sich während der Wärmezuführung unter Ueberwindung eines äussern constanten Druckes aus: während im andern Falle eine solche Ausdehnung nicht erfolgt, sondern das Volumen unverändert erhalten wird. Nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie ist ohne Weiteres klar, dass die spezifische Wärme bei constantem Drucke grösser, als die bei constantem Volumen sein muss, da im erstern Falle bei gleicher Temperaturerhöhung dem Gase eine grössere Wärmemenge mitzutheilen ist, als im letztern Falle, weil in Folge der Ausdehnung unter constantem Drucke Arbeit vom Gase verrichtet wird und sonach ein Theil der zugeführten Wärme verschwindet oder, wie man sagt, in Arbeit verwandelt wird.

Die Gewichtscapacität eines Gases bei constantem Drucke werden wir mit c_p und die bei constantem Volumen mit c_v bezeichnen. Durch Multiplication beider Werthe mit dem spezifischen Gewicht s des Gases in Hinsicht des Wassers findet sich dann die Raumcapacität für constanten Druck und die für constantes Volumen, welche Werthe wir mit ω_p und ω_v bezeichnen wollen.

Die neuesten Versuche über die specifische Wärme der Gase verdanken wir Regnault, doch geben diese Versuche nur die Wärmecapacität bei constantem Drucke, diejenige bei constantem Volumen liess sich bis jetzt direct nicht ermitteln; auf die Werthe derselben ist man auf dem Rechnungswege gelangt, in einer Weise, die unten näher dargelegt werden soll.

Gase.	Gewichtscapacität c_p bei constantem Drucke	Raumcapacität ω_p bezogen auf Wasser.
Atmosphärische Luft	0,23751	0,000 30714
Stickstoff	0,24380	0,000 30625
Sauerstoff	0,21751	0,000 31099
Wasserstoff	3,40900	0,000 30533

Die vorstehende Tafel enthält in der ersten Columne die Versuchsresultate Regnault's*): wir begnügen uns hier, ausser der atmosphärischen Luft nur noch die chemisch einfachen Gase-

*) Regnault. Relation des expériences etc. Tome second. Paris 1862. S. 298 und S. 303.

die wir als permanente kennen, aufzuführen; das unten angeführte Werk von Regnault enthält noch für eine ganze Reihe von zusammengesetzten permanenten Gasen und Dämpfen die Werthe der spezifischen Wärme bei constantem Druck.

Die Werthe der Gewichtscapacität bei constantem Druck zeigen sich nach den angeführten Versuchen für die verschiedenen Gase verschieden, merkwürdig tritt aber dabei in seinem Verhalten der Wasserstoff hervor; die spezifische Wärme desselben hat den grössten Werth, ja sie ist sogar grösser, als bei irgend einem festen oder tropfbar flüssigen Körper; nach dem Wasserstoff kommt das Wasser mit dem Werthe 1; für alle übrigen Körper ist dann aber die spezifische Wärme bei constantem Druck kleiner und zwar meist viel kleiner als 1 gefunden worden.

Ein weiteres, besonders für unsern Zweck höchst wichtiges Resultat war, dass Regnault die spezifische Wärme der Gase, speziell der atmosphärischen Luft für verschiedene Temperaturen und verschiedene Pressungen constant gefunden hat, eine schöne Bestätigung einer Vermuthung, die Clausius schon in seiner ersten Abhandlung (1850) aus theoretischen Gründen aussprach.

Die zweite Columne der obigen Zusammenstellung enthält die Raumcapacität der angegebenen Gase für constanten Druck. Die Werthe wurden nach der oben gegebenen Regel (Gl. 58) einfach gefunden, indem man die spezifische Wärme c_p für constanten Druck mit dem spezifischen Gewichte der einzelnen Gase in Hinsicht des Wassers multiplicirte. (Die spezifischen Gewichte der angegebenen Gase finden sich einfach, wenn man die Werthe von γ in der Zusammenstellung auf S. 105 durch 1000, d. h. durch die Dichtigkeit des Wassers dividirt.)*)

*) Regnault giebt für die Raumcapacität der Gase andre, als die oben angeführten Werthe, indem er nämlich die Gewichtscapacität mit dem spezifischen Gewichte der Gase in Hinsicht der Luft, nicht mit dem in Hinsicht des Wassers, wie es oben geschehen ist, multiplicirte. Seine Zahlenwerthe erhalten dadurch, wie schon Clausius richtig bemerkte (Ueber die spezifische Wärme der Gase. Annalen der Chemie. Bd. 115) eine complicirte Bedeutung und stellen nicht die Raumcapacität der Gase im wahren Sinne dar. Zum Zwecke der Vergleichung der Zahlenwerthe unter sich ist es allerdings gleichgültig, welche Darstellung man wählt; da man aber einmal bei Bestimmungen der

Bei Vergleichung der einzelnen Zahlenwerthe fällt sogleich in die Augen, dass dieselben nur wenig von einander verschieden sind, so wenig, dass man geneigt ist, anzunehmen, die Abweichungen seien vielleicht nur in Beobachtungsfehlern zu suchen. Berechnet man aber die Raumcapacität auch für die andern von Regnault untersuchten Gase und Dämpfe, so ergiebt sich, dass angenäherte Gleichheit nur bei denjenigen Gasen auftritt, die wir als permanente Gase kennen. Man darf daher nur schliessen, dass die Gleichheit genau wohl nur bei vollkommenen Gasen besteht und dieser Schluss wird durch eine Formel unterstützt, auf welche die mechanische Wärmetheorie geführt hat und die wir unten ebenfalls angeben werden.

Was nun im Weitern die spezifische Wärme der Gase bei constantem Volumen betrifft, so wurde oben schon bemerkt, dass eine directe Bestimmung dieses Werthes für verschiedene Gase bis jetzt nicht gelungen ist; wohl aber hat man auf indirectem Wege die spezifische Wärme bei constantem Volumen wenigstens für Luft ermitteln können. Ist c_p die Gewichtscapacität der Luft bei constantem Drucke und c_v die bei constantem Volumen, so lassen sich verschiedene Wege einschlagen, das Verhältniss beider Werthe $\frac{c_p}{c_v}$, welches wir mit $\varkappa$ bezeichnen, zu ermitteln. Auf einige solche Bestimmungen werden wir unten zurückkommen, wenn die Aufgabe vorliegt, die Grundformeln der mechanischen Wärmetheorie, wie sie sich für permanente Gase gestalten, bei Lösung verschiedener Probleme zu verwenden. Die eine der Methoden*), die von Gay-Lussac und Welter, von Clement und Desormes und später von Masson angewandt wurde, ergab resp. $\varkappa = 1{,}372$; $1{,}357$ und $1{,}419$; eine andere Methode, angewandt von Hirn**) und Weisbach***), ergab

spezifischen Wärme und des spezifischen Gewichtes eines Körpers gewöhnt ist, die Werthe auf Wasser zu beziehen, so habe ich obige Darstellung vorgezogen.

Clausius (a. a. O.) setzt die Gewichtscapacität für Luft gleich Eins und multiplicirt dann zur Bestimmung der Raumcapacität die erhaltenen Werthe erst mit dem spezifischen Gewicht der Gase in Hinsicht der Luft.

*) Ausführliches über diese Frage findet sich in: Wüllner, Experimentalphysik. Bd. 2. S. 279. Mousson, Physik. Bd. 2. S. 56.

**) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur. S. 69.

***) Civilingenieur. Bd. 5. S. 46.

resp. 1,3845 und 1,4025. Ferner ergab nach Dulong eine Vergleichung der Resultate der Formel für die Schallgeschwindigkeit, die den Werth $\varkappa$ enthält, mit den Beobachtungen über Fortpflanzung des Schalles in Luft $\varkappa = 1{,}421$ und überdies fand Dulong noch den gleichen Werth auch für Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff. Dieselbe Vergleichung mit den Beobachtungsresultaten von Moll und van Beek über die Schallgeschwindigkeit ergab hingegen für atmosphärische Luft $\varkappa = 1{,}410$.

Diesen letztern Werth betrachtet man jetzt als den zuverlässigsten, um so mehr, als er durch Resultate anderer Untersuchungen, auf die wir zurückkommen, indirect bestätigt wird.

Aus der Formel

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$$

findet sich nun, da wir für atmosphärische Luft $\varkappa = 1{,}410$ und nach Regnault $c_p = 0{,}23751$ einsetzen können, die spezifische Wärme (Gewichtscapacität) der Luft bei constantem Volumen:

$$c_v = 0{,}16844.$$

Später wird sich herausstellen, wie sich mit diesen Grundlagen auch die spezifische Wärme bei constantem Volumen für andre permanente Gase ermitteln lässt.

Aufstellung der Hauptgleichungen für Gase.

Die im Vorstehenden angegebenen Versuchsresultate liefern uns nun das Mittel, die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, wie sie im ersten Abschnitte S. 77 aufgestellt worden sind, so umzuformen, dass sie zur Beurtheilung des Verhaltens der permanenten Gase geeignet werden.

Dabei legen wir aber folgende Annahmen zu Grunde:

1) Ein vollkommenes permanentes Gas befolgt streng das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac.

2) Die spezifische Wärme eines solchen Gases bei constantem Drucke ist eine constante Grösse. Dasselbe gilt für die spezifische Wärme bei constantem Volumen.

3) Der Hauptrepräsentant der permanenten Gase, die atmo-

sphärische Luft, kann bei den folgenden Untersuchungen als ein vollkommenes Gas angesehen werden.

Wie weit die vorstehenden Annahmen gerechtfertigt sind, geht zum Theil aus dem oben gegebenen Referate der Versuchsresultate hervor; nur in Betreff der Annahme, dass auch die spezifische Wärme bei constantem Volumen eine constante Grösse sei, wie es Regnault für die spezifische Wärme bei constantem Drucke durch Versuche dargethan hat, können Zweifel erst durch die weitern Untersuchungen gehoben werden.

Denke man sich die Gewichtseinheit Gas vom Volumen v, dem Drucke p und der Temperatur t solle um dt zunächst bei constantem Drucke weiter erwärmt werden, so ist die erforderliche Wärmemenge nach Obigem

$$dQ_p = c_p dt.$$

Findet hingegen die Erwärmung bei constantem Volumen statt, so folgt

$$dQ_v = c_v dt.$$

Beide Wärmemengen lassen sich aber auch durch die allgemeinen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A \,.\, [X dp + Y dv] \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} [X dt + (a+t)\, dv] \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} [Y dt - (a+t)\, dp] \end{aligned}\right\}$$

welche im ersten Abschnitte S. 77 entwickelt wurden, bestimmen.

Ist bei der Erwärmung der Druck p constant, so ist $dp = 0$ und daher giebt die dritte der vorstehenden Gleichungen

$$dQ_p = \frac{A\,Y}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} \cdot dt.$$

Ist ferner das Volumen v constant, also $dv = 0$, so giebt die zweite Gleichung:

$$dQ_v = \frac{AX}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} \cdot dt.$$

Das Gleichsetzen dieser beiden Werthe mit den vorhin hingestellten Werthen von dQ_p und dQ_v ergiebt dann:

$$c_p = \frac{AY}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} \text{ und } c_v = \frac{AX}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}$$

und hieraus bestimmen sich jetzt für permanente Gase die beiden Funktionen X und Y, die, wie aus den frühern allgemeinen Untersuchungen hervorging, eine so hervorragende Rolle spielen:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{c_v}{A}\left(\frac{dt}{dp}\right) \\ Y &= \frac{c_p}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right) \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

In beiden Gleichungen erscheinen noch die partiellen Differentialquotienten der Temperatur in Hinsicht p und v. Für Gase giebt aber das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac Gl. (56)

$$pv = R(273 + t)$$

und hiernach durch Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dp}\right) &= \frac{v}{R} \\ \left(\frac{dt}{dv}\right) &= \frac{p}{R} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gl. (59) liefert dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{c_v v}{AR} \\ Y &= \frac{c_p p}{AR} \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Die vorstehenden Werthe von X und Y sollen nun zunächst benutzt werden zur Untersuchung der Frage, in welche Form die beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, angewandt auf Gase, übergehen.

Die erste Hauptgleichung I (S. 77) gab den Zusammenhang zwischen den Funktionen X und Y wie folgt:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1$$

Aus den Gln. (61) finden sich aber, wenn die spezifischen Wärmen constant angenommen werden, leicht die beiden Differentialquotienten

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) = \frac{c_p}{AR} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dX}{dv}\right) = \frac{c_v}{AR}$$

Die Substitution in vorstehende Gleichung ergiebt dann die merkwürdige Relation

$$c_p - c_v = AR \tag{62}$$

die in dieser Form zuerst von Clausius aufgestellt wurde*).

Es folgt also, dass die Differenz der spezifischen Wärmen bei gleichen Gewichten für jedes Gas eine constante Grösse AR ist.

Multiplicirt man vorstehende Gleichung auf beiden Seiten mit dem spezifischen Gewicht ε des Gases in Hinsicht des Wassers, so erscheinen auf der linken Seite die Werthe $\omega_p = \varepsilon c_p$ und $\omega_v = \varepsilon c_v$, der erstere Werth ist die Raumcapacität des Gases bei constantem Drucke, der andere die Raumcapacität bei constantem Volumen; man erhält also

$$\omega_p - \omega_v = AR\varepsilon. \tag{63}$$

Nun ist aber oben (S. 105) gezeigt worden, dass der Werth $R\varepsilon$ eine für alle Gase gleiche Grösse ist (man findet mit den oben gegebenen Werthen, wenn ε das spezifische Gewicht in Hinsicht des Wassers ist: $R\varepsilon = 0{,}0378540$), es folgt daher der weitere Satz »dass die Differenz der Raumcapacitäten für alle permanenten Gase gleich gross ist,« ein Satz,

*) Clausius. »Abhandlungen.« I. S. 44.

der zuerst von Clapeyron aus dem Carnot'schen Grundsatze abgeleitet, in vorstehender Form aber zuerst von Clausius (a. a. O.) ausgesprochen wurde.

Die Gl. (62) enthält nur Grössen, die wenigstens für atmosphärische Luft nach Obigem bekannt sind; setzen wir für dieses Gas $R = 29{,}272$; $c_p = 0{,}23751$; $c_v = 0{,}16844$, so berechnet sich nach der gegebenen Gleichung das mechanische Wärmeaequivalent

$$\frac{1}{A} = \frac{R}{c_p - c_v} = 423{,}80 \text{ Meterkilogr.}$$

In der Einleitung wurde bemerkt, dass Joule durch verschiedenartige Versuche diesen Werth zu 423,55 fand und dass wir dafür den Werth 424 wählen würden.

Die Uebereinstimmung des Versuchswerthes mit dem vorstehenden Rechnungswerthe ist eine so überraschende, dass man wohl berechtigt ist, darin den schönsten Beweis von der Richtigkeit der Annahmen, von denen man in der mechanischen Wärmetheorie ausgeht, zu finden*). Die Gl. (62) und (63) lassen sich nun zur Berechnung der Gewichts- und Raumcapacität der Gase bei constantem Volumen benutzen, welche Werthe in der mechanischen Wärmetheorie von besonderer Wichtigkeit sind. Setzt man in diese Formeln $A = \frac{1}{424}$ und überdies für c_p und R die oben gegebenen Werthe, so findet sich:

	Gewichtscapacität c_v	Raumcapacität ω_v	Verhältniss
	bei constantem Volumen bezogen auf Wasser.		$x = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\omega_p}{\omega_v}$
Atmosphärische Luft	0,16847	0,000 21786	1,4098
Stickstoff	0,17273	0,000 21697	1,4114
Sauerstoff	0,15507	0,000 22171	1,4026
Wasserstoff	2,41226	0,000 21605	1,4132

*) In der oben angegebenen Weise wurde das mechanische Wärmeaequivalent schon in den zuerst erschienenen Schriften über mechanische Wärmetheorie berechnet; so fand Mayer (1842) 365; Holtzmann (1845) 374; Clausius (1850) 370. Die Abweichungen erklären sich durch den Umstand, dass damals die spezifische Wärme der Luft nicht genau bestimmt war. Die ältere Bestimmung der spezifischen Wärme der Luft bei constantem Drucke von Delaroche und Bérard ergab $c_p = 0{,}267$, während der richtige Werth von Regnault zu 0,23751 gegeben wurde.

Die Raumcapacität bei constantem Volumen erscheint wieder. wie die bei constantem Drucke für die vier Gase nahezu gleich, die Differenz $\omega_p - \omega_v$ (s. noch die Zusammenstellung S. 110) ist für alle constant und beträgt 0,000 08928.

Was das Verhältniss $\varkappa$ der Wärmecapacitäten betrifft, so bestätigen die Werthe der letztern Columne genau genug die Angabe von Dulong, der gerade für die angeführten vier Gase den Werth $\varkappa$ gleichgross fand; für gewöhnliche Berechnungen kann man recht wohl für diese Gase den Werth $\varkappa = 1{,}410$ setzen.

In ähnlicher Weise, wie es im Vorstehenden mit der ersten Hauptgleichung geschehen, mag nun auch die zweite Hauptgleichung spezieller Prüfung unterworfen werden.

Wir fanden im 1. Abschnitt S. 42

$$S = Y\left(\frac{dS}{dp}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right)$$

in welcher Gleichung die Bedeutung der Funktion S mathematisch scharf festgestellt wurde. Wir haben dort aber im Weitern auf Grund allgemeiner Betrachtungen dann die Hypothese aufgestellt, dass S wohl nichts weiter als die Temperatur sei und gesetzt

$$S = a + t$$

wobei t in gewöhnlichen Temperatureinheiten (nach Celsius) vom Gefrierpunkt an gemessen werden sollte, während a eine constante Grösse darstellt, welche auf einen von der Natur selbst vorgeschriebenen Nullpunkt der Thermometerscala hinweist, welche Grösse aber sich durch die allgemeinen Untersuchungen nicht bestimmen liess.

Die Substitution des Werthes S in die zweite Hauptgleichung ergab dann (S. 77)

$$a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right)$$

Setzen wir in die Formel auf der rechten Seite die Werthe ein, auf die wir in den Gln. (60) und (61) S. 115 für permanente Gase gelangt sind, so folgt:

$$a + t = c_p \frac{p}{AR} \cdot \frac{v}{R} - c_v \frac{v}{AR} \cdot \frac{p}{R}$$

oder

$$a + t = \frac{c_p - c_v}{AR} \cdot \frac{pv}{R}.$$

Nun fand sich aber durch die erste Hauptgleichung (Gl. 62) die Beziehung

$$c_p - c_v = AR$$

und durch Gl. (56)

$$pv = R\,(273 + t).$$

Die Substitution in vorstehende Gleichung ergiebt daher sehr einfach:

$$a = 273 \qquad (64)$$

Dieses Resultat, auf welches die zweite Hauptgleichung der Wärmetheorie, angewandt auf permanente Gase sich reducirt, ist von hoher Wichtigkeit; es beweist die grosse Wahrscheinlichkeit der Hypothese, dass wir in Wirklichkeit die Funktion S unserer allgemeinen Betrachtungen, bei denen wir über die spezielle Beschaffenheit der Körper keinerlei Voraussetzungen gemacht haben, als Temperaturmaass ansehen können und dass S die Temperatur eines Körpers darstellt, gemessen von einem Punkte aus, der 273° unter dem Gefrierpunkte des Wassers liegt, vorausgesetzt, dass das Intervall zwischen Gefrier- und Siedepunkt des Wassers, wie bei Celsius, in 100 Theile getheilt ist. Man nennt diesen Punkt den absoluten Nullpunkt und die Temperatur

$$S = a + t = 273 + t$$

die absolute Temperatur, die sich also leicht ermittelt, wenn die Temperatur t nach Celsius gegeben ist.

Da wir die Bedeutung der Funktion S mathematisch bestimmt festgestellt haben (S. 41), so ist damit gleichzeitig eine scharfe Definition des Temperaturmaasses gegeben und endlich folgt auch noch, dass diese Funktion eine für alle Körper gleiche Funktion ist.

Nach allen diesen Vorbereitungen lassen sich nun diejenigen Formeln (III S. 77), nach denen man die Wärmemenge Q berechnet, die für gewisse Zustandsänderungen einem Körper zugeführt werden muss, in die Form bringen, in der wir sie bei Gasen verwenden. In den bezeichneten Gleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
dQ &= A\,[X\,dp + Y\,dv] \\
dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,[X\,dt + (a+t)\,dv] \\
dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}\,[Y\,dt - (a+t)\,dv]
\end{aligned}\right\}
$$

sind jetzt für permanente Gase nach Gl. (60) u. (61) die Werthe a, X, Y, $\left(\frac{dt}{dp}\right)$ und $\left(\frac{dt}{dv}\right)$ bestimmt; die Substitution führt nach einigen einfachen Reductionen dann auf die folgenden Gleichungen, in denen wir aber insofern eine etwas veränderte Bezeichnung eingeführt haben, als wir die spezifische Wärme bei constantem Volumen kurz mit c statt durch c_v bezeichnen und für die specifische Wärme c_p bei constantem Drucke die Bezeichnung $\varkappa c$ benutzen, auf Grund der früher angenommenen Beziehung

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

Es wird sich nämlich durch die weitern Untersuchungen herausstellen, dass die spezifische Wärme bei constantem Volumen bei den Rechnungen eine hervorragende Rolle spielt, und daher ist die einfachere Bezeichnung (ohne Index) gerechtfertigt. Wir erhalten dann:

$$
\left.\begin{aligned}
dQ &= \frac{c}{R}\,[v\,dp + \varkappa p\,dv] \\
dQ &= c\,dt + \frac{AR\,(a+t)}{v}\,dv \\
dQ &= \varkappa c\,dt - \frac{AR\,(a+t)}{p}\,dp
\end{aligned}\right\} \qquad (65)
$$

Diese drei Gleichungen sind identisch; bei Lösung bestimmter Probleme greift man diejenige heraus, welche am schnellsten zum Ziele führt.

Ausserdem benutzen wir in der Folge nach der neuen Beziehungsweise Gl. (62) in folgender Form:

$$c(\varkappa - 1) = AR \tag{66}$$

und in der Gl. (56), welche das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac ausspricht, schreiben wir a statt 273:

$$pv = R(a + t). \tag{67}$$

Von der isothermischen und isodynamischen Curve der permanenten Gase.

Die allgemeinen Betrachtungen über die Kreisprozesse im 1. Abschnitte haben dargelegt, dass die in der Ueberschrift genannten Curven eine eigenthümliche Rolle in der Wärmelehre spielen, es fragt sich nun, welchem Gesetze diese Curven bei permanenten Gasen unterworfen sind.

Mit dem Namen »isothermische Curve« haben wir die Curve bezeichnet, nach welcher sich bei der Zustandsänderung eines Körpers der Druck p mit dem Volumen v ändert, wenn die Temperatur constant erhalten wird.

In diesem Falle haben wir nun aber für Gase nach Gl. (67)

$$pv = R(a + t) = \text{Const.}$$

und das ist auch schon die Gleichung der isothermischen Curve für permanente Gase.

Die Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Ist der Anfangszustand durch den Druck p_1 und das spezifische Volumen v_1 gegeben, so ist damit auch die Constante $p_1 v_1$ bestimmt und die Curve ist darstellbar; da aber auch die Constante $R(a + t)$ ist, so ist dieselbe auch durch die Temperatur allein vollkommen bestimmt, die Curve lässt sich zeichnen, ohne dass man die Anfangswerthe p_1 und v_1 zu kennen braucht.

Unter »isodynamischer Curve« haben wir im Fernern (S. 38) diejenige Curve verstanden, nach welcher sich der Druck p des Körpers mit dem Volumen v ändert, wenn die ganze innere Arbeit U constant erhalten wird, also $dU = 0$ ist.

Es fragt sich nun zunächst, in welchem Zusammenhange bei permanenten Gasen die innere Arbeit U mit Druck und Volumen steht.

Wir sind bei den allgemeinen Untersuchungen von der Formel

$$dQ = A(dU + dL)$$

ausgegangen (S. 26) und erhielten dann für den Fall, dass der Körper während der Zuführung der Wärmemenge dQ einen seinem eigenen Drucke gleichen Widerstand überwindet, die Gleichung weiter in der Form:

$$dQ = A(dU + p\,dv) \qquad \text{(S. 35)}$$

Für permanente Gase ist diese Gleichung nun auch in der Form:

$$dQ = c\,dt + \frac{AR(a+t)}{v}\,dv \qquad \text{(Gl. 65, S. 120)}$$

zu schreiben. Aus Formel (67) folgt aber:

$$\frac{R(a+t)}{v} = p$$

Die Substitution in voriger Gleichung giebt daher:

$$dQ = c\,dt + Ap\,dv \qquad (68)$$

und hieraus ergiebt sich durch Vergleich mit der vorhin angegebenen allgemeinen Gleichung die wichtige Relation:

$$dU = \frac{c}{A}\,dt \qquad (69)$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man annimmt, das Gas sei durch irgend welche Zustandsänderung aus der Anfangstemperatur t_1 in die Endtemperatur t übergegangen, so findet sich die Veränderung $U - U_1$ der innern Arbeit:

$$U - U_1 = \frac{c}{A}(t - t_1), \qquad (70)$$

oder wenn man Druck und Volumen im Anfange mit p_1 und v_1 und am Ende mit p und v bezeichnet und Gl. (67) beachtet:

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1) \tag{71}$$

Hiernach ist also für permanente Gase die Form der Funktion $U = F(p, v)$ (S. 27) vollständig bestimmt und es ergiebt sich überdies nach Gl. (70) das wichtige Resultat, dass die Aenderung der innern Arbeit sich einfach aus der Differenz der Anfangs- und Endtemperatur berechnen lässt, vorausgesetzt, dass im Anfang und am Ende Gleichgewichtszustand stattfindet, d. h. der äussere Druck dem Gasdrucke gleich ist.

Hat das Gas während des Ueberganges die äussere Arbeit L verrichtet und wurde die Wärmemenge Q zugeführt, so besteht nun für Gase (nach Gl. (15) S. 46) allgemein die Gleichung:

$$Q = c(t - t_1) + AL, \tag{72}$$

oder wenn das Gas auf dem ganzen Wege der Veränderung einen seinem Drucke gleichen Widerstand überwindet:

$$Q = c(t - t_1) + A\int_{v_1}^{v} p\,dv \tag{73}$$

Schliessen wir nun aus dem Vorstehenden auf das Gesetz der isodynamischen Curve, so findet sich für permanente Gase ein sehr einfaches Resultat.

Bleibt nämlich die innere Arbeit constant, ist also $dU = 0$, so findet sich nach Gl. (69) auch $dt = 0$, woraus man schliesst, dass auch keine Temperaturänderungen stattfinden. Die isodynamische Curve der permanenten Gase ist also identisch mit der isothermischen Curve derselben.

Die beiden Curven aS und aU der Figur 19, die wir auf S. 83 unsern allgemeinen Untersuchungen zu Grunde legten, fallen sonach bei permanenten Gasen zusammen, die Curven decken sich und die beiden Punkte e und f fallen auf einander.

Was die Wärmemenge Q betrifft, die man einem Gase zuführen muss, um es aus einem gewissen Zustand in einen andern überzuführen unter der Voraussetzung, dass die Anfangs- und Endtemperatur die gleiche, also $t = t_1$ ist, so folgt nach Gl. (72)

$$Q = AL.$$

Nun ist aber L die Arbeit, welche das Gas bei seinem Uebergange verrichtet hat, und AL die Wärmemenge, welche dieser Arbeit entspricht und hierbei verschwindet; die vorstehende Formel lehrt daher, »dass bei einem Gase die ganze zugeleitete Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt wird, wenn die Gasmasse aus einem Gleichgewichtszustand in einen andern übergeführt wird und wenn in beiden Grenzzuständen die Temperatur die gleiche ist; gleichgültig, auf welchem Wege der Uebergang stattgefunden hat.«

Für den speziellen Fall, dass das Gas während dieses Ueberganges einen seinem jeweiligen Drucke gleichen Widerstand überwunden hat, findet sich die erforderliche Wärmemenge nach Gl. (73)

$$Q = A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

wenn das Endvolumen mit v_2 bezeichnet wird.

Da hier auf dem ganzen Wege die Temperatur constant ist, so folgt nach Gl. (67)

$$p = \frac{R(a+t)}{v}$$

und daher auch durch Substitution

$$Q = AR(a+t)\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}$$

woraus sich ergiebt, da gemäss der Voraussetzung auch die Beziehung

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = R(a+t)$$

gilt:

$$Q = AR(a+t)\,\text{logn.}\frac{v_2}{v_1} = Ap_1 v_1\,\text{logn.}\frac{v_2}{v_1} = Ap_2 v_2\,\text{logn.}\frac{v_2}{v_1} \tag{74}$$

in welchen Gleichungen auch statt des Verhältnisses $\frac{v_2}{v_1}$ das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ substituirt werden kann.

Die Curve $P_1 P_2$ (Fig. 23), nach welcher hier die Druckänderungen erfolgen, ist dann nach Obigem eine gleichseitige

Hyperbel und die Arbeit L, welche das Gas bei seinem Uebergang aus dem Zustande P_1 in den Zustand P_2 verrichtet (Expansionsarbeit für das Expansionsverhältniss $\frac{v_2}{v_1}$), findet sich nach Gleichung (73):

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \frac{Q}{A}$$

oder nach (74)

$$L = R(a + t) \text{ logn.} \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \text{ logn.} \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \text{ logn.} \frac{v_2}{v_1} \quad (75)$$

Diese letzten Gleichungen für die vom Gase verrichtete Arbeit sind längst bekannt, da sie sich auch direct unter Annahme des Mariotte'schen Gesetzes ableiten lassen. Das Neue, auf welches die mechanische Wärmetheorie führt, ist aber, dass im vorliegenden Falle, während der Expansion eine Wärmezuleitung in genau vorgeschriebener Art erfolgen muss, der Art, dass die Wärmemenge der verrichteten Arbeit proportional ist.

Fig. 23.

Die Gln. (74) u. (75) lehren überdies noch, dass die erforderliche Wärmemenge und die Grösse der gewonnenen Arbeit unabhängig von der Art des Gases sind. Alle permanenten Gase brauchen die gleiche Wärmemenge, wenn sie auf dem angenommenen Wege aus dem gleichen durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 gegebenen Zustand P_1 in den Zustand P_2 $(p_2 v_2)$ übergehen.

Wird umgekehrt das Gas bei constanter Temperatur vom Volumen v_2 auf das Volumen v_1 comprimirt, so gelten die gegebenen Gleichungen ebenfalls; Gl. (75) giebt dann die aufzuwendende Arbeit und (Gl. 74) giebt die Wärmemenge, die dem Gase während des Ueberganges zu entziehen ist.

Denken wir uns z. B. in einem Cylinder ein Kilogramm

atmosphärische Luft von der Temperatur $t_1 = 30^0$ eingeschlossen. so ist die Arbeit. welche das Gas bei der Ausdehnung vom Volumen v_1 auf das Volumen $v_2 = \frac{4}{3} v_1$ bei constanter Temperatur verrichtet, nach Gl. (75)

$$L = R(a+t) \text{ logn. } \frac{v_2}{v_1} = 2551{,}57 \text{ Meterkilogr.}$$

wobei $R = 29{,}272$ und $a = 273$ zu setzen ist.

Die Arbeit berechnet sich also, wenn man nur die Temperatur und das Expansionsverhältniss kennt.

Der Druck p_1 geht dabei in den Werth $p_2 = \frac{3}{4} p_1$ über und die ganze Wärmemenge, welche dem Gase während des Ueberganges zuzuführen ist und die dabei verschwindet, ist

$$Q = AL = \frac{1}{424} \cdot L = 6{,}0178 \text{ Calorien.}$$

Die Eigenschaft, dass die isothermische Curve mit der isodynamischen Curve identisch ist, kommt nur den permanenten Gasen und zwar ohne Zweifel nur den vollkommenen Gasen zu.

Nach Gl. (69) und (70) erscheint bei Gasen die innere Arbeit U als eine Funktion der Temperatur allein, so dass also die innere Arbeit in einem gewissen Gasquantum die gleiche ist, wenn das mit der Temperatur der Fall ist, welches auch das Volumen dieser Gasmasse sein mag. Clausius*) hat zuerst diesen Satz in bestimmter Weise ausgesprochen, aber zugleich hinzugefügt, dass der Satz wahrscheinlich für jedes Gas nur in dem Grade genau ist, in welchem das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac auf dasselbe Anwendung findet.

Zur Beleuchtung dieses Zusatzes kehren wir auf einen Augenblick zu den allgemeinen Betrachtungen zurück, die wir auf S. 24 angestellt haben, indem wir gleichzeitig auf die wahrscheinliche Constitution der Gase Rücksicht nehmen. Es wurde dort ausgesprochen, dass die Wärmemenge, die man einem Körper zuführt, im Allgemeinen zu dreierlei verwendet wird. Zunächst

---

*) Clausius. Abhandlungen. I.

wird ein Theil zur Verstärkung der Molekularbewegung verbraucht, zur Erhöhung der »Schwingungsarbeit«, deren Stärke wir unmittelbar durch die Temperatur beurtheilen. Zweitens findet eine Veränderung der Mittellagen der schwingenden Theilchen statt, und da die Theilchen mit gewissen Kräften (ohne Zweifel anziehend) auf einander wirken, so entspricht dieser Positionsänderung eine gewisse Arbeit. Endlich wird ein dritter Theil der zugeführten Wärme im Allgemeinen zu äusserer Arbeit verbraucht.

Bei einem vollkommenen Gase nimmt man nun an, dass die kleinsten Theilchen ganz aus den Sphären ihrer gegenseitigen Krafteinwirkungen herausgetreten sind, dass also eine Zuleitung von Wärme nur zur Erhöhung der Schwingungsarbeit d. h. zur Erhöhung der Summe der lebendigen Kraft der Bewegung aller Theilchen (Erhöhung der Temperatur) und zu äusserer Arbeit verbraucht wird.

Wir nehmen also an, dass bei vollkommenen Gasen in der Gl. (1) S. 25

$$dQ = A\,(dW + dJ + dL)$$

in der wir die beiden ersten Glieder zusammen gefasst und den Zuwachs der innern Arbeit genannt haben, das Glied dJ Null ist.

In Wirklichkeit giebt es aber kein solches Gas, vielmehr darf man nur sagen, dass das Glied dJ um so kleiner sein wird, je mehr sich ein Gas dem Zustande eines vollkommenen Gases nähert und dass es schon bei denjenigen Gasen, die wir zu den permanenten zählen, wie bei der atmosphärischen Luft, verschwindend klein ist.

Denken wir uns die Volumeneinheit eines wirklichen Gases werde bei constantem Volumen erwärmt, so wäre die äussere Arbeit Null, also $dL = 0$; machen wir nun überdies die sehr wahrscheinliche Annahme, dass die Temperaturerhöhung dt gleichzeitig als Maass der Vermehrung der Schwingungsarbeit gilt, so schreibt sich vorstehende Gleichung auch in folgender Art:

$$dQ_v = \omega\,dt + A\,dJ.$$

Für ein vollkommenes Gas wäre $dJ = 0$ und dann wäre ω nach Früherem nichts weiter als die spezifische Wärme bei constantem Volumen (Raumcapacität); ist aber dJ nicht Null, so erhält der Werth, den wir bisher die spezifische Wärme bei constantem Volumen genannt haben, eine complicirte Bedeutung;

ohne Zweifel ist dJ für die Erwärmung unter den angenommenen Verhältnissen positiv, da man annehmen muss, dass die kleinsten Theile anziehend auf einander wirken und der Werth dJ die Arbeit darstellt, die (selbst bei der Erwärmung unter constantem Volumen) auf weitere Zertheilung (Auflösung von Molekül- und Atomgruppen) verwendet wird. Rankine nennt den Werth ω vorstehender Gleichung die wahre spezifische Wärme und nach dem Angegebenen wäre daher zu schliessen, dass die spezifische Wärme bei constantem Volumen bei einem Gase um so mehr von der wahren spezifischen Wärme abweicht und zwar um so grösser gegen diese ist, je weiter das Gas vom vollkommenen Gaszustande entfernt liegt.

Dieser Satz scheint durch die Versuchswerthe, die wir in der Zusammenstellung auf S. 110 und S. 117 gegeben haben, bestätigt zu werden. Der Wasserstoff, von dem wir annehmen, dass er einem vollkommenen Gase am nächsten steht, zeigt für die Raumcapacität den kleinsten Werth, für die andern angeführten Gase weichen die Werthe zwar ausserordentlich wenig ab, stellen sich aber doch entschieden höher. Noch stärker müsste, wenn diese Schlüsse richtig sind, der Unterschied hervortreten, wenn wir in gleicher Weise für Dämpfe die Rechnungen durchführen, und ein solch' stärkerer Unterschied tritt auch entschieden hervor.

Dabei ist freilich zu bemerken, dass auch die chemische Zusammensetzung der Gase und Dämpfe einen Einfluss hat. Bei den chemisch einfachen Gasen und bei solchen chemisch zusammengesetzten Gasen, die bei ihrer Verbindung keine Volumenverminderung erfahren, stellt sich die Raumcapacität nahezu wie bei Wasserstoff heraus, nur aus oben angeführtem Grunde um wenig höher. Bei denjenigen Gasen aber, deren Volumen bei der chemischen Verbindung sich in gewissem Verhältniss z. B. wie 3 : 2 vermindert, stellt sich dann auch die Raumcapacität nahe im gleichen Verhältniss grösser heraus. Hierher gehört z. B. die Kohlensäure, bei welcher dieses Verhältniss $\frac{3}{2}$ beträgt, ebenso ist es bei Wasserdampf der Fall.

So ergiebt sich nach Regnault für Kohlensäure (Anmerkung S. 105) $R = 19{,}143$ und ihr spezifisches Gewicht in Hinsicht der Luft $\varepsilon = 1{,}52901$ und ferner fand Regnault für die Gewichts-

capacität bei constantem Druck $c_p = 0{,}2169$, woraus sich nach Gl. (62) die Gewichtscapacität bei constantem Volumen 0,1718 berechnet und ebenso auf dem oben angegebenen Wege die Raumcapacität

bei constantem Drucke $\omega_p = 0{,}000\,4289$

bei constantem Volumen $\omega_v = 0{,}000\,3397$

und hieraus

$$\varkappa = \frac{\omega_p}{\omega_v} = 1{,}262$$

bestimmt.

Ehe man nun die Raumcapacität bei constantem Volumen mit der der einfachen Gase vergleicht, muss der Werth ω_v im Verhältniss der Verdichtung verkleinert werden; man erhält $\frac{2}{3}\,\omega_v = 0{,}000\,2264$. (S. Zusammenstellung auf S. 117.)

Man erkennt also wieder die Abweichung in der angezeigten Richtung; freilich sind vorstehende Werthe nur angenäherte, da die Kohlensäure als Dampf keineswegs das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac genau befolgt und überdies auch nach Regnault*) die spezifische Wärme bei constantem Drucke gerade bei der Kohlensäure sich stark mit der Temperatur ändert. Endlich ist auch der Einfluss der chemischen Verbindung der einzelnen Bestandtheile und der damit zusammenhängenden Volumenänderungen noch viel zu wenig bekannt. (Vergl. die Abhandlungen von Buff und Clausius in den Annalen der Chemie und Pharm. Bd. 115. S. 301 und Bd. 118. S. 106.)

Aus den vorstehenden allgemeinen Betrachtungen ist zu schliessen, dass der oben für Gase abgeleitete Satz von dem Zusammenfallen der isothermischen und isodynamischen Curve genau nur für vollkommene Gase gültig ist, für ein wirkliches Gas entfernen sich beide Curven um so mehr von einander, je weiter dasselbe vom Zustande eines vollkommenen Gases abliegt. Es lässt sich übrigens die Richtung der Abweichung beider Curven leicht errathen. Lassen wir beide Curven vom gleichen Punkte ausgehen, so wird sich die isodynamische Curve rascher der Abscissenaxe nähern, als die isothermische und das Auseinander-

*) Regnault. »Relation etc.« t. 2. S. 128.

treten beider Curven wird um so auffallender sein, je mehr das Gas sich dem Dampfzustand nähert, je dichter es ist, je näher es dem Condensationspunkt liegt. Von dieser Abweichung, die besonders für atmosphärische Luft ganz unmerklich ist, sehen wir aber, wie mehrfach schon angedeutet wurde, im Verlaufe der weitern Untersuchungen ab.

Von der adiabatischen Curve der permanenten Gase.

Unter adiabatischer Curve verstehen wir nach **Rankine** diejenige Curve, welche angiebt, nach welchem Gesetze sich der Druck p mit dem Volumen v ändert, wenn die Volumenänderungen stattfinden, ohne dass dem Körper Wärme mitgetheilt noch entzogen wird und wenn dabei der Körper während des ganzen Verlaufes der Aenderungen einen Druck überwindet, der seinem eignen Drucke gleich ist.

Für ein Gas war nun aber nach der ersten der Gln. (65)

$$dQ = \frac{c}{R} [v\,dp + \varkappa p\,dv]$$

und da die Aenderungen hier ohne Wärmemittheilung und ohne Wärmeentziehung erfolgen sollen, so ist $dQ = 0$ und man erhält

$$v\,dp + \varkappa p\,dv = 0$$

oder durch pv dividirt

$$\frac{dp}{p} + \varkappa \frac{dv}{v} = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung und setzt man den anfänglichen Druck p_1 und das Anfangsvolumen v_1 so folgt:

$$p v^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa} \tag{76}$$

und das ist die Gleichung der adiabatischen Curve der permanenten Gase und zwar derjenigen Curve, welche durch den Punkt (p_1, v_1) geht. Ist sonach die Lage dieses Punktes durch die Coordinaten gegeben, so ist der Verlauf der Curve vollständig bestimmt; die Constante der Gleichung

$$p v^{\varkappa} = \text{Const.}$$

ist einfach $p_1 v_1^{\varkappa}$.

Man erkennt ohne Weiteres den Verlauf der adiabatischen Linie; die Coordinatenaxen sind Asymptoten zur Curve, dieselbe nähert sich aber rascher der Abscissenaxe, als die isothermische und isodynamische Curve, weil für atmosphärische Luft und für die andern permanenten Gase $\varkappa = 1{,}410$ also $\varkappa > 1$ ist.

Dass der Druck eines Gases sich nach dem Gesetze (76) ändert, wenn die Zustandsänderungen ohne Mittheilung oder Entziehung der Wärme erfolgen, hat zuerst, allerdings auf anderm Wege, Poisson gefunden, seitdem ist das Gesetz auf verschiedene Weise auch von andern Schriftstellern abgeleitet worden.

Bei der Aenderung des Zustandes eines Gases auf dem angegebenen Wege finden aber auch Temperaturänderungen statt, die sich jedoch leicht verfolgen lassen. Aus Gl. (76) folgt zunächst:

$$\frac{p v}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa - 1}$$

Ist die Anfangstemperatur t_1, so ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf Gl. (67)

$$\frac{a + t}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa - 1} \qquad (77)$$

und dann im Weiteren auch, weil nach Gl. (76)

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

folgt:

$$\frac{a + t}{a + t_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \qquad (78)$$

Nach den letzten Gleichungen lässt sich für jeden Augenblick die Temperatur t berechnen; man erkennt übrigens, dass mit einer Volumenzunahme eine Abnahme der Temperatur verbunden ist. Die beiden Gln. (77) und (78) hätten sich auch direkt aus der zweiten und dritten Gleichung der Gl. (65) durch die Substitution $dQ = 0$ und durch Integration finden lassen.

Die zunächst liegende Frage wäre nun diejenige nach der Arbeit, welche ein Gas verrichtet, wenn es sich ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme vom Volumen v_1 auf das Volumen v_2 ausdehnt, wobei der Druck von p_1 auf p_2 und die Temperatur von t_1 auf t_2 sinkt. Dieselbe Arbeit wäre auch aufzuwenden, wenn umgekehrt das Gas (die Gewichtseinheit) vom grössern Volumen v_2 auf das kleinere v_1 unter denselben Umständen comprimirt werden sollte. Da hier $Q = 0$ ist, so findet sich nach Gl. (73) sofort:

$$0 = c\,(t_2 - t_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

oder, wenn die durch das Integral angedeutete Arbeit mit L bezeichnet wird:

$$L = \frac{c}{A}\,(t_1 - t_2) \qquad (79)$$

Wäre sonach die Anfangs- und Endtemperatur gegeben, so liesse sich die Arbeit leicht berechnen. Ein Vergleich der rechten Seite vorstehender Gleichung mit Gl. (70) S. 122 zeigt überdies, dass die gewonnene Arbeit L gleich der Veränderung $U_1 - U_2$ der innern Arbeit ist, die hier in einer Abnahme besteht. Wäre umgekehrt das Gas comprimirt worden, so hätte eine Zunahme der innern Arbeit stattgefunden und zwar genau um den Betrag der äussern Arbeit. Da bei permanenten Gasen die Zunahme der innern Arbeit sich vollständig als Temperaturerhöhung, als Wärmevermehrung zeigt, so haben wir hier den einfachsten Fall der directen Umwandlung von Arbeit in Wärme vor uns; während bei der Expansion alle verschwundene Wärme vollständig in Arbeit umgesetzt wird.

Ist, wie gewöhnlich bei vorliegender Aufgabe, nicht die Anfangs- und Endtemperatur gegeben, sondern sind die Grössen v_1 und v_2 oder p_1 und p_2 bekannt, so lässt sich die Arbeit L direkt auch nach den folgenden Formeln berechnen. Gl. (79) schreibt sich auch in der Form:

$$L = \frac{c\,(a + t_1)}{A} \left(1 - \frac{a + t_2}{a + t_1}\right)$$

oder unter Benutzung der Gl. (67), sowie Gl. (77) und (78):

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{c}{AR} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{x-1}\right] \\ L &= \frac{c}{AR} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

in welchen Gleichungen man überdies auch noch nach Gl. (66)

$$\frac{c}{AR} = \frac{1}{x-1}$$

einsetzen kann.

Die vorstehenden Gleichungen mögen durch ein Beispiel erläutert werden.

Es sei in einem Cylinder die Gewichtseinheit Gas (atmosphärische Luft) eingeschlossen, dessen Temperatur $t_1 = 30^0$ C. und dessen Druck $1^1/_2$ Atmosphären beträgt ($p_1 = 1{,}5.10334$).

Das Volumen berechnet sich dann nach Gl. (67)

$$v_1 = \frac{R(a+t_1)}{p_1} = \frac{29{,}272\,(273+t_1)}{p_1} = 0{,}057218 \text{ Cubikmeter}$$

und dann die Constante der dem Anfangszustande entsprechenden adiabatischen Curve:

$$p_1 v_1^x = 2744{,}61\,.$$

Soll nun die Expansion des Gases ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme so weit stattfinden, bis die Spannung auf eine Atmosphäre ($p_2 = 10334$) gesunken ist, so folgt das Expansionsverhältniss

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{1{,}41}} = 1{,}333 = \frac{4}{3}\,.$$

Die Endtemperatur findet sich aus Gl. (78)

$$\frac{a+t_2}{a+t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

woraus folgt:

$$a + t_2 = 269{,}297^0$$

und daher

$$t_2 = -3{,}7^0.$$

Die Temperatur sinkt also von $+30^0$ auf $-3{,}7^0$. Die Arbeit, welche das Gas hierbei verrichtet, ist nach Gl. (79), wenn $c = 0{,}16847$ (S. 117) gesetzt wird:

$$L = \frac{c}{A}(t_1 - t_2) = 2407{,}2 \text{ Meterkilogr.}$$

und die verschwundene Wärmemenge:

$$AL = 5{,}6774 \text{ Calorien.}$$

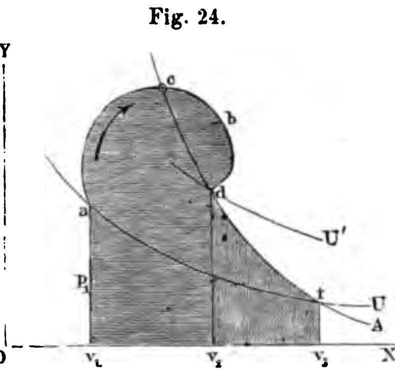
(Vergl. das Beispiel auf S. 126.)

Durch die vorstehenden Untersuchungen ist nun für permanente Gase das Gesetz festgestellt, welchem jede der drei Curven, die isothermische, isodynamische und adiabatische Curve, die wir im allgemeinen Theil unserer Untersuchungen (1. Abschnitt) bei den graphischen Darstellungen eingeführt haben, unterworfen sind.

Die Untersuchungen, welche wir bei Betrachtung der **unvollständigen, aber umkehrbaren Kreisprozesse** auf S. 82 angestellt haben, lassen sich jetzt leicht auf permanente Gase übertragen.

Denken wir uns die Gewichtseinheit Luft sei in ihrem Anfangszustand a (Fig. 24) durch das Volumen v_1 und den Druck p_1 gegeben und ändere nun arbeitsverrichtend unter Mittheilung der entsprechenden Wärmemengen und unter Ueberwindung eines dem Drucke gleichen Widerstandes Druck und Volumen nach dem Gesetze der Curve $a\,c\,b\,d$, gehe auf diesem (umkehrbaren) Wege in den Zustand d über, der durch das Volumen v_2 und den Druck p_2 gegeben ist, dann giebt die horizontal schraffirte Fläche die Arbeit, welche das Gas verrichtet hat.

Fig. 24.



Um nun die Veränderung der innern Arbeit zu ermitteln, legten wir durch den Endpunkt d die adiabatische Linie dA und durch den Anfangspunkt a die isodynamische Curve aU, die nun hier bei einem Gase gleichzeitig auch die isothermische Curve repräsentirt. Dem Durchschnittspunkte f mag die Abscisse v_3 und die Ordinate p_3 entsprechen. (Es sei dabei wiederholt erwähnt, dass die vertical schraffirte Fläche die Veränderung der innern Arbeit darstellt und dass beide schraffirten Flächen vereinigt die in Arbeit gemessene Wärmemenge geben, welche dem Gase auf dem Wege $acbd$ von aussen mitzutheilen war.) Für ein Gas lassen sich nun jetzt die beiden Curven leicht ziehen; die Curve aU ist eine gleichseitige Hyperbel von der Gleichung

$$pv = p_1 v_1$$

und der Verlauf der adiabatischen Linie bestimmt sich durch die Gleichung

$$p v^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa}.$$

Die Coordinaten p_3 und v_3 des Durchschnittspunktes f bestimmen sich dann aus den Gleichungen

$$p_3 v_3 = p_1 v_1, \quad p_3 v_3^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa},$$

woraus sich, wenn man die dem Anfangs- und Endzustande a und d entsprechenden Temperaturen t_1 und t_2 aus den Gleichungen

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \text{ und } p_2 v_2 = R(a + t_2)$$

bestimmt, leicht findet:

$$v_3 = v_2 \left(\frac{a + t_2}{a + t_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \text{ und } p_3 = p_2 \left(\frac{a + t_1}{a + t_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

Die Veränderung der innern Arbeit (vertical schraffirte Fläche) ist nach Obigem einfach:

$$\frac{c}{A}(t_2 - t_1).$$

Wir fanden nun aber auf Grund der Gl. (47), S. 83, im Weitern noch den Satz, dass das Integral

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

eine constante Grösse sei, auf welchem umkehrbaren Wege auch ein Körper von einem Punkte a einer adiabatischen Linie nach irgend einem andern Punkte (c, d oder f Fig. 24) einer zweiten adiabatischen Linie übergeht. Es fragt sich nun, welche Form vorstehender Ausdruck bei Gasen annimmt und ob das angegebene Gesetz bestätigt wird.

Setzen wir die bekannte Beziehung $S = a + t$ ein, so folgt:

$$P = \int \frac{dQ}{A(a + t)}$$

Nun ist für Gase nach Gl. (65)

$$dQ = \frac{c}{R}(v\,dp + \varkappa p\,dv)$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit Apv und berücksichtigt man die Beziehung

$$R(a + t) = pv,$$

so folgt:

$$\frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A}\left(\frac{dp}{p} + \varkappa\frac{dv}{v}\right)$$

oder

$$dP = \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A}\,d\,\text{logn.}\,(pv^{\varkappa})$$

Hieraus folgt durch Integration, für den Uebergang aus dem Anfangszustand (p_1, v_1) in den Endzustand (p_2, v_2):

$$P = \int \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A}\,\text{logn.}\,\frac{p_2 v_2^{\varkappa}}{p_1 v_1^{\varkappa}} \tag{81}$$

Nun ist aber $p_1 v_1^{\varkappa}$ die Constante der durch a gehenden und $p_2 v_2^{\varkappa}$ die Constante der durch d gehenden adiabatischen Linie, und daher, wenn man diese Constanten mit C_1 und C_2 bezeichnet

$$P = \frac{c}{A}\,\text{logn.}\,\frac{C_2}{C_1}$$

Es findet sich also obige Behauptung für Gase vollständig stätigt. Der Werth P des angezeigten Integrales hängt nur n den Constanten der beiden durch a und d gehenden adia-.tischen Linien und von der Gewichtscapacität bei constantem olumen für das betreffende Gas ab; gleichgültig, auf welcher irve der Uebergang stattfand, und welche Lage der Ausgangsunkt a auf der ersten und der Endpunkt d auf der zweiten irve haben mag. Hätte der Uebergang auf der isodynamischen ler was hier dasselbe ist, auf der isothermischen Curve stattfunden, d. h. wäre das Gas aus dem Anfangszustand a (Fig. 24) if der Curve $a\,U$ unter Constanthalten der Temperatur in den ndzustand f übergegangen, so wäre

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 = R\,(a + t_1)$$

nd daher nach Gl. (81)

$$P = \frac{c}{A} \operatorname{logn.} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\varkappa - 1}$$

$$= \frac{c\,(\varkappa - 1)}{A} \operatorname{logn.} \frac{v_2}{v_1}$$

er mit Rücksicht auf Gl. (66)

$$P = \frac{A\,R\,(a + t_1)}{A\,(a + t_1)} \operatorname{logn.} \frac{v_2}{v_1}$$

Nun ist aber nach Gl. (74) die Wärmemenge Q_1, welche bei esem Uebergange (bei constanter Temperatur) zuzuführen ist:

$$Q_1 = A\,R\,(a + t_1) \operatorname{logn.} \frac{v_2}{v_1}$$

her folgt endlich auch:

$$P = \frac{Q_1}{A\,(a + t_1)}$$

n vollständiger Uebereinstimmung mit dem durch Gl. (48), (S. 84 usgesprochenen Satze.

Verhalten der Gase, wenn die Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege erfolgen.

Bei den Untersuchungen, die wir im Vorigen angestellt haben und bei Aufstellung der Hauptgleichungen haben wir vorausgesetzt, dass das Gas während der mit ihm vorgenommenen Aenderungen fortwährend einem äussern Drucke ausgesetzt ist, der in jedem Augenblicke dem Gasdrucke gleich oder nur unendlich wenig davon verschieden ist. In den meisten Fällen der Anwendung ist nun auch diese Bedingung erfüllt, aber auch nur in solchen Fällen darf man die Hauptgleichungen (65) unmittelbar verwenden.

Es wird zweckmässig sein, einige Fälle dieser Art noch näher zu behandeln, um die Bedeutung und die Art des Gebrauches der allgemeinen Gln. 65 bis 67 noch mehr hervortreten zu lassen. Wir haben zwar schon durch die Untersuchung über den Verlauf der isothermischen, der isodynamischen und der adiabatischen Curve der Gase die wichtigsten Probleme dieser Art erledigt, doch kommen noch einige andre Probleme vor, die hier Erwähnung verdienen. Gewöhnlich ist das Gesetz gegeben, nach welchem sich der äussere Druck, oder was hier dasselbe ist, der Gasdruck mit dem Volumen ändern soll und es fragt sich, welches der Endzustand des Gases ist, nach welchem Gesetze die Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfinden muss, und welches die Aenderung der innern Arbeit ist.

Problem 1. Verhalten des Gases bei der Erwärmung bei constantem Volumen.

Denken wir uns, die Gewichtseinheit eines Gases vom Volumen v_1 dem Drucke p_1 und der Temperatur t_1 soll ohne Aenderung des Volumens bis zur Temperatur t_2 erwärmt werden, so findet sich zunächst aus den beiden Gleichungen: (S. Gl. 67)

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \quad \text{und} \quad p_2 v_1 = R(a + t_2)$$

durch Division der Druck p_2 am Ende

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{a + t_2}{a + t_1} \qquad (82)$$

Ferner folgt nach der zweiten Gl. (65), weil v constant, also $= 0$ ist

$$dQ = c\,dt$$

er durch Integration die erforderliche Wärmemenge

$$Q = c\,(t_2 - t_1) \tag{83}$$

Die Veränderung der innern Arbeit findet sich endlich nach l. 70):

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}\,(t_2 - t_1) = \frac{Q}{A} \tag{84}$$

oraus folgt, dass hier die ganze zugeführte Wärme zur Erhöhung er innern Arbeit verwendet wird; bei Gasen besteht diese Arbeit ben nur in Schwingungsarbeit, deren Vermehrung sich direct urch die Temperatur bestimmt.

Es versteht sich von selbst, dass die Gleichungen auch für en umgekehrten Fall, d. h. für Abkühlung, für Wärmeentziehung elten; dann ist einfach $t_2 < t_1$ und $p_2 < p_1$ und es stellt sich Q sowohl, als die Veränderung der innern Arbeit negativ heraus.

Wäre z. B. die Anfangstemperatur $t_1 = 30^0$ und der Anfangsdruck $1\frac{1}{2}$ Atmosphären und es sollte das Gas so weit abgekühlt werden, bis der Druck nur noch eine Atmosphäre beträgt, so wäre in Gl. (82)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3}$$

und dann folgt die Endtemperatur

$$t_2 = \frac{p_2}{p_1}\,(a + t_1) - a = -71^0.$$

Die Wärmemenge Q ist nach (83)

$$Q = 0{,}16847\,(-71 - 30) = -17{,}015 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Das negative Zeichen bedeutet, dass hier Wärmeentziehung stattfinden muss.

Die Veränderung der innern Arbeit (Abnahme) beträgt

$$\frac{Q}{A} = 424\,.\,17{,}015 = 7214{,}4 \text{ Meterkilogr.}$$

Problem 2. Verhalten des Gases bei der Erwärmung unter constantem Drucke.

Sei der Anfangszustand, wie vorhin, durch die Werthe p_1, v_1 und t_1 gegeben; soll nun die Ausdehnung oder Zusammendrückung bei constantem Drucke soweit erfolgen bis das Volumen v_2 geworden ist, so folgt zunächst nach derselben Gl. (67) wie vorhin die Endtemperatur t_2 aus

$$\frac{a+t_2}{a+t_1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{85}$$

Ferner ist nach der letzten der Gln. (65) weil p constant, also $dp = 0$ ist

$$dQ = \varkappa c\, dt,$$

also die erforderliche Wärmemenge

$$Q = \varkappa c\, (t_2 - t_1) \tag{86}$$

Die Veränderung der innern Arbeit ist wie immer nach Gl. (70)

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A} (t_2 - t_1)$$

und die äussere Arbeit folgt, weil p_1 constant ist

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = p_1\, (v_2 - v_1) = R\, (t_2 - t_1)$$

Wäre z. B. die Temperatur der Gewichtseinheit eines Gases $t_1 = 30$ und sollte das Volumen bei constantem Drucke von v_1 auf $v_2 = \frac{4}{3} v_1$ wachsen, so findet sich nach (85) die Endtemperatur $t_2 = 131^0$.

Die erforderliche Wärmemenge ist wegen $\varkappa c = 0{,}23751$

$$Q = 23{,}9885 \text{ Calorien.}$$

Die Veränderung der innern Arbeit folgt

$$U_2 - U_1 = 7214{,}4 \text{ Meterkilogr.}$$

und die äussere Arbeit

$$L = 29{,}272\, (131 - 30) = 2956{,}5 \text{ Meterkilogr.}$$

Beide Arbeiten zusammengenommen und in Wärme ausgedrückt geben

$$\frac{7214{,}4 + 2956{,}5}{424} = 23{,}988 \text{ Calorien},$$

d. h. es ergiebt sich die zugeführte Wärmemenge, wie das nach den Grundsätzen, auf denen obige Formeln ruhen, sein muss.

Problem 3. Verhalten des Gases, wenn die Zustandsänderungen nach dem Gesetze $pv^2 = \text{Const.}$ erfolgen sollen.

Behalten wir hier die bisherige Bezeichnung bei, so ist das Gesetz der Druck- und Volumenänderung

$$p\,v^2 = p_1\,v_1^{\,2} = p_2\,v_2^{\,2}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{p_2\,v_2}{p_1\,v_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

oder nach Gl. (67)

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

wonach sich die Endtemperatur t_2 berechnet. Man erkennt, dass mit einer Ausdehnung von v_1 auf v_2 eine starke Temperaturerniedrigung eintritt. Die Arbeit, welche das Gas bei seiner Ausdehnung verrichtet, ist:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1\,v_1^{\,2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^2} = p_1 v_1^{\,2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)$$

der mit Benutzung der zuerst gegebenen Gleichung

$$L = p_1\,v_1 - p_2\,v_2$$

g. nach Gl. (67) auch

$$L = R\,(t_1 - t_2)$$

Die Veränderung der innern Arbeit beträgt in allen Fällen

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}\,(t_2 - t_1)$$

und endlich die zuzuführende Wärmemenge

$$Q = A (U_2 - U_1) + AL$$
$$= - c (t_1 - t_2) + AR (t_1 - t_2)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (66)

$$Q = c (\varkappa - 2) (t_1 - t_2)$$

welcher Werth, ebenso wie die innere Arbeit negativ ausfällt, wenn eine Ausdehnung des Gases stattfindet, und positiv bei Compression. Es liess sich dieses Resultat erwarten, da die angenommene Spannungscurve sich rascher, als die adiabatische Linie der Abscissenaxe nähert.

Soll der Druck sich nach dem angenommenen Gesetze ändern, so muss während der Expansion des Gases noch Wärme abgeleitet werden und zwar ist für Luft, weil $c = 0,16847$ und $\varkappa = 1,410$ ist, nach der letzten Gleichung

$$Q = - 0,09940 (t_1 - t_2).$$

Die innere Arbeit nimmt daher aus doppelten Gründen ab, ein Theil wird als Wärme dem Gase direct entzogen, der andre Theil erscheint als äussere Arbeit.

Zahlenbeispiel: Es soll die Gewichtseinheit Luft von $t_1 = 30^0$ Temperatur nach dem angenommenen Gesetze von v_1 auf $v_2 = \frac{4}{3} v_1$ expandiren; dann ist nach vorstehenden Gleichungen die Endtemperatur

$$t_2 = \frac{v_1}{v_2} (a + t_1) - a = - 45,75.$$

Die äussere Arbeit folgt dann:

$$L = R (t_1 - t_2) = 29,272 (30 + 45,75) = 2217,35 \text{ Meterkil.}$$

Die Veränderung der innern Arbeit

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A} (t_2 - t_1) = - 5410,92 \text{ Meterkil.}$$

Endlich folgt die Wärmemenge:

$$Q = - 0,09940 (30 + 45,75) = - 7,530 \text{ Calorien.}$$

Das negative Zeichen deutet, wie erwähnt, darauf hin, dass man während der Expansion im vorliegenden Falle dem Gase

eine Wärmemenge von 7,530 Cal. entziehen müsste; bei der Compression in gleicher Art wäre diese Wärmemenge zuzuführen.

Die Resultate aller einzelnen Probleme, die bis jetzt behandelt wurden, lassen sich durch allgemeinere Formeln darstellen.

Nehmen wir allgemein an, die Curve der Druckänderungen befolge das Gesetz:

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

wobei m und n beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten, so folgt unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung

$$p^m v^n = p_1^m v_1^n = p_2^m v_2^n \tag{87}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$p_1 v_1 \cdot v_1^{\frac{n}{m} - 1} = p_2 v_2 \cdot v_2^{\frac{n}{m} - 1}$$

oder nach Gl. (67) zur Berechnung der Temperatur t_2 die Formel:

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n-m}{m}} \tag{88}$$

Die Arbeit des Gases ergiebt sich:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1 v_1^{\frac{n}{m}} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^{\frac{n}{m}}} = \frac{m}{n-m} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n-m}{m}}\right].$$

Benutzt man hier zur weitern Umformung Gl. (88) und setzt man $p_1 v_1 = R\,(a + t_1)$, so ergiebt sich auch

$$L = \frac{m}{n-m} R\,(t_1 - t_2)$$

oder wenn man noch R aus Gl. (66) bestimmt

$$L = \frac{m}{n-m} \cdot \frac{c\,(\varkappa - 1)}{A}\,(t_1 - t_2) \tag{89}$$

Die Veränderung der innern Arbeit ist nach (Gl. 70)

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1) \tag{90}$$

und endlich die Wärmemenge Q, welche dem Gase zugeführt werden muss

$$Q = A(U_2 - U_1) + L$$

oder die vorigen Werthe substituirt und reducirt, giebt:

$$Q = \frac{m\varkappa - n}{n - m} c\,(t_1 - t_2) \tag{91}$$

Durch die vorstehenden Formeln ist die Lösung einer unendlichen Menge von Problemen gegeben; sie umfassen zunächst auch alle einzelnen Fälle, die wir oben schon behandelt haben.

Setzen wir $m = 1$ und $n = 2$, so ergeben sich alle Formeln des oben behandelten dritten Problems.

Setzen wir $n = 0$ so ergiebt Gl. (87)

$$p = p_1$$

d. h. Volumenänderung bei constantem Drucke; es erscheinen die einzelnen Formeln des zweiten Problems. Die Substitution $m = 0$ löst ebenso das erste Problem, Verhalten des Gases bei der Erwärmung unter constantem Volumen.

Ferner giebt die Annahme $\frac{n}{m} = \varkappa$ nach Gl. (91) $Q = 0$ und auch im Uebrigen erscheinen die Gleichungen, welche der Druckänderung nach der adiabatischen Linie entsprechen.

Nur in dem Falle $n = m$ versagen die Formeln ihre Dienste: Gl. (88) zeigt aber, dass unter dieser Annahme die Temperatur constant bleibt, es ist $t_2 = t_1$, die Formeln (89) und (91) geben dann die unbestimmten Werthe

$$L = \frac{0}{0} \text{ und } Q = \frac{0}{0}$$

Dieser Ausnahmefall entspricht aber der Druckänderung nach der isothermischen und isodynamischen Curve und für diesen Fall sind oben (S. 124) die Resultate gegeben worden.

Denken wir allgemein an Expansion, an eine Ausdehnung

des Gases, so fällt nach Gl. (91) die Wärmemenge Q positiv aus, d. h. es ist eine Mittheilung von Wärme nöthig, wenn

$$\frac{n}{m} < \varkappa.$$

Ist auch noch $\frac{n}{m} < 1$, so findet nach Gl. (88) Temperaturzunahme statt.

Gl. (91) zeigt ferner, dass in allen diesen Fällen die Wärmemenge Q der Temperaturänderung $t_1 - t_2$ direct proportional ist (dasselbe ist nach Gl. (89) und (90) mit der äussern und der Veränderung der innern Arbeit der Fall). Es ist daher der Werth

$$\frac{m\varkappa - n}{m - n}\, c \qquad (92)$$

in Gl. (91) im gewöhnlichen Sprachgebrauche als die spezifische Wärme des Gases für das Aenderungsgesetz

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

anzusehen.

Es lässt sich übrigens leicht nachweisen, dass nur unter Annahme des vorstehenden Gesetzes der Druckänderungen von einer spezifischen Wärme des Gases im angegebenen Sinne die Rede sein kann; mit andern Worten, dass nur unter dieser Annahme die mitgetheilte Wärmemenge der Temperaturerhöhung proportional ist.

Setzen wir nämlich

$$dQ = \lambda dt,$$

wo λ irgend eine constante Grösse bedeutet, so ergiebt sich durch Substitution in die erste der Gleichungen (65)

$$dQ = \lambda dt = \frac{c}{R}(v dp + \varkappa p dv).$$

Aus der Differentiation der Gl. (67) folgt aber

$$dt = \frac{1}{R}(v dp + p dv)$$

und das in voriger Gleichung benutzt, giebt

$$v dp (\lambda - c) = p dv (\varkappa c - \lambda)$$

oder durch pv dividirt:

$$(\lambda - c)\frac{dp}{p} = (\varkappa c - \lambda)\frac{dv}{v}$$

und die Integration dieser Gleichung führt, weil λ, c und $\varkappa$ constante Grössen sind, wie man leicht verfolgen kann, auf die gegebene Form

$$p^m v^n = \text{Const.},$$

wobei $m = \lambda - c$ und $n = \lambda - \varkappa c$ bedeutet.

Die Substitution dieser Werthe in Gl. (92) giebt dann, wie es der Voraussetzung gemäss zu erwarten ist:

$$\frac{m\varkappa - n}{m - n}c = \lambda.$$

Für jede andere Annahme in Betreff des Gesetzes der Druckänderung ist dann die Wärmemenge Q nicht mehr einfach der Temperaturänderung proportional; vielmehr wird sich im Allgemeinen dann der Werth Q als eine Funktion von t und v oder t und p herausstellen.

Verhalten der Gase, wenn die Zustandsänderungen auf nicht umkehrbarem Wege erfolgen.

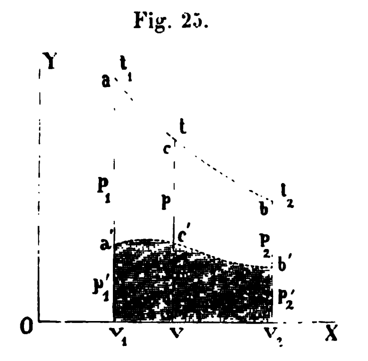
Bei den obigen Untersuchungen wurde jederzeit vorausgesetzt, dass ein Gas bei seiner Expansion einen seinem Drucke gleichen Widerstand zu überwinden habe, dass also in jedem Momente Gleichheit zwischen dem äussern Drucke und dem Gasdrucke stattfinde. Dieser Fall tritt jederzeit ein, wenn die Ausdehnung verhältnissmässig langsam erfolgt.

Ist nun aber der äussere Druck während der Zustandsänderungen im Allgemeinen kleiner als der Gasdruck, ein Fall, der hier allein in Betracht kommt, so gestalten sich die Verhältnisse wesentlich anders, wie das schon im ersten Abschnitte S. 85 u. f. erläutert worden ist; in diesem Falle gelten für Gase die Hauptgleichungen nicht mehr und man ist auch dann im Allgemeinen nicht im Stande, die Zustandsänderungen Schritt auf Schritt zu verfolgen, sondern kann nur unter gewissen Voraus-

setzungen den Endzustand des Gases, wenn das Gleichgewicht wieder eingetreten ist, ermitteln.

Denken wir uns in einem Cylinder durch einen beweglichen, aber gewichtslosen Kolben die Gewichtseinheit eines Gases eingeschlossen; der Druck des Gases sei p_1 und das Volumen v_1; das Gas befinde sich im Ruhezustand und der Kolben sei auch zunächst zur Erhaltung des Gleichgewichtes pro Flächeneinheit mit p_1 belastet. Es soll nun plötzlich der äussere Druck auf den kleinern Werth p'_1 sinken. Die Folge davon wird eine plötzliche Ausdehnung des Gases sein, der Kolben wird zurückgetrieben und der äussere veränderliche oder constante Druck p' (Fig. 25) wird vom Gase überwunden. Sobald das Volumen den Werth v_2 erreicht hat, in welchem Augenblicke der äussere Druck p'_2 ist, soll der Kolben plötzlich festgehalten werden. Im Momente des Anhaltens des Kolbens ist aber offenbar das Gas in heftiger, offener, wirbelnder Bewegung, das Gas wird erst nach und nach in den Ruhezustand übergehen und dabei wird sich die offene Bewegung in Molekularbewegung, d. h. in Wärme umsetzen; der Druck des Gases gegen den Kolben erhöht sich rasch vom Werthe p'_2 auf den Werth p_2 und in gleichem Maasse muss, da der Kolben festgehalten werden soll, der Druck von aussen gegen den Kolben gesteigert werden. Ist nun beim Druck p_2 und Volumen v_2 der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten, so hat doch hier der Uebergang aus dem Anfangszustand a in den Endzustand b in ganz anderer Art stattgefunden, als bei den bisher behandelten Fällen; es steht nämlich, wenn wir noch annehmen, dass während des Ueberganges die Wärmemenge Q zugeführt wurde, diese Wärmemenge in gar keiner Beziehung zur Aenderung des äussern Druckes und zu der äussern Arbeit. Früher war durch Angabe des Gesetzes, nach welchem sich der Druck mit dem Volumen ändert, sofort auch das Gesetz der Wärmezuführung durch Benutzung der Gleichungen (65) bestimmt. Hier aber erfordert die Lösung der Aufgabe noch eine weitere Angabe.

Fig. 25.



Stellen wir uns vor, es sei der Anfangszustand a durch die Werthe p_1, v_1 und t_1 und der Endzustand b durch die Werthe p_2, v_2 und t_2 bestimmt; ferner sei gegeben das Gesetz, nach welchem sich der äussere Druck p' mit dem Volumen ändert, dann ist für Gase die Veränderung der innern Arbeit $U_2 - U_1$; da diese unabhängig von der Art des Ueberganges ist und da im Anfange und am Ende der Gleichgewichtszustand vorhanden ist, so folgt wie früher:

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1)$$

Die äussere Arbeit hingegen

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p' dv$$

und daher ergiebt sich die Wärmemenge Q, die während des Ueberganges zugeleitet wurde:

$$Q = A(U_2 - U_1) + AL$$

oder

$$Q = c(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p' dv \tag{93}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der früher benutzten Gl. (73) nur dadurch, dass p' statt p unter dem Integral erscheint; der Druck p' oder vielmehr sein Anfangs- und Endwerth p'_1 und p'_2 ist aber unabhängig von den Temperaturen t_1 und t_2, es folgt daher auch, dass im vorliegenden Falle die Art und Weise der Wärmemittheilung gar nicht weiter in Betracht kommt und dass nur der Gesammtbetrag Q der mitgetheilten Wärmemenge zu bestimmen ist.

Gl. (93) genügt nun schon zur Lösung hierher gehöriger Probleme. Ist z. B. der Endzustand $(t_2 v_2 p_2)$ vorgeschrieben und gleichzeitig das Gesetz der Aenderung des äussern Druckes p' während der Ausdehnung des Gases gegeben, so berechnet sich die Wärmemenge Q, welche während des Ueberganges dem Gase mitzutheilen ist; ist umgekehrt die Wärmemenge Q gegeben, ebenso das Expansionsverhältniss $\frac{v_2}{v_1}$ und lässt sich die äussere

Arbeit berechnen, so bestimmt sich dann auch durch Gl. (93) der Endzustand des Gases (nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes); dabei sind aber jederzeit die Bedingungen $p'_1 < p_1$ und $p'_2 \leqq p_2$ als erfüllt zu betrachten.

Die Behandlung spezieller Fälle möge zur Erläuterung des Vorstehenden dienen.

Problem 1. »Angenommen, es sei der Zustand a der Gewichtseinheit Gas durch die Werthe p_1, v_1 und t_1 bestimmt (Fig. 25). Das Gas soll sich auf das Volumen v_2 unter Ueberwindung eines äussern constanten Druckes $p' < p_1$ ausdehnen und zwar ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme. Man fragt nach dem Endzustande des Gases.«

Hier ist in Gl. (93) $Q = 0$ und p' constant, daher folgt

$$0 = c\,(t_2 - t_1) + Ap'\,(v_2 - v_1) \tag{94}$$

und die äussere Arbeit des Gases

$$L = p'\,(v_2 - v_1) = \frac{c}{A}\,(t_1 - t_2) \tag{95}$$

Aus Gl. (94) bestimmt sich die Endtemperatur t_2 (nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes) und dann, weil das Endvolumen v_2 als bekannt angenommen wurde, der Enddruck p_2 aus der Gleichung

$$p_2 v_2 = R\,(a + t_2)$$

Wäre statt des Endvolumens v_2 der Enddruck p_2 vorgeschrieben, so bestimmt man aus vorstehender Gleichung den Werth v_2 und substituirt ihn in Gl. (94); das giebt nach einigen einfachen Reductionen zur Berechnung des Endvolumens v_2 die Formel:

$$v_2 = v_1\,\frac{p_1 + (\varkappa - 1)\,p'}{p_2 + (\varkappa - 1)\,p'} \tag{96}$$

Die Endtemperatur t_2 berechnet sich aus der Gleichung

$$a + t_2 = \frac{p_2 v_2}{R}$$

und endlich ergiebt sich für die äussere Arbeit L durch Substitution des Werthes v_2 in Gl. (95)

$$L = p' v_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2 + (\varkappa - 1) p'} \tag{97}$$

Für den Grenzfall, dass nämlich der Enddruck p_2 des Gases gleich dem äussern Drucke p' geworden ist, geben vorstehende Gleichungen das Expansionsverhältniss

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1 + (\varkappa - 1) p_2}{\varkappa p_2} = \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{p_1}{p_2} + \varkappa - 1 \right)$$

und die äussere Arbeit folgt:

$$L = \frac{(p_1 - p_2) v_1}{\varkappa}$$

Wäre z. B. in dem zuletzt erwähnten Falle der Anfangsdruck des Gases $1\frac{1}{2}$ Atmosphäre, die Anfangstemperatur $t_1 = 30^0$ und soll sich das Gas unter Ueberwindung eines äussern Druckes von 1 Atmosphäre so weit ausdehnen, bis der Enddruck p_2 des Gases ebenfalls eine Atmosphäre beträgt, so findet sich nach Vorstehendem das Expansionsverhältniss

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1,410} \left(\frac{1,5}{1} + 0,410 \right) = 1,3546$$

die Endtemperatur aus der Formel

$$a + t_2 = \frac{p_2 v_2}{R} = \frac{p_2}{p_1} \frac{v_2}{v_1} (a + t_1) \quad \text{oder} \quad t_2 = + 0,629$$

Die äussere Arbeit des Gases:

$$L = \frac{(p_1 - p_2) v_1}{\varkappa} = \frac{p_1 - p_2}{\varkappa p_1} R (a + t_1) = 2096,78 \text{ Meterkilogr.}$$

Der letzte Werth ergiebt zugleich die Veränderung (Abnahme) der innern Arbeit an.

Problem 2. »Die Gewichtseinheit eines Gases ist durch den Druck p_1, das Volumen v_1 und die Temperatur t_1 in ihrem Anfangszustand bestimmt. Dieses Gasquantum soll sich ohne Ueberwindung eines äussern Druckes p' auf das Volumen v_2 ausdehnen. Wenn nun während dieser Ausdehnung dem Gase von aussen Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird, welches ist der Endzustand desselben?«

Hier ist in Gl. (93) $p' = 0$ und ebenso $Q = 0$ zu setzen. daher folgt

$$0 = c(t_2 - t_1)$$

oder

$$t_2 = t_1$$

und daher der Enddruck

$$p_2 = \frac{p_1 v_1}{v_2}$$

Es ergiebt sich sonach das merkwürdige Resultat, dass unter den angegebenen Voraussetzungen, wenn am Ende der Ausdehnung der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten ist, die Temperatur des Gases wieder die anfängliche ist.

Dieser Fall tritt ein, wenn man ein mit Gas gefülltes Gefäss mit einem luftleeren Raume verbindet; nach der Verbreitung des Gases im ganzen Raume und nach dem Eintritte der Ruhe müsste den Rechnungsresultaten nach sich die Temperatur wie anfangs herausstellen. Dieser Satz ist durch Versuche von Joule*) vollständig bestätigt worden. In einem Wassercalorimeter befanden sich zwei kupferne Ballons, verbunden durch eine, mit einem Hahne verschliessbare Röhre. Der eine Ballon enthielt Luft von 21 Atmosphären Pressung, der andere war luftleer. Nach Eröffnung des Hahnes und nachdem das Gleichgewicht im Innern der Gefässe hergestellt war, zeigte das Calorimeter keinerlei Temperaturänderung.

Weiter unten werden wir auf diesen Versuch zurückkommen und auch die Veränderung in jedem einzelnen Ballon untersuchen; hier war nur der Nachweis zu liefern, dass im Ganzen keine Temperaturänderungen unter den gestellten Annahmen auftreten werden.

Die hier behandelten Probleme genügen vollständig zur Erklärung der Art der Benutzung unserer Gl. (93); es mögen daher nun im Weitern die Sätze, die wir schon im allgemeinen Theile (S. 90) in Betreff der Vorgänge bei den Zustandsänderungen eines Körpers auf nicht umkehrbarem Wege vorgeführt haben, speziell auf Gase Anwendung finden.

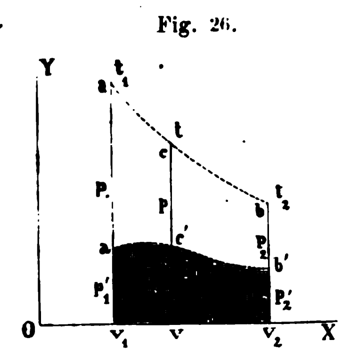
Es wurde vorhin schon bemerkt, dass im Allgemeinen bei

*) Joule. Phil. Mag. Vol. XXVI. 1848.

den Problemen vorliegender Art auf die **Art und Weise** der Wärmemittheilung während des Ueberganges des Gases aus dem einen Gleichgewichtszustand in den andern nichts ankomme. Die Gl. (93) führt schon zur Beantwortung der gewöhnlichen Frage nach dem Endzustande des Gases, wenn man nur die **ganze** Wärmemenge Q kennt, die während des Ueberganges zu- oder abgeführt wurde.

Es kommen nun aber Fälle vor, wo man anzugeben hat, in **welcher Art** die Wärmemittheilung erfolgen soll. Zu dieser Angabe bietet sich ein sehr einfaches Mittel. Denken wir uns, die Grössen p_1, v_1 und t_1 geben den Anfangszustand a eines Gases (Fig. 26), welches in den Endzustand b ($p_2\, v_2\, t_2$) übergehen soll unter Ueberwindung eines äussern Druckes p', dessen Aenderungen durch die Curve $a'\, b'$ angegeben wird. Angenommen nun während des Ueberganges, im Augenblicke wo das Volumen von v_1 auf v gewachsen war, werde plötzlich die Wärmemittheilung und Ausdehnung unterbrochen gedacht, so wird bis zum Eintritt des Ruhezustandes der Druck von p' auf p wachsen und durch diesen Druck p und das Volumen v ist nun auch sogleich die Temperatur t im Zustande c und die Zunahme der innern Arbeit $U - U_1$ gegeben und sonach auch die Wärmemenge, welche auf dem Wege $a'\, c'$ mitgetheilt wurde. Man erkennt daraus, dass die Curve $a c b$ auf das **Gesetz** der Wärmemittheilung führt und dass man bei der Zustandsänderung eines Körpers auf **nicht** umkehrbarem Wege zwei Curven $a c b$ und $a' c' b'$ kennen oder bestimmen muss, wenn man vollständigen Einblick in den Vorgang gewinnen will. Die eine Curve $a c b$ führt auf das **Gesetz** der Wärmemittheilung, die andre Curve $a' c' b'$ giebt das Aenderungsgesetz des äussern Druckes p', also die äussere Arbeit an. Ist der Prozess umkehrbar, so fallen beide Curven zusammen.

Fig. 26.



Wir werden nun in der Folge unter der Temperatur t eines Körpers in einem gewissen Augenblicke seiner Zustandsänderungen diejenige **Temperatur verstehen, welche der Körper**

annimmt, wenn in diesem Augenblicke Ausdehnung und Wärmezuführung unterbrochen gedacht wird und der Körper in den Ruhezustand übergehen **würde.**

Wäre der Gleichgewichtszustand bei Erreichung des Volumens v (Fig. 26) hergestellt und bis dahin die Wärmemenge Q zugeführt worden und wäre die äussere Arbeit L (Fläche $v_1 a' c' v$), so bestände die Gleichung

$$Q = A(U - U_1) + AL$$

hätte hingegen die Unterbrechung beim Volumen $v + dv$ stattgefunden, so hätte man:

$$Q + dQ = A(U + dU - U_1) + A(L + dL)$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$dQ = A(dU + dL)$$

oder weil hier

$$dL = p'dv$$

ist:

$$dQ = A(dU + p'dv)$$

oder

$$dQ = A(dU + pdv) - A(p - p')dv$$

In dieser Gleichung bedeutet aber das Glied $A(dU + pdv)$ die Wärmemenge, welche dem Körper bei der Ausdehnung von v auf dv mitzutheilen wäre, wenn die Zustandsänderungen auf dem umkehrbaren Wege acb stattfinden würden, bezeichnen wir diesen Werth mit dQ', so folgt

$$dQ = dQ' - A(p - p')dv \tag{98}$$

und hier liessen sich nun für dQ' die allgemeinen Gleichungen III, S. 77 oder für Gase die Gln. (65) verwenden, dabei aber den Druck p und die Temperatur t in der Art verstanden, wie es vorhin angegeben wurde.

Dividirt man vorstehende Gleichung auf beiden Seiten mit $AS = A(a + t)$, so findet sich für die ganze Ausdehnung von v_1 auf v_2

[illegible]

[illegible] dass das Integral

[illegible]

[illegible] eines Körpers aus einem gewissen [illegible] in einen gegebenen Endzustand p_2, v_2 [illegible] Werth behält, wenn der Uebergang [illegible] Wege erfolgt, vermöge der ganzen Ab-[illegible] dieses Integral, das wir wieder [illegible] dem Gesetze der Wärme-[illegible]

[illegible] mit dem Integrale auf der linken Seite [illegible]

Da [illegible] auf Grund unserer Voraussetzungen $p > p'$ ist, [illegible] das Integral

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{p-p'}{a+t}\, dv$$

[illegible] daher folgt, dass bei den Zustands-[illegible] auf nicht umkehrbarem Wege das [illegible]

[illegible]

[illegible] auf welches wir schon [illegible] Wege gelangt sind.

[illegible] einem Wege wieder in [illegible] nur auf umkehrbarem [illegible] Compression stattfindet), so wäre [illegible] umkehrbaren Kreisprozesses [illegible] aber

$$\int \frac{d\,Q}{A\,(a+t)} = -\int_{v_1}^{v_2} \frac{(p-p')\,d\,v}{a+t}$$

und dieser Werth ist es, den wir in Gl. (50) auf S. 93 mit N bezeichnet haben.

Vorstehende Gleichungen gelten noch für alle Körper; wenden wir sie jetzt speziell auf Gase an, so schreibt sich Gl. (99) mit Rücksicht auf die Beziehung

$$p\,v = R\,(a+t)$$

zunächst in der Form:

$$\int \frac{d\,Q}{A\,(a+t)} = P - \int_{v_1}^{v_2} R\left(1 - \frac{p'}{p}\right)\frac{d\,v}{v}$$

$$= P - R \text{ logn. } \frac{v_2}{v_1} + R \int_{v_1}^{v_2} \frac{p'}{p}\,\frac{d\,v}{v} \tag{100}$$

Hätte man das Gas in den Anfangszustand zurückgeführt, so wäre für diesen nicht umkehrbaren Kreisprozess $P = 0$, sonach

$$\int \frac{d\,Q}{A\,(a+t)} = -R \text{ logn. } \frac{v_2}{v_1} + R \int_{v_1}^{v_2} \frac{p'}{p\,v}\,d\,v$$

und fand dabei die Ausdehnung statt, ohne dass das Gas einen äussern Druck zu überwinden hatte, so wäre, weil $p' = 0$ ist

$$\int \frac{d\,Q}{A\,(a+t)} = -R \text{ logn. } \frac{v_2}{v_1} \,{}^{*})$$

Die Gl. (100) lässt sich übrigens in sehr verschiedene Formen bringen.

*) Dieses eine Resultat findet sich auch bei Clausius. »Abhandlungen«. V. S. 165.

Für Gase ergab sich nach Gl. (81) allgemein

$$P = \frac{c}{A} \text{logn.} \frac{p_2 v_2^{\varkappa}}{p_1 v_1^{\varkappa}}$$

Setzt man überdies nach Gl. (66)

$$R = \frac{c}{A} (\varkappa - 1)$$

so findet sich nach leichten Reductionen auch:

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A} \text{logn.} \frac{a+t_2}{a+t_1} + \frac{c}{A} (\varkappa - 1) \int_{v_1}^{v_2} \frac{p' dv}{pv} \tag{101}$$

Für den häufigen Fall, dass die Ausdehnung des Gases **ohne** Mittheilung und Entziehung von Wärme stattfindet, also $dQ = 0$ ist, giebt Gl. (101)

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{p' dv}{pv} = \frac{1}{\varkappa - 1} \text{logn.} \frac{a+t_1}{a+t_2}$$

Hier wäre nun unter dem Integrale noch der Werth pv wegzuschaffen. Es ist aber im vorliegenden Falle nach Gl. (93)

$$0 = c(t - t_1) + A \int_{v_1}^{v} p' dv$$

oder

$$0 = \frac{c}{R} (pv - p_1 v_1) + A \int_{v_1}^{v} p' dv$$

Bestimmt man hieraus den Werth pv und substituirt man ihn in vorstehende Gleichung, so findet sich nach einfachen Reductionen die äussere Arbeit

$$\int_{v_1}^{v_2} p' dv = \frac{c}{A} (t_1 - t_2)$$

ein Resultat, das man ohne Weiteres hätte hinschreiben können, da eben hier wegen $dQ = 0$ die äussere Arbeit gleich der Veränderung der innern Arbeit sein muss.

Um noch ein Beispiel vorzuführen, möge angenommen werden, die Ausdehnung geschehe wieder auf nicht umkehrbarem Wege, die Wärmezuleitung soll aber der Art stattfinden, dass die Temperatur constant bleibt, unter Temperatur aber hier, wie vorhin ausdrücklich hervorgehoben wurde, die Gleichgewichtstemperatur verstanden.

Hier giebt Gl. (101) ohne Weiteres, weil

$$a + t_1 = a + t = a + t_2 = \frac{pv}{R}$$

ist,

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{AR} \frac{(\varkappa - 1)}{a+t} \int_{v_1}^{v_2} p' dv$$

oder wegen der Bedeutung von AR nach Gl. (66)

$$Q = A \int_{v_1}^{v_2} p' dv$$

ein Resultat, welches sich ebenfalls von selbst versteht, da unter Voraussetzung constanter Temperatur die innere Arbeit unveränderlich ist.

Diese Beispiele zeigen zur Genüge, dass man den Werth der Gl. (99) und (101) der mechanischen Wärmetheorie nicht überschätzen darf, zur Lösung der gewöhnlichen Probleme in Betreff der Ausdehnung der Gase auf nicht umkehrbarem Wege genügt vollständig die Gleichung

$$dQ = c\,dt + Ap'dv \tag{102}$$

wobei man nur unter t die Gleichgewichtstemperatur und unter p' den äussern Druck in dem betreffenden Augenblicke zu verstehen hat. Ist die Curve acb für den Gleichgewichtsdruck und die Curve $a'c'b'$ (Fig. 26) für den äussern Druck gegeben, so lassen sich mit Hülfe vorstehender Gl. (102) die verschiedensten Probleme mit Leichtigkeit lösen. Dividirt man vorstehende Glei-

chung auf beiden Seiten mit $A(a+t)$, so kommt man sofort auf die Gl. (101) und auch daraus folgt, dass diese Gleichung nichts weiter als eine Umschreibung der allgemeinen, aber einfachen Gl. (102) ist. Ob man bei Lösung gegebener Aufgaben die eine oder andre Gleichung zu Grunde legt, ist gleichgültig, im Allgemeinen wird man natürlich die einfachere Form (102) vorziehen.

Für andere Körper als Gase schreibt sich die Gl. (102) einfach:

$$dQ = A\,(dU + p'\,dv)$$

und dabei bedeutet U die ganze innere Arbeit des Körpers und dU die Veränderung derselben während der Zuführung der Wärmemenge dQ und der Ausdehnung um dv unter Ueberwindung des äussern Druckes p'; diese Aenderung der innern Arbeit lässt sich aber hier in drei Theile zerlegen; der erste Theil entspricht der Vermehrung der Schwingungsarbeit; der zweite Theil umfasst diejenige Arbeit, welche zur Veränderung der gegenseitigen Stellung der kleinsten Theile verwendet wird und der dritte Theil wird zur Veränderung der lebendigen Kraft der offnen, sichtbaren Bewegung verbraucht.

Ueber das Ausströmen der Gase aus Gefässmündungen.

Als ein besonderer Fall des Ueberganges eines Körpers auf nicht umkehrbarem Wege aus einem Zustande in einen andern ist noch die Erscheinung näher zu untersuchen, mit der man es beim Ausflusse der Gase, allgemein der flüssigen Körper, zu thun hat. Hier tritt uns nämlich der Fall entgegen, dass die elastisch flüssige Körper (wozu wir selbst die tropfbar flüssigen Körper rechnen können) sich unter Ueberwindung eines seinem Drucke gleichen Widerstandes ausdehnt, unter Mittheilung oder Entziehung von Wärme und dass dabei ein Theil der bei der Ausdehnung frei werdenden Arbeit zur Erzeugung offner Bewegung der Körperelemente verwendet wird.

Wir denken uns die Untersuchung unter der Voraussetzun

dass sowohl der Druck p_1 im Ausflussgefässe, als
in der Ebene der Mündung und derjenige in dem
ı welchem hin der Ausfluss erfolgt, **constant** er-
e und dass der Beharrungszustand der Bewegung
i. Ferner nehmen wir an, dass die beiden Räume
ine Wand getrennt sind, in welcher sich die Durch-
befindet und dass die Flüssigkeit die Mündung in
iden passirt; dass endlich auch, wie das bei allen
ı Problemen vorausgesetzt wird, der Zusammenhang
eit nicht gestört werde, mit andern Worten, dass
nterbrechungen und leeren Räume bilden.
ıstanterhalten des Druckes p_1 im Ausflussgefässe und
p_2 in der Mündungsebene denkt man sich
. folgender Art bewerkstelligt.
sflussgefäss A (Fig. 27) sei cylindrisch vom Quer-
.nd mit einem Kolben versehen, der von aussen mit
ratcinheit Querschnitt belastet ist und der während
ıens mit der Kraft $F_1 p_1$ vorwärts geschoben wird.
iter Cylinder B bilde die Vorlage, den Raum, nach
der Ausfluss erfolgt; in diesem Cylinder, dessen
F_2 gleich
·schnitte
ussmün-
ei. bewegt
Reibung ein
von aussen
itet ist; der
ıe genau mit
ıdigkeit w zurück, mit welcher die Flüssigkeit durch
; C in das cylindrische Rohr B eintritt.

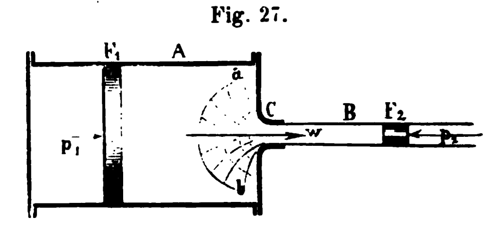


Fig. 27.

während einer gewissen Zeit der Kolben im Ausfluss-
vor- und derjenige in der Vorlage um s_2 zurückgegangen,
ar die Flüssigkeit im erstern Gefässe die Arbeit $F_1 p_1 s_1$
nen und im andern Gefässe die Arbeit $F_2 p_2 s_2$ ver-
ährend der angenommenen Zeit ist also die Arbeit

$$F_1 p_1 s_1 - F_2 p_2 s_2$$

sigkeit übertragen worden. Nun ist aber $F_1 s_1$ nichts
das Volumen der Flüssigkeit, welche in der ange-

nommenen Zeit zum Ausfluss gelangte, im Ausflussgefässe und $F_2 s_2$ das Volumen der gleichen Flüssigkeitsmenge in der Vorlage nach dem Ausflusse. Denke ich mir daher, dass in der angenommenen Zeit gerade die Gewichtseinheit Flüssigkeit ausströmte, so bedeutet $F_1 s_1$ das spezifische Volumen der Flüssigkeit (Volumen der Gewichtseinheit) im Ausflussgefässe und $F_2 s_2$ das spezifische Volumen in der Vorlage; das erstere werde mit v_1, das andere mit v_2 bezeichnet und diese Bezeichnung oben benutzt giebt dann

$$p_1 v_1 - p_2 v_2$$

für diejenige Arbeit, welche die Gewichtseinheit Flüssigkeit während des Ausströmens in Folge des Constanterhaltens des Druckes im Ausflussgefässe und der Vorlage d. h. hier der Ebene der Mündungen aufgenommen hat.

Während des Hinströmens der Flüssigkeit nach der Mündung geht der Druck aus dem Werthe p_1 in den Werth p_2 und das spezifische Volumen aus dem Werthe v_1 in den Werth v_2 über; gleichzeitig geht aber auch die Flüssigkeit aus der Ruhe in die Geschwindigkeit w über, mit welcher die Mündung C passirt wird. Diese Uebergänge finden nun aber keineswegs plötzlich statt, vielmehr hat man sich vorzustellen, dass sich von der Mündung ab nach dem Innern des Ausflussgefässes A hin ein trichterförmiger Raum bildet, in dessen äusserster Begrenzung ab (Fig. 27) die Flüssigkeit eben in Bewegung geräth und an welcher Stelle der Druck noch p_1 ist; auf dem Wege, von dieser äussersten Begrenzung abgerechnet nach der Mündung hin, findet dann eine beschleunigte Bewegung und die Druckabnahme nach einem bestimmten Gesetze statt. Verfolgt man ein einzelnes Flüssigkeitselement auf seinem Wege durch den trichterförmigen Raum, so wird sich dasselbe wegen der Druckverminderung ausdehnen, aber immer mit seinem vollen Drucke auf die benachbarten Flüssigkeitselemente wirken, genau so, wie wenn es, in einer Hülle eingeschlossen, ruhend sich unter Ueberwindung eines, seinem Drucke gleichen, Widerstandes ausdehnen würde.

Jeder Gewichtseinheit Flüssigkeit wird daher bei diesem Uebergange aus dem grössern in den kleinern Druck und aus

dem kleinern Volumen v_1 in das grössere Volumen v_2 eine Arbeit entsprechen, die sich nach der Formel

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

bestimmt. Da aber wegen des Constanthaltens der Pressungen p_1 und p_2 die Flüssigkeit nach Obigem auch noch die Arbeit

$$p_1 v_1 - p_2 v_2$$

aufgenommen hat, so beträgt die ganze gewonnene oder frei werdende Arbeit:

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

und diese Arbeit ist es, welche auf Erzeugung der Ausflussgeschwindigkeit verwendet wird. Ist w die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeitselemente durch die Mündung strömen, so folgt die Arbeit, welche in der Ebene der Mündung der Gewichtseinheit Flüssigkeit innewohnt:

$$\frac{w^2}{2g}$$

wo g die Acceleration des freien Falles darstellt, und es ergiebt sich daher für den Ausfluss unter constantem Druck allgemein die Gleichung

$$\frac{w^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 p_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv \qquad (103)$$

Geht man zum Differential über, so schreibt sich diese Gleichung auch, wie folgt:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\,d\,(pv) + p\,dv \qquad (103^a)$$

oder die auf der rechten Seite im ersten Gliede angedeutete Differentiation ausgeführt:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\,v\,dp \qquad (103^b)$$

Ein Blick auf diese Gleichungen lehrt nun sofort, dass die Aufgabe in der Fassung, wie wir sie dargelegt haben, eine unbestimmte ist. Die in Gl. (103) angedeutete Integration ist nicht ausführbar, so lange man nicht weiss, nach welchem Gesetze sich der Druck p der Flüssigkeit während ihres Hinströmens nach der Mündung mit dem Volumen v ändert. Da man hinsichtlich dieses Gesetzes unendlich verschiedene Annahmen machen kann, so ergeben sich auch unendlich viele Formeln, von denen jede auf einen andern Werth der Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeit führt. Die Annahmen hinsichtlich des Gesetzes dieser Druckänderungen in einzelnen Fällen sind nun aber keineswegs willkürlich, vielmehr wird die Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v abhängen von dem Gesetze, nach welchem der Flüssigkeit auf ihrem Wege nach der Mündung hin Wärme mitgetheilt oder entzogen wird. Wir haben daher bei der Lösung des vorliegenden Problems auch noch von der Grundgleichung (9 S. 35)

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$

Gebrauch zu machen. Hierbei bedeutet dQ die Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit Flüssigkeit an derjenigen Stelle ihres Weges nach der Mündung hin zugeführt wird, an welcher sie sich unter dem Drucke p um dv ausdehnt und dU ist die daselbst stattfindende Aenderung der innern Arbeit mit Ausschluss der Arbeitsänderung, welche der offnen Bewegung entspricht. Der Werth dU hat hier die gleiche Bedeutung, die wir ihm oben bei Ableitung der Hauptgleichungen der Wärmetheorie unter der Annahme, dass die Zustandsänderungen des Körpers auf umkehrbarem Wege stattfinden, beigelegt haben.

Die Lösung des Ausflussproblems erfordert also, wie das Vorstehende zeigt, die Benutzung zweier Gleichungen [(9) und (103)] und überdies die Kenntniss des Gesetzes, nach welchem der Flüssigkeit auf dem Wege nach der Mündung hin Wärme mitgetheilt wird*).

---

*) Auf den Zusammenhang der Gln. (103), die im Grunde längst bekannt sind, mit den Gleichungen, auf welche die mechanische Wärmetheorie führt, habe ich zuerst in meiner Schrift »Das Locomotivenblasrohr«, Zürich 1863, hin-

Die gegebenen Gleichungen lassen sich verbinden, wenn der aus Gl. (9) hervorgehende Werth von $p\,dv$ in Gl. (103ᵃ) substituirt wird, es folgt:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\,d\,(pv) - d\,U + \frac{d\,Q}{A} \qquad (104)$$

und hier sind dann für die Werthe dQ und dU die früher gegebenen für alle Körper gültigen Gleichungen zu verwenden.

Vorstehende Formeln gelten noch für Flüssigkeiten jeder Art; bevor wir sie nun speziell für Gase umformen, mögen zunächst noch folgende Bemerkungen vorausgeschickt werden.

Wir haben bei der Entwicklung der Formeln für die Ausflussgeschwindigkeit w unter Zugrundelegung der Figur 27 S. 159 angenommen, dass in der Ebene der Mündung der Druck p_2 herrsche und dass die Flüssigkeit in ein Rohr B hineinströme, dessen Querschnitt F_2 gleich dem Mündungsquerschnitt sei und in welchem ein Kolben mit der Geschwindigkeit w vor der eintretenden Flüssigkeit zurückweiche. In Wirklichkeit gestaltet sich aber im Allgemeinen die Sache etwas anders; die Vorlage besteht, wenn wir eben nur einfach den Ausfluss aus Gefässmündungen im Auge behalten, meist aus einem weiten Gefäss, in welchem wir uns den Druck ebenfalls constant erhalten denken. Ist die Flüssigkeit gas- oder dampfförmig, so wird sich nun offenbar der Strahl von der Mündung C ab gerechnet, nach dem Innern der Vorlage hin ebenfalls trichterförmig ausbreiten und dabei werden die Flüssigkeitselemente nach und nach aus der Geschwindigkeit w wieder zur Ruhe übergehen. Der Druck in der Vorlage ist in solchen Fällen gewöhnlich bekannt, dieser Druck ist aber offenbar nicht identisch mit dem Drucke p_2 in der Ebene der Mündung (nur bei tropfbar flüssigen Körpern ist die Annahme der Gleichheit dieser Drücke erlaubt); es folgt daraus, dass der Druck p_2 und daher auch das Volumen v_2 in der Ebene der Mündung unbekannt und durch den Druck in der Vorlage allein nicht bestimmt ist. Dieser Umstand bringt eine neue Unbestimmtheit in die obigen Gleichungen; auf Grund von

gewiesen. Dieselben Gleichungen, die oben im Texte gegeben worden sind, finden sich dort in andrer Weise entwickelt und bezüglich des Ausflusses der Gase aus Gefässmündungen durch eine Reihe spezieller Fälle erläutert.

Beobachtungen über Ausfluss der Dämpfe, auf die wir unten zurückkommen werden, darf man sich aber wohl die Annahme erlauben, dass der Druck in der Vorlage sich nahezu bis in die Ebene der Mündung erstreckt; bezeichnet man daher den Druck in der Vorlage mit p_2 und benutzt man diesen Werth zugleich in der Gleichung (103), so ergiebt sich für w streng genommen nicht genau der Werth der Ausflussgeschwindigkeit d. h. der Geschwindigkeit in der Ebene der Mündung, sondern man erhält in dem Werthe w die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeitselemente durch denjenigen Querschnitt des trichterförmigen Raumes ausserhalb der Mündung gehen, in welchem der Druck gleich dem Drucke p_2 in der Vorlage geworden ist. Wir denken uns, wie erwähnt, dass der genannte Querschnitt sehr nahe an der Mündung liegt, und daraus würde weiter folgen, dass dann die Ausbreitung des Luft- oder Dampfstrahles ausserhalb der Mündung unter constantem Drucke p_2 erfolgt, wobei das spezifische Volumen v_2 in dem angegebenen Querschnitte, und die Temperatur t_2 in andre Werthe v'_2 und t'_2 übergehen, die dem Ruhezustand der Flüssigkeit in der Vorlage entsprechen, weil eben wegen der Ausbreitung des Strahles die in der Gewichtseinheit Flüssigkeit enthaltene Arbeit $\frac{w^2}{2g}$ beim Uebergang zur Ruhe sich in Wärme umsetzt.

Vollständige Aufklärung über diese Fragen können nur genaue Versuche geben; bis auf Weiteres werden wir den weitern Untersuchungen in Betreff des Verhaltens des Flüssigkeitsstrahles ausserhalb der Mündung die angegebene Hypothese zu Grunde legen.

Speziell für permanente Gase lässt sich zunächst Gl. (104) in einfachere Form bringen; auf Grund von Gl. (67) und (69) S. 121 u. f. findet sich zunächst:

$$A d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = - A R d t - c d t + d Q$$

oder wegen der Beziehung (66)

$$A d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = - \varkappa c d t + d Q \qquad (105)$$

wobei dann dQ nach den Gln. (65) zu bestimmen ist.

n den unendlich vielen Fällen, an denen der Gebrauch
stehenden Formeln gezeigt werden könnte *), mag hier
Fall und zwar der wichtigste gründlicher untersucht
. Beim Ausströmen eines Gases aus einem Gefässe unter
tem Drucke p_1 in ein zweites, dicht neben dem ersten
ches Gefäss, in welchem der Druck p_2 ebenfalls constant
wird, wird höchst selten der Fall vorkommen, dass dem
ährend des Hinströmens nach der Mündung Wärme mit-
oder entzogen wird; wir untersuchen den Ausfluss daher
er der Voraussetzung, dass während des Ausströmens
eine Mittheilung, noch Entziehung von Wärme

diesem Falle giebt Gl. (105) für $dQ = 0$

$$A d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\varkappa c\, dt \tag{106}$$

. 65) ergiebt unter der gleichen Voraussetzung

$$0 = v\, dp + \varkappa p\, dv$$

s der letztern Formel haben wir aber schon früher auf
die Beziehung

$$\frac{a+t}{a+t_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

tet. Wir wollen nun von jetzt an, dem Gebrauche ent-
end, die absolute Temperatur $a+t$ mit T bezeichnen,
wir in den allgemeinen Untersuchungen im ersten Ab-
den Buchstaben S benutzten), wir können daher auch
n bis jetzt benutzten Formeln dt durch dT ersetzen.
nun die absolute Temperatur im Ausflussgefässe T_1 und
diejenige in der Ebene der Mündung (richtiger in geringer
nung ausserhalb derselben), so folgt, weil an letzterer Stelle
uck p_2 sein soll, nach der letzten Gleichung

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \tag{107}$$

---

*) Locomotivenblasrohr. S. 68—74.

und durch Integration der Gl. (106), unter der Voraussetzung, dass im Innern des Ausflussgefässes die Geschwindigkeit Null und in der Mündungsebene die Geschwindigkeit w ist:

$$A \frac{w^2}{2g} = \varkappa c (T_1 - T_2) \tag{108}$$

und diese beiden Gleichungen lösen das vorgelegte Problem.

Bestimmt man T_2 aus (107) und substituirt man den Werth in Gl. (108), so folgt die Ausflussgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{2g \frac{\varkappa c}{A} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)} \tag{109}$$

und diese Gleichung wurde zuerst, wenn auch auf anderm Wege von Weisbach entwickelt*).

Die Temperatursenkung $T_1 - T_2$ vom Innern des Ausflussgefässes bis zur Ebene der Mündung bestimmt sich dann, wenn w durch Gl. (109) gegeben ist, durch Gl. (108).

Das spezifische Volumen v_2 des Gases in der Ebene der Mündung ermittelt sich nach Gl. (67)

$$v_2 = \frac{R T_2}{p_2} \tag{110}$$

und endlich ist das Gewicht G der Luftmenge, die in der Sekunde zum Ausfluss gelangt, wenn der Mündungsquerschnitt F ist, aus der Gleichung

$$G v_2 = F w \tag{111}$$

zu bestimmen.

Ausserhalb der Mündung breitet sich der Luftstrahl aus und zwar auf Grund der oben hingestellten Hypothese unter constantem Drucke p_2; eine Wärmezuführung findet dabei zwar nicht statt, wohl aber wird die der Geschwindigkeit w entsprechende Arbeit $\frac{w^2}{2g}$ in Wärme umgesetzt und man kann sich den Vorgang dann so denken, als fände während des Ueber-

*) Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. Bd. 1. S. 821. Braunschweig 1855.

ganges in den Ruhezustand die Zuleitung der Wärmemenge $A\,\frac{w^2}{2g}$ unter constantem Drucke p_2 statt. Ist die Temperatur des Gases in der Vorlage, da wo es wieder zur Ruhe gekommen ist T'_2, so folgt nach dem Gesagten unter Benutzung der Gl. (86) S. 140 (Erwärmung der Gase bei constantem Drucke)

$$A\,\frac{w^2}{2g} = \varkappa c\,(T'_2 - T_2)$$

und diese Formel mit Gl. (108) verglichen, giebt das einfache Resultat:

$$T'_2 = T_1$$

d. h. die Temperatur in der Vorlage ist gleich derjenigen im Ausflussgefässe; wenn sonach ein permanentes Gas unter constantem Drucke und ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme aus einem Gefässe in ein andres strömt, in welchem der Druck auch constant erhalten wird, so finden keine Temperaturänderungen statt, wenigstens ist am Ende der Ausbreitung des Gases in der Vorlage die Temperatur daselbst die gleiche, wie im Ausflussgefässe. Die Temperatur des Gases in der Ebene der Mündung stellt sich aber nach Gl. (107) jederzeit geringer heraus. Mit dem Uebergange des Gases aus der Geschwindigkeit w in den Ruhezustand ist aber nicht nur eine Temperaturerhöhung, sondern auch eine Vergrösserung des spezifischen Volumens verbunden; der Werth v_2 (Gl. 111) geht in der Vorlage, wie man leicht übersieht, in den Werth

$$v'_2 = \frac{R\,T_1}{p_2}$$

über.

Durch wirkliche Ausflussversuche werden nun aber eine Reihe der vorstehenden Resultate nicht vollständig bestätigt; um Uebereinstimmung zu erzielen, wird man gewisse Correctionen anbringen müssen, über deren Bedeutung hier das Nöthige noch erwähnt werden soll.

Zunächst ist bekannt, dass beim Ausströmen durch kurze Mündungen jederzeit ein Geschwindigkeitsverlust stattfindet, die wirkliche Geschwindigkeit stellt sich kleiner als die berechnete heraus; das Verhältniss beider Geschwindigkeiten nennt man den

Geschwindigkeitscoefficienten: bezeichnen wir denselben mit φ und die effective Ausflussgeschwindigkeit mit w_e, so folgt, weil mit w die theoretische Geschwindigkeit nach Gl. (109) bezeichnet wurde:

$$w_e = \varphi w$$

Es geht sonach, wie man es in der praktischen Hydraulik darstellt, beim Ausflusse der Gewichtseinheit Flüssigkeit die Arbeit

$$L = \frac{w^2 - w_e^2}{2g} = (1 - \varphi^2) \frac{w^2}{2g}$$

verloren, und zwar bezeichnet man im vorliegenden einfachen Fall (Ausfluss durch eine kurze Mündung) diesen Arbeitsverlust als denjenigen, welcher zu Ueberwindung der Reibungswiderstände in der Mündung verwendet werde. Man kann bei der Beurtheilung der Ausflusserscheinungen in der mechanischen Wärmetheorie diese Darstellung beibehalten, nur ist man hier im Stande, näher zu bezeichnen, wozu diese verlorne Arbeit verwendet worden ist. Wenn die Gastheilchen an der festen Umfassung der Mündung hinströmen, findet offenbar in Folge der gegenseitigen Einwirkung (der Reibung) eine Erwärmung statt. Das Gas und die Mündungswände nehmen die durch diese Reibung erzeugte Wärme auf; wegen der grossen Beweglichkeit der Flüssigkeitselemente darf man aber die Annahme machen, dass diese die gesammte aus der Reibung hervorgehende Wärme aufnehmen, und dass nur ein verschwindend kleiner Theil auf die feste Wandung der Mündung übergeht. Im ausströmenden Gase zeigt sich diese aufgenommene Wärme als Molekularbewegung, deren Verstärkung eine Erhöhung der Temperatur ergiebt: man kann daher sagen, dass beim Ausströmen eines Gases die Widerstände nicht einen Arbeitsverlust im gewöhnlichen Sinne, sondern nur eine Verminderung der lebendigen Kraft der offenen Bewegung hervorbringen. Die dieser Verminderung entsprechende Arbeit ist in innere Arbeit umgewandelt und die Vermehrung der innern Arbeit zeigt sich bei Gasen einfach als Erhöhung der Temperatur. In Folge der Widerstände strömt also ein Gas mit geringerer Geschwindigkeit aus, als die Gl. (109) giebt, hingegen ist die Temperatur T_2 in der Mündung eine höhere, als aus Gl. (108) gefolgert wird. Die Summe der innern Arbeit und

der Arbeit, welche der offnen Bewegung entspricht, ist durch die Reibung an der Mündung nicht verändert worden. Ebenso verhält es sich nun offenbar auch, wenn der Ausfluss eines Gases durch zusammengesetzte Mündungen (ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme) erfolgt, z. B. durch horizontale Röhrenleitungen, die mit Erweiterungen und Verengungen, Krümmungen und Knien u. s. w. versehen sind; jeder einzelne Widerstand bringt eine Verminderung der lebendigen Kraft der offnen Bewegung, gleichzeitig aber bei Gasen eine dieser Verminderung entsprechende Erhöhung der Temperatur, bei anderer Flüssigkeit eine gleiche Erhöhung der innern Arbeit hervor.

Kehren wir zu unserm Beispiele zurück, so findet sich die wahre Geschwindigkeit w_e, mit welcher das Gas die Mündung verlässt mit Rücksicht auf Gl. (109),

$$w_e = \varphi \sqrt{2g \frac{\varkappa c}{A} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)} \tag{112}$$

Dann folgt die wahre absolute Temperatur T_2 des Gases in der Mündung unter Zugrundelegung von Gl. (108) aus der Gleichung:

$$T_1 - T_2 = \frac{A}{\varkappa c} \frac{w_e^2}{2g} \tag{113}$$

Das spezifische Volumen des Gases in der Mündung berechnet sich nach Gl. (110), indem man den durch (113) gewonnenen Werth von T_2 substituirt, und endlich fände sich das Gewicht G der Gasmenge, welche pro Sekunde zum Ausfluss gelangt, durch die Formel:

$$G v_2 = \alpha F w_e = \alpha \varphi F w$$

wobei F der Mündungsquerschnitt ist, der hier mit dem Coefficienten α (Contractionscoefficient) multiplizirt erscheint, da nach frühern Bemerkungen der Strahlquerschnitt an derjenigen Stelle, an welcher der Druck gleich dem äussern Drucke p_2 geworden ist, im Allgemeinen nicht dem Mündungsquerschnitte gleich sein wird und weil bei Gasen und bei Mündungen in dünner Wand ähnliche Contractionserscheinungen auftreten, wie sie beim Ausfluss von Wasser bekannt sind.

Aus vorstehender Formel ergiebt sich das Gewicht G mit Benutzung von Gl. (109) und (110)

$$G = \alpha \varphi \frac{F p_2}{R T_2} \sqrt{2 g \frac{\varkappa c}{A} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)} \tag{114}$$

wobei für T_2 der aus Gl. (113) entspringende Werth einzusetzen ist.

Das Product $\alpha \varphi$ nennt man gewöhnlich den Ausflusscoefficienten.

Was die Temperatur des Gases ausserhalb der Mündung nach dem Uebergang zur Ruhe betrifft, so ändern hier die Widerstände nichts; schliesslich ist die Temperatur des Gases wieder dieselbe wie im Ausflussgefässe und daher zuletzt das spezifische Volumen

$$v'_2 = \frac{R T_1}{p_2},$$

und das Volumen V_2 des Gases, welches pro Sekunde zum Ausflusse gelangt, bei äusserm Drucke gemessen,

$$V_2 = G v'_2$$

Was die Coefficienten φ und $\alpha \varphi = \mu$ betrifft, die bei Gasen in Rechnung zu bringen sind, so benutzt man am besten die Versuchsresultate von Weisbach *). Die Versuche ergaben nach den von Grashof **) an den Rechnungen Weisbach's angebrachten Correctionen Folgendes:

Bei einem nach der Form des contrahirten Strahles abgerundeten Mundstück von 10 Millim. Weite, ergab sich für einen Ueberdruck von $p_1 - p_2$, von 180 bis 850 Millimeter Quecksilbersäule im Mittel:

$$\varphi = \mu = 0{,}981.$$

(Da hier keine Contraction stattfindet, so ist $\alpha = 1$.)

---

*) Weisbach, »Vorläufige Mittheilungen über die Ergebnisse vergleichender Versuche über den Ausfluss der Luft und des Wassers unter hohem Drucke.« Civilingenieur, Bd. 5, S. 1. — Ingenieur- und Maschinenmechanik. Braunschweig, 1863. 4. Auflage. Bd. 1, S. 911.

**) Grashof, »Ueber die Bewegung der Gase im Beharrungszustande in Röhrenleitungen und Kanälen«. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. Bd. 7, S. 243 u. S. 280.

Für Kreismündungen in dünner Wand von 10 bis 24^{mm} Weite ergab sich für den Ueberdruck $p_1 - p_2$ von 50 bis 850^{mm} und der Annahme $\varphi = 0{,}98$

$$\mu = 0{,}555 \text{ bis } 0{,}795$$

wachsend mit dem Ueberdruck $p_1 - p_2$.

Für kurze cylindrische Ansatzröhren von 10 bis 24^{mm} Weite fand sich für die gleichen Grenzen des Ueberdruckes

$$\mu = \varphi = 0{,}737 \text{ bis } 0{,}839\,.$$

Interessant ist es, dass diese Coefficienten wenig von denen abweichen, die man für den Ausfluss von Wasser gefunden hat, eine Thatsache, die allerdings schon durch die ältern Versuche von Koch, D'Aubuisson und Pequeur und die Berechnungen von Buff und Poncelet bekannt ist.

Beispiel. Aus einem Behälter ströme atmosphärische Luft durch eine gut abgerundete Mündung unter dem constanten Drucke von $1^1/_2$ Atmosphären in's Freie; es entspreche also p_1 dem Drucke von $1^1/_2$, und p_2 dem Drucke von 1 Atmosphäre. Die Temperatur der Luft im Ausflussgefässe sei $t_1 = 30^0$, also $T_1 = 273 + 30 = 303$.

Hier findet sich zunächst:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{0,41}{1,41}} = 0{,}88878$$

und nach Gl. (109)

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c}{A} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) = 3394{,}1$$

weil $A = \frac{1}{424}$ und $c = 0{,}16847$ ist.

Dann folgt, weil $g = 9{,}81^m$ ist, die theoretische Geschwindigkeit

$$w = 258{,}05^m$$

und die effective, weil $\varphi = 0{,}981$ gesetzt werden kann

$$w_e = \varphi w = 253{,}15^m$$

und dann

$$\frac{w_e^2}{2g} = 3266{,}4^m$$

Die Substitution dieses Werthes in Gl. (113) giebt dann für die absolute Temperatur der Luft in der Mündung

$$T_2 = 270{,}57$$

also nach Celsius

$$t_2 = -2{,}43^0$$

während sich ohne Rücksicht auf die Widerstände (für $\varphi = 1$) diese Temperatur auf $t_2 = -3{,}7^0$ stellen würde. Die Widerstände bringen also eine geringe Temperaturerhöhung hervor. Das Gewicht der Luftmenge, welches pro Sekunde die Mündung verlässt, findet sich nach Gl. (114) wegen $\alpha = 1$, $R = 29{,}272$ und $p_2 = 10334$

$$G = 330{,}31\, F \text{ Kilogr.},$$

wobei der Mündungsquerschnitt F in Quadratmetern zu setzen ist. (Ohne Rücksicht auf Widerstände findet sich $G = 338{,}30\, F$.)

Nach der Ausbreitung in der Vorlage hat die Luft wieder die anfängliche Temperatur $t_1 = 30^0$ angenommen, das Volumen der G Kilogr. Luft ist dann bei äusserm Drucke gemessen:

$$V_2 = G v'_2 = \frac{G R T_1}{p_2} = 283{,}49\, F \text{ Cubikmet.}$$

und bei innerm Drucke gemessen

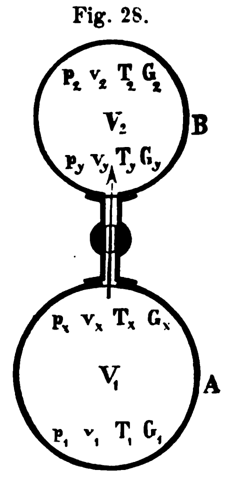
$$V_1 = \frac{p_2}{p_1} V_2 = 188{,}99\, F \text{ Cubikmet.}$$

Wenn gleich die Untersuchungen über den Ausfluss und über die Bewegung der Gase von grosser praktischer Wichtigkeit sind, so wäre doch ein weiteres Eingehen in diese Fragen hier nicht gerechtfertigt; wir begnügen uns daher, hier nur noch auf die vortrefflichen Abhandlungen Grashof's hinzuweisen, die wir schon oben citirt haben und in welchen die Bewegung der Gase in Röhrenleitungen, mit Zugrundelegung der Lehren der mechanischen Wärmetheorie ausführlich behandelt wird.

Das Ueberströmen der Gase aus einem Gefässe in ein andres, wenn das Volumen beider Gefässe constant erhalten wird *).

Man denke sich zwei Räume A und B (Fig. 28) durch ein mit einem Hahnen versehenes Rohr verbunden. Beide Gefässe seien mit Gas derselben Art gefüllt: in dem Gefässe A, dessen Gesammtvolumen V_1 sein mag, befinden sich bei Beginn des Ausströmens G_1 Kilogr. Luft von der Spannung p_1, dem spezifischen Volumen v_1 und der Temperatur T_1: im andern Gefässe B, nach welchem der Ausfluss des Gases vom Gefäss A aus erfolgt und welches das Volumen V_2 hat, befinden sich beim Beginn des Ausströmens G_2 Kilogr. Gas vom Drucke p_2, dem spezifischen Volumen v_2 und der absoluten Temperatur T_2 und da dieses Gefäss die Vorlage bilden soll, so ist $p_2 < p_1$ vorauszusetzen.

Fig. 28.



Es soll nun die Durchflussöffnung F so lange geöffnet werden, bis eine Luftmenge vom Gewichte G aus dem Gefässe A nach B gegangen ist und die Frage beantwortet werden, welches in diesem Momente der Zustand des Gases in dem einen und dem andern Gefässe ist. Das Gewicht der im Ausflussgefässe befindlichen Luftmenge ist jetzt natürlich $G_1 - G$, Druck, spezifisches Volumen und Temperatur wird sich aber auch geändert haben und zwar seien diese Werthe $p_x v_x T_x$: in der Vorlage befindet sich im gleichen Momente die Luftmenge $G_2 + G$: Druck, spezifisches Volumen und Temperatur seien $p_y v_y T_y$. Betrachten wir nun die Ausflussmenge G als gegeben und beide Gefässe von solcher Beschaffenheit, dass Wärme durch die Wandungen weder aus- noch eintreten kann, so handelt sich es hier um Bestimmung der sechs Unbekannten $p_x v_x T_x$ und $p_y v_y T_y$. Da aber die drei zusammen-

* Das hier bezeichnete Problem hat zuerst Bauschinger in einer vortrefflichen Abhandlung »Theorie des Ausströmens vollkommener Gase aus einem Gefässe und ihres Einströmens in ein solches« in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. VIII. S. 81 gelöst.

gehörigen Grössen nach dem Gesetze von **Mariotte** und **Gay-Lussac** in der Beziehung

$$p_x v_x = R T_x \text{ und } p_y v_y = R T_y$$

stehen, so haben wir nur vier Gleichungen aufzustellen und zwar wollen wir als die zu bestimmenden Unbekannten die Pressungen p_x und p_y und die Temperaturen T_x und T_y betrachten.

Man kann sich übrigens dabei vorstellen, dass die Durchflussöffnung im Augenblicke nach dem Uebergange der G Kilogr. Luft geschlossen worden sei und dass nun die Pressungen p_x und p_y und die Werthe T_x und T_y sich auf den Augenblick beziehen, in welchen eben in beiden Gefässen der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten ist. Unter gewissen Umständen, die wir auch im Folgenden voraussetzen wollen, ist aber diese Annahme des Schliessens der Mündung nicht einmal nothwendig. Während des Ausströmens wird sich das Gas in einem trichterförmigen Raume im Ausflussgefässe nach der Mündung hin bewegen und ebenso wird es in der Vorlage, von der Mündung ab gerechnet sich trichterförmig ausbreiten. Denken wir uns die Inhalte beider Gefässe gross genug, so kann man das Gewicht der Gasmenge, das sich in einem gewissen Augenblicke in den beiden trichterförmigen Räumen bewegt, als verschwindend klein denken gegen das Gewicht der Gasmenge in dem einen und andern Gefässe. Dann ist in beiden Gefässen selbst während des Ausströmens der Gleichgewichtszustand anzunehmen und p_x und p_y geben das Gesetz der Druckänderungen und T_x und T_y das Gesetz der Temperaturänderungen **während des Ueberströmens** an.

Wir untersuchen nun zunächst die Aenderungen im Ausflussgefässe A.

In dem Augenblicke, in welchem G Kilogr. Luft das Gefäss A verlassen haben, hat das zurückgebliebene Luftquantum $G_1 - G$ das Volumen V_1 des Gefässes A angenommen. Vorher aber, als das Gewicht G noch im Gefässe war (beim Beginn des Ausströmens), hatten diese $G_1 - G$ Kilogr. Luft das Volumen

$$(G_1 - G) v_1 = G_1 v_1 - G v_1 = V_1 - G v_1$$

weil $G_1 v_1 = V_1$ ist.

Man kann also sagen, dass während des Ausströmens das

Luftgewicht $G_1 - G$ vom Volumen $V_1 - G v_1$ auf das Volumen V_1 sich ausdehnte; dem Anfangsvolumen entspricht der Druck p_1, dem Endvolumen der Druck p_x und da hier diese Ausdehnung ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme erfolgte, so gilt nach dem Poisson'schen Gesetze nach Gl. (76) S. 130 die Beziehung:

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{V_1 - G v_1}{V_1}\right)^x$$

Nun ist aber, wie schon erwähnt wurde, $V_1 = G_1 v_1$, daher folgt die erste Gleichung für vorliegendes Problem:

$$p_x = p_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^x \tag{115}$$

Die absolute Temperatur T_x findet sich dann ohne Weiteres nach Gl. (78)

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

oder vorstehende Gleichung für p_x benutzt

$$T_x = T_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{x-1} \tag{116}$$

Hiernach ist denn, da sich das spezifische Volumen v_x schliesslich nach der Formel

$$p_x v_x = R T_x$$

bestimmen lässt, der Zustand des Gases im Ausflussgefäss, im Augenblicke nachdem G Kil. Gas dasselbe verlassen haben, vollständig bestimmt. Die Substitution von p_x und T_x in die letzte Gleichung giebt sehr einfach:

$$v_x = \frac{R G_1 T_1}{p_1 (G_1 - G)} = \frac{G_1 v_1}{G_1 - G}$$

wie sich übrigens ohne Weiteres hätte anschreiben lassen.

Die ganze Arbeit, welche das Gas im Ausflussgefässe während des Ausströmens der G Kilogr. Gas verrichtet hat, bestimmt sich auf folgende Weise.

Bezeichnen wir die zurückgebliebene Gasmenge $G_1 - G$ mit G_x so ist deren Volumen $G_x v_x$ und Druck p_x; in dem nächsten Zeitmomente ändert sich das spezifische Volumen v_x um dv_x, also das Gesammtvolumen $G_x v_x$ um $G_x dv_x$ und daher folgt das Differential der Arbeit

$$dL_1 = G_x p_x dv_x$$

Nun ist aber

$$v_x = \frac{G_1 v_1}{G_x}$$

also

$$dv_x = -G_1 v_1 \frac{dG_x}{G^2_x}$$

ferner nach Gl. (115)

$$p_x = p_1 \left(\frac{G_x}{G_1}\right)^\varkappa$$

Die Substitution giebt daher nach einer einfachen Reduction:

$$dL_1 = -\frac{p_1 v_1}{G_1^{\varkappa-1}} \cdot G_x^{\varkappa-1} dG_x \qquad (117^a)$$

und hier, wenn man integrirt mit Rücksicht darauf, dass im Anfange des Ausflusses $G_x = G_1$ ist und wenn man schliesslich den Werth G_x wieder durch $G_1 - G$ ersetzt:

$$L_1 = G_1 \frac{p_1 v_1}{\varkappa} \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^\varkappa\right] \qquad (117)$$

oder wenn man p_x nach Gl. (115) sich schon bestimmt denkt

$$L_1 = G_1 \cdot \frac{v_1 (p_1 - p_x)}{\varkappa} \qquad (118)$$

Ein merkwürdig einfacher Ausdruck (vergl. das Problem 1 auf S. 150), der sich aber wesentlich von dem unterscheidet, den wir früher (S. 133 Gl. 80) für den Fall gefunden haben, dass ein Gas sich ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme arbeitsverrichtend ausdehnt. Der Unterschied hat einfach darin seinen Grund, dass dort das Gewicht der arbeitenden Gasmenge unverändert blieb, während hier bei der Arbeitsverrichtung das Gas-

gewicht im Ausflussgefäss wegen des Ausströmens von G_1 auf $G_1 - G$ abnimmt.

Wir haben nun im Weitern auch die Vorgänge in der Vorlage zu untersuchen.

Wir fanden früher nach Gl. (69) S. 122 die Veränderung der innern Arbeit der Gewichtseinheit Gas für die Temperaturerhöhung dt

$$dU = \frac{c}{A} dt$$

oder dT statt dt gesetzt und integrirt, giebt die ganze innere Arbeit U bei der absoluten Temperatur T

$$U = C + \frac{c}{A} T$$

wobei die Constante C die innere Arbeit des Gases beim absoluten Nullpunkt darstellt. Diese Formel wenden wir hier an; es ist nämlich beim Beginn des Ausflusses die innere Arbeit der G_1 Kilogr. Gas im Ausflussgefäss

$$G_1 \left(C + \frac{c}{A} T_1\right)$$

und diejenige der G_2 Kilogr. Gas in der Vorlage

$$G_2 \left(C + \frac{c}{A} T_2\right)$$

und daher in beiden Gasmengen zusammengenommen

$$U = C (G_1 + G_2) + \frac{c}{A} (G_1 T_1 + G_2 T_2)$$

Für diesen Werth findet sich aber noch ein anderer Ausdruck. Nachdem nämlich G Kilogr. Gas überströmt sind, befinden sich im Ausflussgefäss $G_1 - G = G_x$ Kilogr. Gas von der Temperatur T_x und in der Vorlage $G_2 + G$ Kilogr. Gas von der Temperatur T_y; die innere Arbeit der erstern Gasmenge beträgt daher:

$$G_x \left(C + \frac{c}{A} T_x\right),$$

diejenige in der andern:

$$G_y \left(C + \frac{c}{A} T_y\right)$$

in beiden zusammen:

$$U = C(G_x + G_y) + \frac{c}{A}(G_x T_x + G_y T_y)$$

und dieser Werth ist gleich dem vorhin aufgestellten Werthe von U, da in beiden Gefässen zusammengenommen keine äussere Arbeit verrichtet und ebenso Wärme dem Gas weder mitgetheilt noch entzogen wurde. Das Gleichsetzen beider Werthe von U ergiebt dann, wenn man noch berücksichtigt, dass das gesammte Gasgewicht sich auch nicht geändert hat, also $G_1 + G_2 = G_x + G_y$ ist:

$$G_1 T_1 + G_2 T_2 = G_x T_x + G_y T_y$$

Berücksichtigen wir die bekannte Beziehung

$$R T = p v,$$

so giebt vorstehende Gleichung auch

$$G_1 v_1 p_1 + G_2 v_2 p_2 = G_x v_x p_x + G_y v_y p_y$$

Nun ist aber, wie leicht zu übersehen, auf Grund der eingeführten Bezeichnung:

$$V_1 = G_1 v_1 = G_x v_x$$

und

$$V_2 = G_2 v_2 = G_y v_y$$

und daher nach der zuletzt gegebenen Gleichung:

$$G_1 v_1 p_1 + G_2 v_2 p_2 = G_1 v_1 p_1 \cdot \frac{p_x}{p_1} + G_2 v_2 p_2 \frac{p_y}{p_2}$$

und hiernach, wenn man wieder die Temperatur einführt

$$\frac{p_y}{p_2} = 1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2}\left(1 - \frac{p_x}{p_1}\right)$$

und endlich unter Benntzung des Werthes von p_x nach Gl. (115) der Druck p_y in der Vorlage, nachdem G Kilogr. Gas dorthin geströmt sind:

$$p_y = p_2\left[1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2}\left(1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{x}\right)\right] \tag{119}$$

Was ferner die Temperatur T_y des Gases in der Vorlage in diesem Momente betrifft, so findet sich diese in folgender Art:

Es ist nach Mariotte und Gay-Lussac

$$p_y v_y = R T_y$$

oder auf beiden Seiten mit $G_y = G_2 + G$ multiplicirt und berücksichtigt, dass die Beziehung

$$G_y v_y = G_2 v_2 = V_2$$

besteht:

$$T_y = \frac{G_2 v_2 p_y}{R (G_2 + G)}$$

oder den Werth von v_2 durch die Formel $p_2 v_2 = R T_2$ bestimmt:

$$T_y = \frac{G_2 T_2}{G_2 + G} \cdot \frac{p_y}{p_2}$$

Da nun endlich der Druck p_y durch Gl. (119) schon bestimmt ist, so findet sich durch Substitution sehr leicht:

$$T_y = \frac{G_2 T_2}{G_2 + G} + \frac{G_1 T_1}{G_2 + G} \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^x\right] \qquad (120)$$

nach welcher Formel sich T_y direct berechnet, wenn das Gewicht G der übergeströmten Gasmenge gegeben ist.

Im Weitern ist nun auch noch die ganze Arbeit zu bestimmen, welche das Gas in der Vorlage aufnimmt, da diese Gasmenge durch das herbeiströmende Gas comprimirt wird. Im Augenblicke nach dem Ueberströmen der Gasmenge G befinden sich G_x Kilogr. im Ausflussgefässe und G_y Kilogr. Gas in der Vorlage. Im nächsten Zeittheilchen ist die Arbeit dL_1 im Ausflussgefässe durch Gl. (117ᵃ) bestimmt: diese Arbeit nimmt zunächst das Gas in der Vorlage auf; überdies aber strömt gleichzeitig die Gasmenge dG nach der Vorlage und geht dabei arbeitsverrichtend aus dem Drucke p_x in den Druck p_y über. Das Letztere entspricht nach Gl. (80), S. 133 einer Arbeit:

$$\frac{c}{A} T_x \, dG \left| 1 - \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{\frac{x-1}{x}} \right|$$

oder wenn man den Werth T_x durch Gl. (78) ausdrückt, d. h.

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

einsetzt, einer Arbeit:

$$\frac{c}{A} T_1 dG \left[\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} - \left(\frac{p_y}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]$$

Hiernach ergiebt sich die ganze Arbeit L_2 in der Vorlage von Beginn des Ueberströmens an gerechnet:

$$L_2 = L_1 + \frac{c\,T_1}{A}\int \left[\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} - \left(\frac{p_y}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right] dG, \qquad (121)$$

wobei L_1 nach Gl. (117) oder (118) bestimmt ist.

Unter dem Integralzeichen hätte man nun hier die Werthe p_x und p_y durch die Ausdrücke (115) und (119) zu ersetzen und die Integration zwischen den Grenzen 0 und G auszuführen. Führt man die Substitution aus, so zeigt sich sofort, dass die Integration auf eine unendliche Reihe führt, es ist daher zweckmässiger, die Formel (121) in der angegebenen Form stehen zu lassen und die Integration in jedem Spezialfall gesondert auszuführen.

Es bleibt nun noch übrig, den Zustand des Gases in beiden Gefässen für das Ende des Ueberströmens zu ermitteln. Der Uebergang des Gases aus einem Gefässe in das andere hört offenbar auf, sobald $p_x = p_y$ geworden ist; nehmen wir an, dass die übergegangene Gasmenge dann G_0 beträgt, so findet unter Benutzung von Gl. (115) und (119)

$$p_1 \left(1 - \frac{G_0}{G_1}\right)^x = p_2 \left[1 + \frac{G_1\,T_1}{G_2\,T_2}\left(1 - \left(1 - \frac{G_0}{G_1}\right)^x\right)\right]$$

und hieraus bestimmt sich die Gasmenge G_0, die während des ganzen Vorganges bis zum Ende zum Ausfluss gelangt ist, wenn man in vorstehender Gleichung

$$\frac{G_1 T_1}{G_2 T_2} = \frac{G_1 v_1 p_1}{G_2 v_2 p_2} = \frac{V_1 p_1}{V_2 p_2}$$

substituirt:

$$G_0 = G_1 \left[1 - \left(\frac{V_1 p_1 + V_2 p_2}{(V_1 + V_2) p_1} \right)^{\frac{1}{\varkappa}} \right] \qquad (122)$$

Setzt man dann noch diesen Werth von G_0 in die oben gegebenen Gleichungen statt G ein, so beantwortet sich die Frage nach dem Zustande des Gases in beiden Gefässen am Ende des Ueberströmens ebenfalls leicht.

Endlich ist noch hervorzuheben, dass die Ausflussgeschwindigkeit w veränderlich ist und zwar nach einem ganz bestimmten Gesetze abnimmt. Es lässt sich aber leicht das Gesetz dieser Abnahme ermitteln. Nach Gl. (109) ist, die hier angenommene Bezeichnung dort benutzt, für den Moment, in welchem eben G Kilogr. Gas übergeströmt sind,

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c}{A} T_x \left[1 - \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]$$

oder den Werth T_x durch p_x ausgedrückt (nach Gl. (78)):

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c}{A} T_1 \left[\left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_y}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]$$

Setzt man hier die Werthe von p_x und p_y nach Gl. (115) und (119) ein, so ergiebt sich eine Formel, nach der sich für jeden Werth von G die Geschwindigkeit ermitteln lässt. Man erhält ganz allgemein:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c T_1}{A} \left\{ \left(1 - \frac{G}{G_1} \right)^{\varkappa - 1} - \right.$$

$$\left. \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \left[1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2} \left(1 - \left(1 - \frac{G}{G_1} \right)^{\varkappa} \right) \right]^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right\} \qquad (123)$$

Am Ende des Ausströmens ist natürlich $w = 0$.

Diese zuerst von Bauschinger, wenn auch zum Theil in anderer Form gegebenen und auf anderm Wege entwickelten Gleichungen lösen eine grosse Zahl der interessantesten Probleme, von denen zwei der wichtigsten im Folgenden noch behandelt werden mögen.

Erster Spezialfall. In einem Kessel befinden sich G_1 Kilogr. comprimirte atmosphärische Luft vom Drucke p_1 und der Temperatur T_1; der Inhalt des Kessels sei V_1. Man lasse nun durch eine Mündung G Kilogr. in's Freie strömen und schliesse die Mündung. Welches wird nun, vorausgesetzt dass dem Kessel während des Ausströmens der Luft Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wurde, der Zustand der Luft im Innern des Kessels im Augenblick des Schliessens der Mündung sein?

Hier bedeutet p_2 den äussern, atmosphärischen Druck; nehmen wir überdies noch an, dass anfangs die Temperatur der Luft im Kessel gleich der Temperatur der äussern Luft war, so haben wir $T_1 = T_2$ zu setzen und das Gewicht G_2 der Luft in der Vorlage, hier der Luft im Freien ist unendlich gross anzunehmen. Setzen wir $G_2 = \infty$ und $T_2 = T_1$ in die Gl. (115), (116), (119) und (120) ein, so ergeben sich für vorliegenden Fall die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= p_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa} && (\alpha) \\ T_x &= T_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa - 1} && (\beta) \\ p_y &= p_2 \\ T_y &= T_2 = T_1 \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Die beiden letzten Formeln sind selbstverständlich, Druck und Temperatur der äussern Atmosphäre bleiben unverändert.

Denken wir uns, der Kessel habe gerade $V_1 = 1$ Cubikmeter Inhalt, der Druck der Luft daselbst betrage 5 Atmosphären und die Temperatur derselben $t_1 = 30^0$ also $T_1 = 303$; so bestimmt sich das Gewicht dieser Luftmenge

$$G_1 = \frac{V_1}{v_1} = \frac{V_1 p_1}{R T_1} = 5{,}8256 \text{ Kilogr.},$$

weil $p_1 = 5 . 10334$ und $R = 29{,}274$ ist.

Oeffnet man nun die Ausflussmündung so lange, bis gerade die Hälfte der Luftmenge ausgeflossen ist, so ist $G = \frac{1}{2} G_1$ und Gl. 124 α) ergiebt dann:

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,110} = 0,3763,$$

also beträgt im Momente des Schliessens der Mündung der Druck p_x in Atmosphären gemessen

1,881 Atmosph.

Die Temperatur T_x bestimmt sich nach Gl. (124 β):

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,410} = 0,7526,$$

woraus $T_x = 228,04$ oder nach Celsius $t_x = -44^0,96$.

Denken wir uns eine sehr grosse Mündung, so findet in Wirklichkeit das Ausströmen so rasch statt, dass während desselben durch die den Kessel umgebende äussere atmosphärische Luft eine Wärmemittheilung nicht anzunehmen ist. Ein mit dem Kessel verbundenes Manometer würde rasch vom Drucke p_1 auf p_x sinken und diese Grössen sind es, die man sehr leicht und mit grosser Zuverlässigkeit beobachten kann.

Hätte man sonach p_x beobachtet, so liesse sich rückwärts nach (124 α) sehr leicht das Luftgewicht G berechnen, welches zum Ausfluss gelangte und daher auch die Luftmenge $G_1 - G$ bestimmen, die im Kessel zurückgeblieben ist.

Im Weitern erkennt man aus vorstehendem Beispiele, dass eine ausserordentlich starke Abkühlung der Luft im Innern des Kessels stattfindet; die Temperatur T_x im Momente des Schliessens der Mündung lässt sich direct nicht beobachten, wohl aber, wie oben gezeigt wurde, aus den Manometerständen berechnen.

Setzen wir in Gl. (118) den Werth p_x ein, wie ihn obige Rechnung giebt und überdies unserer Annahme gemäss $G_1 v_1 = 1$, so ergiebt sich die Arbeit, welche die Luft im Innern des Kessels während des Ausströmens gethan hat:

$$L_1 = G_1 v_1 \frac{(p_1 - p_x)}{\varkappa} = \frac{(5 - 1,881)\, 10334}{1,41}$$

$$= 22859 \text{ Meterkilogr.}$$

Die Arbeit der Luft in der Vorlage hier in der freien Atmosphäre bestimmt sich nach Gl. (121).

Setzen wir in diese Formel $p_y = p_2$ und p_x nach (124 α) ein, wie es vorliegendes Problem verlangt, so findet sich:

$$L_2 = L_1 + \frac{c\,T_1}{A}\int\left[\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{x-1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right] dG$$

oder wenn man den Werth von L_1 nach Gl. (117) noch einsetzt nach einigen leichten Reductionen und nach Ausführung der Integration zwischen den Grenzen 0 und G:

$$L_2 = \frac{G_1\,v_1\,p_1}{x-1}\left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{x} - \frac{G}{G_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]$$

Setzen wir hier für unser Beispiel die gegebenen Werthe ein, so ergiebt sich für

$$\frac{G}{G_1} = \frac{1}{2}$$

$$L_2 = 39139 \text{ Meterkilogr.}$$

Am Ende des Ausflusses ist die Luftmenge G_0 nach Gl. (122), wenn wir dort $V_2 = \infty$ setzen:

$$G_0 = G_1\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

also in unserm Falle

$$G_0 = 0{,}68065 \,.\, G_1 = 3{,}9652 \text{ Kilogr.}$$

Setzen wir noch in alle vorstehenden Formeln

$$\frac{G}{G_1} = \frac{G_0}{G_1} = 0{,}68065,$$

so ergiebt sich für das Ende des Ueberströmens der Druck im Ausflussgefässe p_x in Atmosphären: eine Atmosphäre. Die Temperatur nach Celsius $t_x = -\,83{,}25^0$. Die ganze Arbeit

der Luft im Kessel $L_1 = 29316$ Meterkilogr. und die von der äussern Luft aufgenommene Arbeit:

$$L_2 = 47129 \text{ Meterkilogr.}$$

Endlich folgt auch noch für vorliegende Annahmen das Gesetz der Aenderung der Ausflussgeschwindigkeit w nach Gl. (123), wenn dort $G_2 = \infty$ substituirt wird:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c T_1}{A} \left[\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa - 1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]$$

Hier lässt sich für jeden Werth von G die theoretische Geschwindigkeit w berechnen; multiplizirt man den Werth w mit dem Geschwindigkeitscoefficienten φ, so ergiebt sich die wahre Geschwindigkeit für den betreffenden Moment $w_e = \varphi w$ und dann die augenblickliche absolute Temperatur T'_y in der Ebene der Mündung auf Grund der Gl. (113) durch die Formel

$$T_x - T'_y = \frac{A}{\varkappa c} \frac{w_e^2}{2g}$$

Der im Vorstehenden behandelte Spezialfall giebt übrigens noch zu einer besondern Untersuchung Anlass.

Denken wir uns wie vorhin den Kessel mit atmosphärischer Luft vom Drucke p_1 und der Temperatur T_1 gefüllt und überdies mit einer möglichst grossen Ausflussmündung versehen, so wird, wenn die Mündung geöffnet und rasch wieder geschlossen wird, ein Theil der Luft ins Freie strömen, wo dieselbe Temperatur T_1 herrschen mag. Im Momente des Schliessens der Mündung ist Druck p_x und Temperatur T_x im Innern des Kessels durch die gegebenen Gleichungen bestimmt. Ist der Kessel mit einem Manometer versehen, so lässt sich an diesem der Druck p_1 im Anfange des Versuchs und der Druck p_x im Moment des Schliessens der Oeffnung sehr leicht beobachten. In Folge des Entweichens der Luft findet aber eine sehr starke Temperatursenkung der Luft im Kessel statt; beobachtet man das Manometer vom Augenblick des Schliessens der Mündung an, so zeigt sich, dass der Druck im Kessel nicht constant p_x bleibt, sondern wieder zunimmt, und zwar Anfangs sehr rasch, dann aber immer langsamer und langsamer einer bestimmten

Grenze p_3 sich nähert. Es hat das seinen Grund einfach darin, dass die im Kessel befindliche Luft durch Eintritt von Wärme durch die Kesselwandungen sich nach und nach wieder bis zur Temperatur der äussern Atmosphäre erwärmt.

Diese Erwärmung der im Kessel zurückgebliebenen $G_1 - G$ Kilogr. Luft findet nun aber bei constantem Volumen statt; es ist also das spezifische Volumen v_x der Luft im Augenblicke des Schliessens der Mündung und das spezifische Volumen v eine gewisse Zeit nach dem Schliessen gleich gross, also $v = v_x$ oder wenn in diesem Momente der Druck p und die Temperatur T ist, auf Grund des Gesetzes von Mariotte und Gay-Lussac nach der Gleichung $pv = RT$

$$\frac{T}{p} = \frac{T_x}{p_x}$$

oder die Temperatur

$$T = T_x \cdot \frac{p}{p_x}$$

Nun ist aber nach den obigen Untersuchungen

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

und daher folgt

$$T = \frac{p}{p_x} \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} \cdot T_1$$

Nach dieser Formel könnte man, wenn die Anfangstemperatur T_1 der Luft im Kessel bekannt ist und der Druck p_1 bei Beginn des Versuchs und der Druck p_x im Augenblicke des Schliessens der Mündung beobachtet wurde, für gleiche Zeitintervalle die Temperatur T der Luft im Kessel bestimmen, wenn man am Manometer in gleichen Zeitabschnitten den Druck p beobachtet, und daraus liesse sich das Gesetz der Wärmemittheilung durch die Kesselwandungen ermitteln.

Nach einer gewissen Zeit wird der Manometerstand stationär, wenn nämlich die Temperatur T gleich der äussern T_1 geworden ist; bezeichnen wir den entsprechenden Druck mit p_3, so giebt die letzte Gleichung:

$$\frac{p_x}{p_3} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

Da diese drei Manometerstände p_1, p_x und p_3, bei Beginn des Ausströmens, im Augenblicke des Schliessens der Mündung und am Ende, wenn weitere Aenderungen im Manometerstande nicht mehr stattfinden, sich leicht beobachten lassen, so ist hiermit ein Mittel gegeben, mit Hülfe vorstehender Gleichung die wichtige Constante $\varkappa$ zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{\log. p_x - \log. p_3}{\log. p_x - \log. p_1}$$

oder

$$\varkappa = \frac{\log. p_1 - \log. p_x}{\log. p_1 - \log. p_3} \tag{125}$$

Auf die angegebene Weise haben Hirn und Weisbach den Werth $\varkappa$ bestimmt. (S. S. 112.)

So beobachtete Weisbach*) bei dem ersten seiner Versuche die Pressungen p_1, p_x, p_3 in Millimeter Quecksilbersäule, resp. 1452,2; 1323,2 und 1359,2; damit giebt vorstehende Formel $\varkappa = 1{,}405$.

Bei seinem zweiten Versuche war $p_1 = 1332{,}8$; $p_x = 892{,}7$ und $p_3 = 1018{,}2$, das giebt $\varkappa = 1{,}400$.

Bei diesen Versuchen kommt sehr viel darauf an, eine grosse Mündung anzuwenden und dieselbe fast momentan nur zu eröffnen. Wegen der grossen Abkühlung der Luft werden die verhältnissmässig weit wärmern Kesselwände sofort Wärme an die Luft abliefern, so dass man dann einen etwas zu grossen Werth für p_x erhält, wodurch dann $\varkappa$ etwas zu klein ausfällt.

Das zeigen schon recht deutlich die beiden Weisbach'schen Versuche; aus den Pressungsangaben geht unzweifelhaft hervor, dass Weisbach bei seinem zweiten Versuche die Mündung etwas länger offen erhalten hat, als beim ersten Versuche, und das macht sich auch in den Werthen von $\varkappa$ geltend. Beide Werthe sind übrigens etwas zu klein, was seinen Grund darin haben mag, dass der Kessel, der $4^2/_3$ Cubikmeter Inhalt hatte,

*) Civilingenieur. B. 5. S. 47.

eine Mündung von nur 4 Centimeter Weite besass, also die Zeit des Ausströmens verhältnissmässig schon zu lange währte und daher p_x schon etwas zu gross ausfallen musste. Der Fehler, der durch zu grosse Ausflusszeit herbeigeführt wird, wird allerdings, wenn man Quecksilbermanometer benutzt, zum Theil durch einen andern Umstand wieder herabgezogen; in Folge der trägen Masse des Quecksilbers im Manometerrohre und der sehr raschen Druckabnahme wird offenbar der Quecksilberspiegel etwas tiefer herabsinken, als gerade dem Luftdrucke entspricht und aus diesem Grund p_x zu klein abgelesen werden. Beide Fehler werden sich also theilweise aufheben.

Die angegebene Methode zur Bestimmung von $\varkappa$ haben übrigens schon Gay-Lussac und Welter*) angewandt, nur mit dem Unterschiede, dass sie den Ausfluss so lange fortsetzten, bis der Druck p_x im Innern gleich dem Atmosphärendruck wurde.

Aus den angegebenen Gründen musste dies entschieden auf zu kleine Werthe von $\varkappa$ führen; Laplace berechnet den Werth $\varkappa$ auf Grund dieser Versuche zu 1,372, allerdings auch nach einer Formel, die nur näherungsweise richtig und auch zur Verkleinerung beiträgt. Die Formel von Laplace folgt aus Gl. (125), wenn man näherungsweise

$$\text{logn.}\,\frac{p_x}{p_1} = \text{logn.}\left(1 + \frac{p_x - p_1}{p_1}\right) = \frac{p_x - p_1}{p_1}$$

und

$$\text{logn.}\,\frac{p_3}{p_1} = \text{logn.}\left(1 + \frac{p_3 - p_1}{p_1}\right) = \frac{p_3 - p_1}{p_1}$$

dort substituirt.

Man erhält:

$$\varkappa = \frac{p_1 - p_x}{p_1 - p_3}$$

Zweiter Spezialfall. In einem Kessel befinden sich G_2 Kilogr. verdünnte atmosphärische Luft vom Drucke p_2 und der Temperatur T_2; der Inhalt des Kessels sei V_2. Man denke sich nun eine Mündung, welche ins Freie führt; der äussere atmosphärische Druck sei p_1, die Temperatur daselbst T_1.

*) Laplace. Mécanique céleste. t. V.

Oeffnen wir nun die Mündung auf kurze Zeit, so wird eine gewisse Luftmenge G Kilogr. in den Kessel einströmen, und es fragt sich jetzt, welches der Zustand der Luft im Innern des Kessels im Momente des Schliessens der Mündung sein wird, wenn während des Einströmens dem Kessel Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird.

Hier bildet der ganze äussere Raum der Atmosphäre das Ausströmungsgefäss, während der Kessel die Vorlage darstellt; die früher aufgestellten allgemeinen Gleichungen lösen also die vorgelegte Frage, wenn wir dort $G_1 = \infty$ und $V_1 = \infty$ substituiren.

Die beiden Gln. (115) und (116) geben zunächst unter dieser Voraussetzung

$$p_x = p_1 \text{ und } T_x = T_1,$$

woraus, wie zu erwarten war, folgt, dass der Druck und die Temperatur der äussern Atmosphäre bei diesem Versuche keine Aenderungen erleiden.

Die andern Formeln, sowohl diejenigen, welche den Druck p_y und die Temperatur T_y in der Vorlage angeben, als diejenigen, durch welche sich die Arbeit der Luft im Ausflussgefässe und in der Vorlage berechnet, erleiden Veränderungen anderer Art.

Die Gln. (117), (119) und (120) enthalten den Werth

$$G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa}\right],$$

welcher bei der Substitution $G_1 = \infty$ auf den unbestimmten Werth $0.\infty$ führt. Man findet aber den wahren Werth dieses Ausdruckes leicht, wenn man vor der angezeigten Substitution den Werth

$$\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa}$$

nach der binomischen Reihe entwickelt; man erhält:

$$G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa}\right]$$

$$= G_1 T_1 \left\{1 - \left[1 - \varkappa \frac{G}{G_1} + \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{G}{G_1}\right)^2 + \dots\right]\right\}$$

$$= \varkappa G T_1 - \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1 \cdot 2} \frac{G^2}{G_1} T_1 + - \dots\dots$$

Wenn man jetzt in dieser Reihe $G_1 = \infty$ setzt, so ergiebt sich nun für vorliegenden Fall sehr einfach:

$$G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa}\right] = \varkappa G T_1$$

Benutzen wir diese Beziehung in den Gln. (119) und (120), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} p_y &= p_2 \left[1 + \frac{\varkappa G T_1}{G_2 T_2}\right] \\ T_y &= \frac{G_2 T_2 + \varkappa G T_1}{G_2 + G} \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

Die erste Formel giebt den Druck, die andere die Temperatur im Einströmungsgefässe im Momente des Schliessens der Mündung, wenn eben G Kilogr. Luft aus der freien Atmosphäre eingetreten sind. Die Arbeit der äussern Luft findet sich dann nach Gl. (117) sehr einfach

$$L_1 = G p_1 v_1 = R G T_1 \qquad (127)$$

Die von der Luft im Kessel aufgenommene Arbeit findet sich nach Gl. (121), wenn man dort für L_1 vorstehenden Werth, ferner $p_x = p_1$ und p_y nach (126) einsetzt; zu diesem Zwecke ist es aber besser die Gl. (126) für p_y zunächst umzuformen. Aus den Gleichungen $p_1 v_1 = R T_1$ und $p_2 v_2 = R T_2$ folgt durch Division

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2}$$

Berücksichtigt man überdies, dass $G_2 v_2 = V_2$ das Volumen des Kessels darstellt, so folgt statt Gl. (126)

$$p_y = p_2 + \frac{\varkappa G p_1 v_1}{V_2} \qquad (126^a)$$

Jetzt folgt durch Substitution in Gl. (121) die gesuchte Arbeit

$$L_2 = R G T_1 + \frac{c T_1}{A} \int \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\varkappa G v_1}{V_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] d G$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und G und nach einigen leicht zu verfolgenden Reductionen:

$$L_2 = \frac{V_2 p_1}{\varkappa - 1} \times$$

$$\left\{ \frac{\varkappa G v_1}{V_2} - \frac{1}{2\varkappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\varkappa G v_1}{V_2} \right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \right\} \qquad (128$$

Die theoretische Geschwindigkeit des Einströmens berechnet sich ferner, wenn man dieselben Grössen in Gl. (123) substituirt, nach der Gleichung:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa c T_1}{A} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\varkappa G v_1}{V_2} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \qquad (129$$

Das Einströmen in den Kessel ist zu Ende, sobald $p_y = p_x = p_1$ geworden ist; nennen wir das Gewicht der eingetretenen Luftmenge für diesen Moment G_0, so folgt nach Gl. (126ª)

$$p_1 = p_2 + \frac{\varkappa G_0 p_1 v_1}{V_2}$$

oder

$$G_0 = \frac{V_2 (p_1 - p_2)}{\varkappa R T_1} \qquad (130)$$

Die Substitution dieses Werthes statt G in Gl. (126), (127), (128) giebt für das Ende des Einströmens die Temperatur im Kessel, die Arbeit der äussern Luft und die, von der im Kessel befindlichen Luft aufgenommene Arbeit.

Zahlenbeispiel. Es sei das Volumen V_2 des Kessels gerade 1 Cubikmeter; der Druck p_2 der Luft daselbst $^1/_2$ Atmosphäre und ihre Temperatur 20° C., also $T_2 = 293°$. Die Temperatur der äussern Atmosphäre sei ebenfalls 20°, sonach $T_1 = T_2$; ihr Druck in Atmosphären gemessen = 1.

Dann findet sich zunächst das Gewicht G_2 der Luft im Kessel:

$$G_2 = \frac{V_2}{v_2} = \frac{V_2 p_2}{R T_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10334}{29{,}272 . 293} = 0{,}6024 \text{ Kilogr.}$$

und das spezifische Volumen v_1 der äussern Luft

$$v_1 = \frac{R\,T_1}{p_1} = 0{,}830 \text{ Cubikmeter.}$$

Eröffnen wir nun die Mündung genau so lange, bis der innere Druck dem äussern gleich geworden ist, so ist im Momente des Schliessens die nach Gl. (130) zu berechnende Luftmenge eingeströmt: man erhält hier

$$G_0 = \frac{10334\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{1{,}41 . 29{,}227 . 293} = 0{,}4272 \text{ Kilogr.}$$

Nach Gl. (126) folgt für diesen Augenblick die Temperatur der Luft im Innern:

$$T_y = 353{,}06 \text{ oder } + 80{,}06^0 \text{ Celsius,}$$

während die Anfangstemperatur 20^0 betrug. (Hätten wir die Mündung nicht geschlossen, so würde vom Momente der Ausgleichung des Druckes an gerechnet eine Abkühlung der Luft durch die Kesselwände, sonach eine Druckabnahme und in Folge dessen ein Nachströmen der äussern Luft erfolgen.) Die äussere Arbeit L_1 bis zum Schliessen der Mündung ist nach Gl. (127)

$$L_1 = 3664 \text{ Meterkilogr.}$$

und die Arbeit, welche die Luft im Innern aufgenommen hat, nach Gl. (128)

$$L_2 = 4414 \text{ Meterkilogr.}$$

Würden wir noch für G verschiedene, zwischen 0 und G_0 liegende Werthe in obige Formeln einsetzen, so würde sich leicht das Gesetz der Zunahme des Drucks p_y und der Temperatur T_y im Kessel darstellen lassen.

Nehmen wir, um weitere Anwendungen der Formeln des vorliegenden Spezialfalles zu geben, an, es sei nach dem Eintritte von G Kilogr. Luft in den Kessel die Mündung geschlossen worden, und man hätte nun zugewartet, bis durch die Abkühlung des Gases durch die Kesselwände im Innern des Kessels die an-

fängliche Temperatur $T_1 = T_2$ der äussern Atmosphäre wieder erreicht wäre, so wird der Druck der Luft im Kessel von p_y auf p_4 herabgegangen sein, und da die Abkühlung der Luft von T_y auf T_1 bei constantem Volumen stattfand, so ist nach Mariotte und Gay-Lussac

$$\frac{p_y}{p_4} = \frac{T_y}{T_1}$$

Setzt man nun aber in den beiden Gl. (126) $T_1 = T_2$ und eliminirt man den Werth von G, so ergiebt sich leicht auch:

$$\frac{T_y}{T_1} = \frac{\varkappa p_y}{\varkappa p_2 + p_y - p_2}$$

und durch Gleichsetzen mit dem vorigen Ausdruck folgt dann sehr einfach:

$$\varkappa = \frac{p_y - p_2}{p_4 - p_2}.$$

Es lässt sich also auch auf folgendem Wege der Werth $\varkappa$ ermitteln. Man verdünne in einem Ballon die Luft bis zum Druck p_2 und warte bis die Temperatur im Innern die äussere atmosphärische geworden ist. Dann öffne man die am Ballon angebrachte Mündung und lasse eine beliebige Quantität der äussern Luft einströmen, schliesse die Mündung und beobachte im Augenblicke des Schliessens am Manometer den Druck p_y der Luft im Innern. Hierauf wartet man wieder, bis die Temperatur im Ballon gleich der äussern geworden ist, was sich dadurch anzeigt, dass der anfänglich rasch abnehmende Manometerstand stationär geworden ist und den Druck p_4 anzeigt. Auf diese Weise haben zuerst Clément und Désormes den Werth $\varkappa$ bestimmt. Sie beobachteten $p_y - p_2 = 13{,}81$ und $p_4 - p_2 = 10{,}199$ Millimeter Quecksilbersäule, woraus sich $\varkappa = 1{,}354$ berechnet; ein Werth der freilich zu klein ist. Ohne Zweifel hat das seinen Grund darin, dass die Mündung bei diesem Versuche zu lange geöffnet war (Clément und Désormes liessen die Luft so lange einströmen, bis im Ballon der äussere Druck herrschte), daher hat ohne Zweifel schon während des Einströmens eine Abkühlung, folglich eine Druckabnahme stattgefunden und daher stellte sich im Momente des Schliessens p_y zu klein heraus.

Auf sehr merkwürdige Resultate gelangt man im vorliegenden Spezialfall, wie schon Bauschinger mit Recht besonders hervorhebt, wenn man annimmt, der Kessel, in welchen die äussere atmosphärische Luft einströmt, sei anfangs luftleer. Für diesen Fall hat man in vorstehenden Formeln einfach $p_2 = 0$ und $G_2 = 0$ zu setzen.

Man erhält dann aus Gl. (126ᵃ) und (126)

$$\left.\begin{aligned} p_y &= \frac{\varkappa G p_1 v_1}{V_2} \\ T_y &= \varkappa T_1 \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Das zweite Resultat ist vor Allem merkwürdig, es sagt aus, dass beim Eintritt der atmosphärischen Luft von der Temperatur T_1 in einen luftleeren Raum sich die Temperatur plötzlich vom ersten Momente der Eröffnung der Mündung an auf den Werth $\varkappa T_1$ einstellt und constant bleibt, so lange ein Einströmen ohne Wärmemittheilung und Entziehung von Wärme stattfindet. Wäre wie oben die Temperatur der äussern Luft 20° C. also $T_1 = 293$, so ist $T_y = 413{,}13$ oder die Temperatur im Innern des anfänglich luftleeren Gefässes nach Celsius 140,13°, und diese erhält sich während des Einströmens.

Oeffnet man die Mündung nur momentan, beobachtet man den Druck p_y im Augenblicke des Schliessens der Mündung und den Druck p_4 nachdem wieder die Temperaturausgleichung stattgefunden hat, so folgt einfach auch:

$$\varkappa = \frac{p_y}{p_4}$$

Die Gln. (127) und (128) lassen sich ebenso leicht für die letzte Annahme $p_2 = 0$ in einfachere Ausdrücke überführen.

Das Ueberströmen der Gase aus einem Gefässe in ein anderes, bei veränderlichem Gefässvolumen und wenn die Temperatur in beiden Gefässen constant erhalten wird.

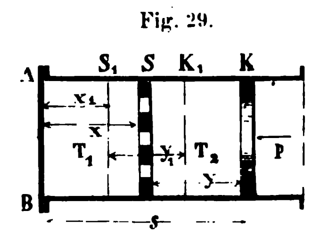
Das Problem, welches eben behandelt wurde, ist ein spezieller Fall eines viel allgemeinern; wir haben vorausgesetzt, dass das Volumen des Ausflussgefässes und der Vorlage constant erhalten werde und dass überdies während des Ueberströmens des Gases beiden Gefässen Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird. Allgemein würde sich hingegen die Frage in folgender Form vorlegen lassen: es seien die Zustandsänderungen des Gases im Ausflussgefäss und in der Vorlage zu verfolgen, wenn während des Ueberströmens beide Gefässe nach vorgeschriebenem Gesetze ihr Volumen ändern, also das Gas äussere Arbeit verrichtet oder aufnimmt und wenn überdies beiden Gefässen auch noch in vorgeschriebener Weise Wärme von aussen mitgetheilt oder entzogen wird.

Versucht man aber diese in so allgemeiner Form vorgelegte Frage zu beantworten, so stösst man auf so verwickelte und complizirte Formeln, dass man bald die Ueberzeugung gewinnt, dass es zweckmässiger ist, einzelne spezielle Fälle zu behandeln, wie es das Bedürfniss fordert. Einer dieser Fälle, der mir von besonderer technischer Wichtigkeit scheint, da er, wie dann im Weitern gezeigt werden soll, auf eine einfache Formel zur Berechnung der Arbeit der neuern calorischen Maschine des Capitain Ericsson führt, mag hier noch behandelt werden.

Ein Cylinder sei mit zwei Kolben S und K versehen (Fig. 29 a. f. S.), von denen der innere S der Verdränger oder Speisekolben, der äussere K aber der Arbeitskolben genannt werden mag. Die beiden durch die Kolben abgegrenzten Räume enthalten atmosphärische Luft; der Raum zwischen dem Verdränger und dem Boden AB enthalte davon in einem bestimmten Momente G_x Kilogr. und der Raum zwischen den beiden Kolben G_y Kilogr. Der Verdränger S sei mit einer Reihe Oeffnungen versehen, durch die beide Räume mit einander verbunden sind, und durch welche die Luft leicht aus einem Raume in den andern strömen kann. Die absolute Temperatur der Luft in dem Raume zwischen den

beiden Kolben, die um y von einander entfernt stehen, sei T_2 und die Temperatur der Luft zwischen dem Verdränger S und dem Cylinderboden, welch letzterer um x vom Kolben S entfernt ist, sei T_1 und zwar sei $T_1 > T_2$. Wegen der freien Verbindung beider Räume durch die Oeffnungen im Kolben S wird nun in beiden der Druck p der Luft der gleiche sein und das Gleichgewicht dadurch erhalten werden, dass wir den Kolben K von aussen pro Quadrateinheit mit p belasten. Wegen der Gleichheit des Druckes wird, wenn wir den Verdränger festhalten

Fig. 29.



und ihn als für Wärme undurchdringlich ansehen, ein Ueberströmen des Gases aus einem Raume in den andern nicht stattfinden, wenigstens kann man sich vorstellen, dass durch die Oeffnungen im Kolben S nur eine sehr langsame Ausgleichung stattfindet, da ruhende Luft bekanntlich ein sehr schlechter Wärmeleiter ist.

Denke man sich nun den Verdränger um unendlich wenig (von links nach rechts) verschoben, so wird eine unendlich kleine Luftmenge aus dem kältern Raume in den wärmern hinüber geschoben, wo sie erwärmt wird; in Folge dessen vergrössert sich der Druck der Luft zunächst im wärmern Raume und dann auch, wegen des Zurückströmens eines Theiles der übergegangenen Luft der Druck im kältern Raume, bis wieder Druckausgleichung stattgefunden hat. In Folge der Druckvermehrung in beiden Räumen wird nun aber im Fernern der Kolben K, der anfangs um s vom Cylinderboden AB abstand, um ds fortgeschoben worden sein und die Arbeit, welche zur Ueberwindung des äussern Druckes p vom Gase verrichtet wurde, beträgt:

$$dL = Fp\,ds$$

wenn F der Kolbenquerschnitt ist und dL die Arbeit darstellt.

Hat nun, wie wir voraussetzen wollen, in Folge entsprechender Zuleitung, resp. Ableitung von Wärme eine Aenderung der Temperaturen T_1 und T_2 in beiden Räumen nicht stattgefunden, so lässt sich die Zunahme Fds des Gesammtvolumens, wie folgt. ermitteln.

Am Schlusse des angedeuteten Vorganges findet sich die Luftmenge G_x zwischen Verdränger und Boden AB des Cylinders

um dG_x vermehrt; und da eine Temperaturerhöhung dieser Luftmenge dG_x stattfand, so ist damit eine Volumenvergrösserung $Fds = (v_x - v_y)\, dG_x$ verbunden, wenn das spezifische Volumen der Luftmengen G_x und G_y resp. mit v_x und v_y bezeichnet wird. Nach der Gleichung:

$$pv = RT.$$

welche das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac ausspricht, ist aber im vorliegenden Falle

$$v_x = \frac{RT_1}{p} \text{ und } v_y = \frac{RT_2}{p},$$

sonach auch die Volumenvermehrung

$$Fds = \frac{R}{p}\,(T_1 - T_2)\, dG_x$$

und hiernach, nach der ersten der vorhin hingestellten Gleichungen, die Arbeit, welche auf den Arbeitskolben K übertragen worden ist:

$$dL = R\,(T_1 - T_2)\, dG_x$$

und diese Gleichung ist integrabel, da wir die Temperaturen T_1 und T_2 als constant voraussetzen: für die weitern Zwecke ist es jedoch vorzuziehen, die Gleichung vor der Integration noch umzuformen.

Da das Gewicht der gesammten Luftmenge, die in beiden Cylinderräumen eingeschlossen ist, constant ist, also die Beziehung

$$G_x + G_y = \text{Constant}$$

besteht, so folgt durch Differentiation:

$$dG_x = -\, dG_y$$

oder weil nach der Figur

$$G_y v_y = Fy$$

oder:

$$G_y = \frac{Fpy}{RT_2}$$

ist, auch:

$$d\,G_x = -\frac{F}{R\,T_2}\,d\,(p\,y)$$

Die Substitution in die Gleichung für $d\,L$ ergiebt dann

$$d\,L = -\,F \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2}\,d\,(p\,y)$$

Angenommen der Verdränger S stand anfangs bei S_1 (Fig. 29) um x_1 vom Cylinderboden ab und der Arbeitskolben K stand dabei in der Lage K_1 um y_1 vom Verdränger ab und im Fernern angenommen, der Anfangsdruck sei p_1, so ergiebt die Integration vorstehender Gleichung unter der Voraussetzung, dass der Verdränger um $x - x_1$ und der Arbeitskolben K um $y - y_1$ verschoben würde, die Arbeit, welche der Arbeitskolben nach aussen hin abgab:

$$L = F \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} \cdot (p_1\,y_1 - p\,y) \qquad (132)$$

Sehen wir den Anfangsdruck p_1 als gegeben an, so ist nur noch der Enddruck p zu ermitteln und das geschieht leicht auf folgendem Wege:

Der bisher angewandten Bezeichnung gemäss ist:

$$G_x\,v_x = F\,x \text{ und } G_y\,v_y = F\,y$$

oder die schon angegebenen Werthe von v_x und v_y eingesetzt und das Gesammtgewicht der Luft auf beiden Seiten des Verdrängers mit G bezeichnet, giebt

$$G = G_x + G_y = \frac{F\,p\,x}{R\,T_1} + \frac{F\,p\,y}{R\,T_2}$$

oder

$$G = \frac{F\,p}{R}\left(\frac{x}{T_1} + \frac{y}{T_2}\right)$$

Im Anfange des Vorganges ist aber $x = x_1$, $y = y_1$ und $p = p_1$ also auch:

$$G = \frac{F\,p_1}{R}\left(\frac{x_1}{T_1} + \frac{y_1}{T_2}\right) \qquad (133)$$

und daher folgt durch Gleichsetzung beider Werthe für G nach einfacher Reduction:

$$p = p_1 \cdot \frac{x_1 T_2 + y_1 T_1}{x T_2 + y T_1} \tag{134}$$

und dann endlich die Arbeit L nach Gl. (132) nach Substitution des Werthes von p:

$$L = F p_1 (T_1 - T_2) \cdot \frac{x y_1 - y x_1}{x T_2 + y T_1} \tag{135}$$

Ericsson's neuere calorische Maschine. Die im Vorstehenden entwickelten Formeln geben mir das Mittel an die Hand, eine sehr einfache Formel zur Berechnung der Arbeitsstärke der neuern calorischen Maschine von Ericsson, wie sie in den letzten Jahren vielfach ausgeführt wurde, aufzustellen und hier die Theorie dieser Maschine als Beispiel zur Erläuterung der eben entwickelten Formeln hinzustellen.

Der obere Theil der Fig. 30 a. f. S. stellt den Cylinder der Maschine dar; derselbe ist rechts offen, links durch den Deckel AB, der zugleich die hintere Wand des Feuerraumes bildet, geschlossen.

Im Cylinder bewegen sich zwei Kolben S und K; der Kolben S ist wieder der Verdränger (Speisekolben) und der Kolben K der Arbeitskolben. Beide Kolben sind mit Durchlassöffnungen versehen, die durch Klappen überdeckt werden, die sich sämmtlich nach der linken Seite der Figur öffnen *); überdies befindet sich in der Nähe des Deckels ein Abzugrohr, das durch ein Ventil eröffnet oder abgesperrt werden kann. Die äussere atmosphärische Luft tritt, wie gleich näher dargelegt werden soll, durch die Oeffnungen im Arbeitskolben in den Raum zwischen beide Kolben S und K ein und hat hier noch (wenigstens nahezu) die Temperatur T_2 der äussern Atmosphäre. Diejenige

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass Fig. 30 des Textes eine schematische ist; was die constructive Ausführung dieser Maschine betrifft, so vergl. das vortreffliche Schriftchen von Boëtius, »Die Ericsson'sche calorische Maschine etc. 2. Auflage. Hamburg 1861.« S. auch

Lipowitz, »Lenoirs und Ericssons neue Bewegungsmaschinen.« Leipzig 1861.

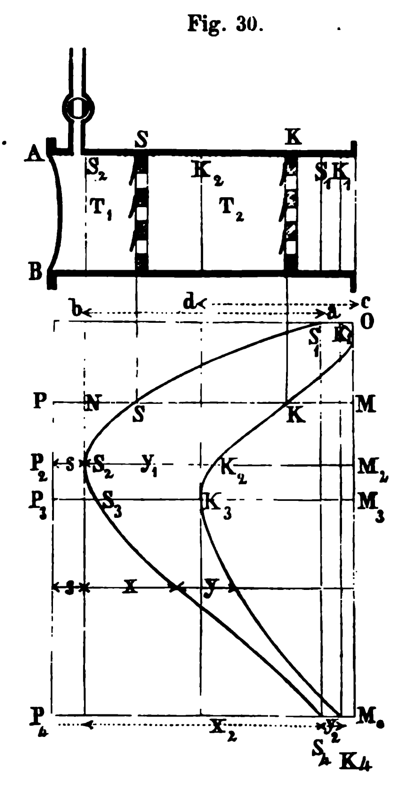
Grashof, »Theorie der Ericsson'schen calorischen Maschine« Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. IV. S. 292.

Luft hingegen, welche in Folge der Bewegung des Verdrängers von links nach rechts hin durch die Oeffnungen im Verdränger in den Raum AS hinübergeschoben wurde, hat dort eine weit höhere Temperatur T_1, weil sie vom Feuerraume AB her stark erhitzt wird. Man darf wegen des raschen Ganges der Maschine unbedenklich die Temperatur T_1 in diesem Raume ebenfalls als constant betrachten.

Das Spiel der Maschine, deren Einrichtung wenigstens im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt wird, lässt sich nun sehr leicht übersehen, wenn man ein Kolbendiagramm zeichnet, wie ich es im untern Theile der Figur 30 dargestellt habe.

Die Verticale OM_0 repräsentirt den Umfang des Warzenkreises der Kurbel; gehen wir von einer gewissen Anfangsposition der Kurbelwarze aus, so werden, nachdem die Warze den Bogen OM zurückgelegt hat, die beiden Kolben, um eine gewisse Strecke MK und MS vom rechten Cylinderende entfernt stehen. Verbindet man nun die verschiedenen Lagen jedes Kolbens durch eine Linie, so erscheinen zwei Curven; die Curve auf der linken Seite der Fig. 30 ($S_1 S S_4$) giebt das Gesetz der Bewegung des Verdrängers oder Speisekolbens und die Curve rechts ($K_1 K K_4$) das Bewegungsgesetz des Arbeitskolbens; beide Curven zusammen betrachtet, ergeben dann auch ein deutliches Bild der gegenseitigen Bewegung beider Kolben und ihrer Positionen in jedem Augenblicke und man erkennt recht deutlich die Volumenänderungen des Raumes KS zwischen beiden Kolben, welcher die kalte Luft enthält und des Raumes SP zwischen Speisekolben und Cylinderboden, welcher Raum die heisse Luft einschliesst. Hat

Fig. 30.



die Kurbelwarze den Bogen OM zurückgelegt, so ist die Entfernung beider Kolben von einander eben SK (der Werth y unserer Fig. 29 S. 196) und der Verdränger steht um SN vom linken Ende seines Hubes ab. Hat der Verdränger das Hubende erreicht, so bleibt noch ein gewisser Raum zwischen ihm und dem Cylinderboden AB übrig, den wir den schädlichen Raum nennen wollen; die Länge desselben in der Richtung der Cylinderaxe gemessen, sei $PN = s$ *). Der ganze Hub des Verdrängers ist ab und der Hub des Arbeitskolbens $cd = M_3 K_3$.

Nehmen wir nun an, die Kurbelwarze beginnt von O aus ihren Lauf, so stehen die beiden Kolben in der Lage S_1 und K_1, der Raum zwischen beiden von der Länge $S_1 K_1 = S_4 K_4 = y_2$ enthält Luft von der Temperatur T_2 der äussern Atmosphäre: der Raum links vom Verdränger $S_4 P_4 = x_2 + s$ enthält heisse Luft von der Temperatur T_1. Bewegt sich nun die Kurbel durch den Bogen OM_2, so geht der Verdränger rasch nach dem andern Hubende (Curve $S_1 S S_2$); dabei schliessen sich die Klappen an den Durchlassöffnungen des Verdrängers, und da das Ventil im Austrittsrohr während dieses Vorganges offen erhalten wird, so schiebt hierbei der Verdränger die ganze heisse Luftmasse, die sich vor ihm befindet, durch das Rohr ins Freie. Gleichzeitig macht nun aber der Arbeitskolben K einen Weg, der durch die Curve $K_1 K K_2$ bezeichnet wird, er geht erst ein Stück nach rechts und folgt dann dem Verdränger in der Richtung nach links, bewegt sich aber langsamer; dadurch wird der Raum zwischen beiden Kolben fortwährend vergrössert, die Klappen im Arbeitskolben werden durch den Ueberdruck der äussern Atmosphäre eröffnet und die äussere atmosphärische Luft tritt in den Raum zwischen den beiden Kolben.

Während sonach der Verdränger den ganzen Hub zurücklegt und der Arbeitskolben bis K_2 gelangt, findet gegen beide Flächen des Kolben atmosphärische Pressung p_1 statt, es wird also während

*) Die Bewegung der beiden Kolben, deren Gesetz durch die beiden Curven des Kolbendiagrammes (Fig. 30) dargestellt wird, liesse sich durch verschiedene Bewegungsmechanismen hervorbringen; auf einfachere Weise, als dies von Ericsson selbst vorgeschlagen wurde, aber sicher nicht. Der von Ericsson erdachte Bewegungsmechanismus, bei dem beide Kolben durch Hebel und Lenkstangen auf die gemeinschaftliche Kurbel wirken, ist wegen seiner Einfachheit und Vollkommenheit bewundernswürdig.

des Weges OM_2 der Kurbel von der Maschine weder Arbeit verrichtet, noch (abgesehen von den Reibungswiderständen) Arbeit consumirt: dieser ganze Vorgang umfasst die Periode der Speisung der Maschine; am Schlusse desselben schliesst man das Austrittsventil im Austrittsrohr und nun ist, wenn F der Kolbenquerschnitt ist, links vom Verdränger das Luftvolumen Fs (Volumen des schädlichen Raumes) von der Temperatur T_1 und zwischen beiden Kolben das Luftvolumen Fy_1 (Fig. 30) von der Temperatur T_2 enthalten. Verfolgen wir nun die Kurbel weiter auf ihrem Wege von M_2 nach M_3, so zeigt das Diagramm, dass der Verdränger zurückgeht ($S_2 S_3$), während der Arbeitskolben vorwärts, vollends bis ans Ende seines Hubes ($K_2 K_3$) fortschreitet; dieser Vorgang umfasst die Periode der Compression; auf diesem Wege sind die Klappen im Arbeitskolben geschlossen und diejenigen im Verdränger offen, die Luft wird zusammengedrückt und zugleich ein Theil derselben aus dem kalten in den heissen Raum hinübergeschoben.

Jetzt erst beginnt nun die eigentliche Arbeitsperiode, während die Kurbel durch den Weg $M_3 M_0$ in ihre Anfangslage zurückkehrt, gehen beide Kolben auf den Wegen $S_3 S_4$ und $K_3 K_4$ ebenfalls in die Anfangsposition zurück: ihr Abstand wird dabei kleiner und kleiner und dadurch die Luft nach und nach aus dem kalten in den heissen Raum hinübergeschoben. In der Periode $M_2 M_3$ der Compression absorbirt die Maschine Arbeit, in der Periode $M_3 M_0$ verrichtet sie Arbeit.

Die ganze gewonnene Arbeit lässt sich nun mit Hülfe der Gl. (135) leicht ermitteln. Bei Beginn der Compression, d. h. im Augenblicke des Absperrens der im Cylinder enthaltenen Luft, war der Abstand des Verdrängers vom Boden s und der Abstand beider Kolben von einander y_1; am Ende ist die Länge des heissen, cylindrischen Luftraumes $s + x_2$ und die Entfernung beider Kolben y_2; setzen wir sonach s statt x_1, sowie $s + x_2$ statt x und y_2 statt y in Gl. (135), so findet sich hier die von der Luft im Cylinder verrichtete Arbeit

$$L = F p_1 (T_1 - T_2) \frac{y_1 (x_2 + s) - y_2 s}{(x_2 + s) T_2 + y_2 T_1}$$

Dies ist jedoch nicht die ganze Arbeit, welche pro Umdrehung auf die Kurbel übertragen wird.

Während nämlich der Arbeitskolben aus der Entfernung $M_2 K_2$ vom rechten Hubende in die Entfernung $M_0 K_4$ übergeht, also den Weg $M_2 K_2 - M_0 K_4 = x_2 + y_2 - y_1$ zurücklegt, ist noch der äussere Atmosphärendruck Fp_1 zu überwinden, es ist also noch von vorstehender Arbeit L der Arbeitsverlust

$$Fp_1 (x_2 + y_2 - y_1)$$

in Abzug zu bringen.

Hiernach folgt denn endlich die ganze pro Umdrehung gewonnene theoretische Arbeit L_e der Maschine

$$L_e = Fp_1 \left[(T_1 - T_2) \frac{y_1 x_2 + s (y_1 - y_2)}{(x_2 + s) T_2 + y_2 T_1} - (x_2 + y_2 - y_1) \right]$$

oder die Arbeit L_s der Maschine pro Sekunde in Meterkilogrammen, wenn die Kurbelwelle in der Minute n Umdrehungen macht:

$$L_s = \frac{Fp_1 n}{60} \left[(T_1 - T_2) \frac{y_1 x_2 + s (y_1 - y_2)}{(x_2 + s) T_2 + y_2 T_1} - (x_2 + y_2 - y_1) \right] \quad (136)$$

Die Luftmenge G (dem Gewichte nach), welche die Maschine in der Sekunde ansaugt, findet sich leicht in folgender Art:

Das bei jeder Umdrehung angesaugte Luftvolumen von atmosphärischer Pressung und Temperatur ist, wie man sich leicht überzeugt:

$$F (y_1 - y_2)$$

und dessen Gewicht

$$\frac{F (y_1 - y_2) p_1}{R T_2}$$

und daher das Gewicht G:

$$G = \frac{y_1 - y_2}{R T_2} \cdot \frac{Fp_1 n}{60} \quad (137)$$

Dividirt man Gl. (136) durch die vorstehende. so ergiebt sich die Beziehung zwischen der Arbeit der Maschine und dem Gewichte der benutzten Luft; die Arbeit erscheint dem Werthe G, wie natürlich, unter sonst gleichen Verhältnissen proportional.

Zur Erläuterung vorstehender Formeln soll hier dasselbe Beispiel zu Grunde gelegt werden, welches Boëtius (a. a. O. S. 31) aufführt.

Bei einer calorischen Maschine betrug der Kolbenquerschnitt $F = 0,1652^{qm}$; ferner war (vergl. Fig. 30) $s = 0,084^{m}$; $y_1 = 0,275^{m}$; $s_2 = 0,418^{m}$; $y_2 = 0,025^{m}$. Die Temperatur der äussern Luft war 10° und die der heissen Luft 300° Celsius: d. g. $T_2 = 283$ und $T = 573°$; hieraus folgt sofort nach Gl. (136) durch Substitution, wenn $p = 10334$ eine Atmosphäre gesetzt wird:

$$L_s = 869,048 \cdot \frac{Fn}{60}$$

und aus Gl. (137) das Luftgewicht pro Sekunde

$$G = 0,31187 \cdot \frac{Fn}{60}$$

Die Division ergiebt:

$$L_s = 2786,571 \cdot G$$

Demnach entspricht bei dieser Maschine jedem Kilogramm Luft pro Sekunde eine Arbeit von 2786,571 Meterkilogr.

Bei den Versuchen machte diese Maschine pro Minute $n =$ 45 Umdrehungen; setzen wir diesen Werth und überdies noch den Werth von F in vorstehende Ausdrücke ein, so folgt für diese Maschine die Arbeit pro Sekunde

$$L_s = 107,544 \text{ Meterkilogr.}$$

und die Luftmenge, welche dieselbe in der Sekunde verbraucht

$$G = 0,03859 \text{ Kilogr.}$$

Der Versuch mit dem Bremsdynamometer ergab die Arbeit 68 Meterkilogr., sonach wäre der Wirkungsgrad der Maschine (im gebräuchlichen Sinne)

$$\frac{68}{107,544} = 0,632$$

Boëtius berechnet die Arbeit derselben Maschine nach einer andern Formel zu 101 Meterkilogr., also wenig abweichend von unserm Resultate; dessen Formel ist aber, ebenso wie die [illegible] von Grashof (a. a. O.) von sehr complizirter Form [illegible]eiterer Discussion ihrer logarithmischen Form wegen nicht geeignet.

Obgleich unsere obige Grundgleichung auch nur als Näherungsgleichung hingestellt werden darf, so hat sie doch den Vorzug der Einfachheit, und den, dass sich mittelst derselben die Arbeit der Maschinen allein aus den Kolbenpositionen bei Beginn der Compression und am Ende der Arbeitsperiode berechnen lässt und endlich, dass sie eine Discussion zulässt, wenigstens so weit, dass man erkennen kann, welche Grössen bei der Construction solcher Maschinen vor Allem ins Auge zu fassen sind.

Setzen wir beispielsweise die Länge s des schädlichen Raumes Null, und nehmen wir an, dass beide Kolben am Ende der Arbeitsperiode dicht bei einander stehen, d. h. setzen wir auch $y_2 = 0$, so folgt aus Gl. (136) sehr einfach die Arbeit pro Sekunde

$$L_s = \frac{F p_1 n}{60} \left(\frac{T_1}{T_2} y_1 - x_2 \right)$$

oder wenn man die Gl. (137) für G benutzt:

$$L_s = R G \left(T_1 - T_2 \frac{x_2}{y_1} \right) \text{*)} \qquad (138)$$

Diese Gleichung zeigt wenigstens, dass vorwaltend die beiden Werthe x_2 und y_1, sowie die Temperaturen T_1 und T_2 auf die Stärke der Maschine von Einfluss sind.

Ein weiteres Eingehen in die angeregte Frage wäre dem Zwecke der vorstehenden Schrift nicht entsprechend.

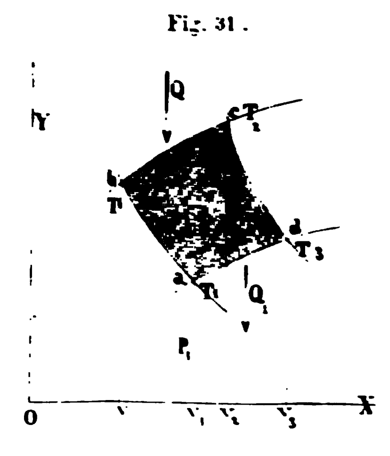
Theorie der geschlossenen calorischen Maschinen; Anwendung der Sätze vom Kreisprozesse auf permanente Gase.

Bei den geschlossenen calorischen Maschinen wird ein in der Maschine eingeschlossenes Luftquantum durch Compression und Expansion, Erwärmung und Abkühlung der Art durch ver-

*) Der Form nach stimmt diese Gleichung genau mit einer empirischen Formel überein, welche Grashof in einer Besprechung der Resultate von Bremsversuchen, die in Buckau bei Magdeburg an derartigen Maschinen gemacht wurden, aufstellt. (Siehe Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. B. V. S. 138.)

schiedene Zustände hindurch geführt, dass äussere Arbeit gewonnen wird und das Gas periodisch in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Der Vorgang hierbei ist nichts Anderes, als ein vollkommener Kreisprozess und die Sätze, die wir im ersten Abschnitt über einen solchen Prozess vorgeführt haben, können bei Beurtheilung der Vorgänge in einer geschlossenen calorischen Maschine nun ohne Weiteres verwendet werden.

Fig. 31.



Stellen wir uns vor, in einer derartigen Maschine sei gerade die Gewichtseinheit Gas eingeschlossen und befinde sich im Zustand a (Fig. 31), das Volumen sei v_1, der Druck p_1 und die absolute Temperatur T_1. Wir ziehen nun zwei adiabatische Curven ab und cd, von denen die erstere durch den Punkt a geht, ferner zwei gleichartige Curven ad und bc, in Betreff deren wir die spezielle Voraussetzung machen wollen, dass sie dem Gesetze

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

unterworfen sind, in welcher Formel m und n zwei beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten. In dieser Annahme einer bestimmten Art von Curven von dem vorgeschriebenen Gesetze liegt zwar eine gewisse Beschränkung der allgemeinen Sätze von früher, für die vorliegende Aufgabe aber ist es nicht der Fall, da alle bis jetzt praktisch an Maschinen durchgeführten Kreisprozesse durch vorliegende Annahme eingeschlossen werden, wie das Weitere herausstellen wird.

Wir haben früher auf S. 145 gezeigt, dass die Wärmemenge, welche dem Gase mitzutheilen oder zu entziehen ist, wenn Druck und Volumen sich in der vorgeschriebenen Weise ändern, der Temperaturänderung direct proportional ist; wir haben gesetzt

$$dQ = \lambda dt = \lambda dT \qquad (139)$$

wobei die constante Grösse

$$\lambda = \frac{m\varkappa - n}{m - n} c \tag{140}$$

die spezifische Wärme des Gases für das Aenderungsgesetz:

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

genannt wurde.

Der Vorgang in unserer calorischen Maschine sei nun folgender:

1) Das Gas werde vom Zustand a aus ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme comprimirt, bis seine Temperatur T geworden ist; es gehe also auf der adiabatischen Linie aus dem Zustand a in den Zustand b über.

2) Das Gás expandire jetzt vom Volumen v auf das Volumen v_2 auf der Curve bc vom angegebenen Gesetze; ist die Endtemperatur im Zustande c: T_2, so wäre nach Gleichung (139) die Wärmemenge

$$Q = \lambda (T_2 - T) \tag{141}$$

dem Gase mitzutheilen.

3) Das Gas expandirt weiter ohne Wärmemittheilung, gehe also auf der adiabatischen Linie von c nach d, wobei die Temperatur T_2 auf T_3 sinkt. Der Punkt d ist so gewählt, dass wenn man

4) das Gas jetzt auf der Curve da des angegebenen Gesetzes comprimirt, dasselbe in den Anfangszustand a zurückkehrt; dabei ist aber die Wärmemenge

$$Q_1 = \lambda (T_3 - T_1) \tag{142}$$

abzuführen.

Während dieses ganzen Prozesses ist nach Früherm eine Arbeit L gewonnen worden, die durch die Fläche $abcd$ gemessen wird und zwar gilt die Beziehung (nach Gl. 22, S. 52)

$$AL = Q - Q_1 \tag{143}$$

Ausser dieser Gleichung lässt sich aber noch eine andere aufstellen, mit deren Hülfe die vorstehende zweckentsprechend umgeformt werden kann.

Es wurde früher auf S. 83 u. f. bewiesen, dass für jeden

Uebergang eines Körpers von einem beliebigen Punkte einer gegebenen adiabatischen Curve nach einem beliebigen Punkte einer zweiten adiabatischen Linie das Integral

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

eine constante Grösse sei. Nun war S nichts anderes als $a + t$, d. h. der Werth, den wir die absolute Temperatur nennen und mit T bezeichneten; setzen wir diesen Werth statt S in vorstehende Formel und überdies für vorliegenden Fall dQ nach Gl. (139), so ergiebt sich für den Uebergang von b nach c (Fig. 31)

$$P = \int_{T}^{T_2} \frac{\lambda\, dT}{A\, T} = \frac{\lambda}{A} \operatorname{logn.} \frac{T_2}{T}$$

und für den Uebergang von a nach d

$$P = \int_{T_1}^{T_3} \frac{\lambda\, dT}{A\, T} = \frac{\lambda}{A} \operatorname{logn.} \frac{T_3}{T_1}$$

und hieraus folgt für unseren Fall durch Gleichsetzen die merkwürdige Beziehung:

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T} \tag{144}$$

Bestimme ich hieraus T_3 und substituire den Werth in Gl. (142), so folgt

$$Q_1 = \lambda \frac{T_1}{T} (T_2 - T)$$

und durch Verbindung mit Gl. (141)

$$Q_1 = \frac{T_1}{T} Q \tag{142a}$$

Setze ich diesen Werth in die Gl. (143), so folgt für die [illegible] L auch die Gleichung

$$L = \frac{Q}{A\,T}(T - T_1) \qquad (145)$$

Diese Gleichung spricht ein neues Gesetz aus, das übrigens, wie aus dem ganzen Gange der Entwicklung hervorgeht, nicht blos für Gase, sondern für jeden Körper gilt. »Ist nämlich bei einem einfachen umkehrbaren Kreisprozess vorliegender Art auf dem Wege *ad* und *bc* die mitgetheilte oder entzogene Wärme der Temperaturerhöhung proportional, so berechnet sich die Arbeit des Kreisprozesses allein schon aus der mitgetheilten Wärmemenge Q und den Temperaturen T_1 und T in der ersten adiabatischen Linie *ab*; welche der unendlich vielen Curven, die der gegebenen Bedingung entsprechen, dabei für die Strecken *ad* und *bc* auch gewählt werden mögen.«

Bei Gasen ist das Gesetz dieser Curven

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

Nach dem Angegebenen kommt es also auf die Werthe m und n nicht weiter an.

Dem Bau nach ist die Gl. (145) mit Gl. (29, S. 61) identisch, sie ist aber viel allgemeiner, denn dort haben wir ausdrücklich vorausgesetzt, dass die Curven *ad* und *bc* isothermische Linien seien. d. h. dass die Expansion auf dem Wege *bc* bei constanter Temperatur T und die Compression auf dem Wege *da* bei constanter Temperatur T_1 stattfinden solle.

Kehren wir wieder zu vorliegender Frage zurück, so lässt sich zunächst Gl. (145) noch dadurch umformen, dass wir den Werth von Q nach Gl. (141) substituiren; man erhält:

$$L = \frac{\lambda}{A}\,\frac{(T_2 - T)\,(T - T_1)}{T} \qquad (146)$$

Wir wollen nun im Weitern die Annahme machen, dass λ positiv ist, d. h. dass in Gl. (140) $m\varkappa > n$ oder $\varkappa > \frac{n}{m}$ ist, eine Annahme, die immer noch alle praktischen Fälle in sich schliesst. Aus dieser Annahme geht sofort das Resultat:

$$T_3 > T_1 \text{ und } T_2 > T$$

hervor und daraus folgt dann im Fernern, dass bei unserer calorischen Maschine T_1 die tiefste und T_2 die höchste Temperatur ist, die im ganzen Prozesse vorkommt.

In Betreff dieser Temperaturen sind wir nun aber im technischen Leben an gewisse Grenzen gebunden; bezeichne ich die entsprechenden Temperaturen nach Celsius gemessen mit t_1 und t_2, so können wir offenbar in der Praxis die Abkühlung der Luft in der Maschine höchstens bis auf die Temperatur der äussern Atmosphäre bringen, also würde, weil im Winter Schnee und Eis zur Abkühlung verwendet werden könnte (vom technischen Standpunkte aus ist an andere Abkühlungsmittel nicht zu denken), als unterste Grenze der Temperatur $t_1 = 0$ oder $T_1 = 273^0$ anzusehen sein.

Aber auch nach der andern Seite sind wir beengt: wir sind, wenigstens bis jetzt, nicht im Stande, Maschinen herzustellen, bei denen die einzelnen Theile und gerade die hauptsächlichsten Theile, wie Kolben und Cylinder eine Temperatur von mehr als $t_2 = 300^0$ d. h. $T_2 = 573^0$ erlangen; einzelne Mechaniker betrachten selbst diese Grenze, und vielleicht mit Recht als schon zu hoch.

Gl. (146) spricht aus, dass die durch eine geschlossene calorische Maschine gewonnene Arbeit L um so grösser wird, je grösser T_2 und je kleiner T_1 ist, mit andern Worten, je grösser das Temperaturintervall $T_2 - T_1$ ist. Nun sind wir aber, und ohne Zweifel auf immer in Betreff dieser Werthe zwischen die angegebenen Grenzen gebannt, daher bleibt uns nur noch eine Frage zu beantworten übrig, wenn es sich um möglichst grossen Effect einer calorischen Maschine handelt. Gl. (146) enthält noch den Werth T die Zwischentemperatur im Zustande b (Fig. 31). In Betreff dieses Werthes haben wir bei der Anordnung der calorischen Maschine vollkommen freie Hand; man wird nun aber T offenbar so wählen müssen, dass die Arbeit L Gl. (146) ein Maximum wird. Die angezogene Gleichung schreibt sich:

$$L = \frac{\lambda}{A}\left(T_2 + T_1 - T - \frac{T_1 T_2}{T}\right) \text{*)}.$$

---

*) Diese Gleichung geht in die unbestimmte Form

$$L = \infty \, . \, 0$$

über, wenn man $T = T_2$, also auch nach Gl. (144) $T_3 = T_1$ macht; in diesem

Durch Differentiation in Hinsicht T giebt aber diese Gleichung für L ein Maximum für

$$T = \sqrt{T_1 T_2} \tag{147}$$

Ist also die obere und untere Grenze der Temperaturen gegeben, wie das in Wirklichkeit der Fall ist, so ergiebt sich das Maximum der Arbeit der Maschine, wenn man die Compression auf dem Wege ab (Fig. 31) so weit fortsetzt, bis die Temperatur von T_1 auf $T = \sqrt{T_1 T_2}$ gestiegen ist.

Jetzt bestimmt sich nun auch die Temperatur T_3 im Zustand d nach Gl. (144)

$$T_3 = \frac{T_1 T_2}{T} = \sqrt{T_1 T_2} = T \tag{148}$$

Hieraus folgt ein weiteres und für die Beurtheilung der Maschine solcher Art sehr wichtiges Resultat. Für den vortheilhaftesten Gang der Maschine soll zwischen den Temperaturen die vorstehende Beziehung gelten, d. h. der Punkt d soll auf der durch b gehenden isothermischen Curve bd liegen.

Auf dem Wege bc beginnt nun aber die Wärmemittheilung bei der Temperatur T und wird bis zur Temperatur T_2 hinauf fortgesetzt, während die Wärmeentziehung auf dem Wege da mit der gleichen Temperatur T anfängt und bis T_1 herab fortgesetzt wird. Die Wärmeentziehung findet sonach auf dem ganzen Wege da bei niedrigerer Temperatur statt, als die Wärmemittheilung auf dem Wege bc, die Wärmemenge Q_1 lässt sich daher nicht und auch nicht einmal ein Theil davon bei dem gleichen Prozesse wieder verwerthen; mit kurzen Worten die

---

Falle sind aber die beiden Curven bc und ad (Fig. 31) isothermische Curven, für welche nach S. 144 $m = n$, also die spezifische Wärme λ nach Gl. (140) $\lambda = \infty$ wird.

Für diesen wichtigen Ausnahmefall berechnet sich aber die gewonnene Arbeit nach Gl. (145), wenn dort $T = T_2$ gesetzt wird und unter Q dort die Wärmemenge verstanden wird, die bei constanter Temperatur T_2 auf dem Wege bc dem Gase zugeführt wird. Diese Wärmemenge lässt sich dann nicht mehr als Funktion der Temperatur darstellen, sondern ist durch Anfangs- und Endvolumen oder Anfangs- und Enddruck auszudrücken. Wir kommen unten auf diesen Ausnahmefall zurück.

sogenannten Regeneratoren, auf deren Erfindung man s. Z. so grosse Hoffnungen für den weitern Ausbau der calorischen Maschine setzte, sind vollständig wirkungslos.

Die Wärmemenge Q_1 können wir zwar in einem Regenerator aufspeichern und irgendwie verwerthen, für die Maschine selbst aber ist diese Wärmemenge nicht weiter verwendbar*). Nur dann, wenn die Maschine nicht das Maximum der Arbeit liefert, wenn z. B. die Expansion auf der Curve cd nicht weit genug stattfindet, d. h. am Ende $T_3 > T$ ist, liesse sich ein Theil der Wärme durch den Regenerator aufsammeln und bei der Wärmemittheilung auf dem Wege bc im Anfange wieder verwenden. Ist aber, wie wir es für das Maximum der Arbeit als nöthig gefunden haben: $T_3 = T = \sqrt{T_1 T_2}$ so nützt die Anbringung eines Regenerators nichts.

Setzen wir nun den gefundenen Werth von T in die Gl. (145) und (146) ein, so erhält man das Maximum der Arbeit, das wir mit L_m bezeichnen wollen:

$$L_m = \frac{Q}{A} \cdot \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} \tag{149}$$

oder auch:

$$L_m = \frac{\lambda}{A} \left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2 \tag{150}$$

Beide Formeln bezogen auf die Gewichtseinheit Luft; arbeiten in der Maschine M Kil. Luft, so ist nach der letzten Gleichung

$$L_m = \frac{\lambda}{A} M \left[\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right]^2 \tag{151}$$

und in Gl. (149) bedeutet dann Q die ganze Wärmemenge, die pro Spiel zugeführt werden muss; diese Gleichung lehrt zugleich, dass die Maximalleistung nur von Q und den Grenztemperaturen T_1 und T_2 abhängt, nicht aber von dem speziellen Gesetze der Curven ad und bc, d. h. von den Werthen m und n der Gl. (140), ebensowenig aber auch von dem Drucke p_1, welchen das Gas beim Beginne eines Kreislaufes hat.

Damit aber das Maximum der Arbeit erzielt werde, müssen

*) Auf die Wirkungslosigkeit des Regenerators bei richtig arbeitenden calorischen Maschinen hat zuerst Hirn aufmerksam gemacht. (Hirn, Théorie mécanique de la chaleur.)

die Verhältnisse $\frac{v_1}{v}$ und $\frac{v_3}{v_1}$ für die Compression und die Verhältnisse $\frac{v_2}{v}$ und $\frac{v_3}{v_2}$ für die Expansion bestimmte Werthe haben. Da *ab* und *cd* adiabatische Curven sind. so folgt für vorliegenden Fall nach Gl. (77) S. 131

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \text{ und } \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

oder wegen der Beziehung (148)

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} = \frac{v_3}{v_2} \tag{152}$$

Ferner schreibt sich die Gleichung für die Druckänderungen der Curven *ad* und *bc* (Fig. 31) nämlich:

$$p^m v^n = \text{Constant}$$

wenn wir $\frac{n}{m} = r$ setzen, auch

$$p v^r = \text{Const.}$$

und hieraus leiten sich leicht die folgenden Formeln ab, wenn man das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac beachtet:

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{v_x}{v_y}\right)^r = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)^{\frac{r}{r-1}} \tag{153}$$

Für vorliegenden Fall folgt daher

$$\frac{v_2}{v} = \left(\frac{T}{T_2}\right)^{\frac{1}{r-1}} \text{ und } \frac{v_3}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

und für das Maximum der Arbeit unter Benutzung der Gl. (148)

$$\frac{v_2}{v} = \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \frac{v_3}{v_1} \tag{154}$$

Auf ähnlichem Wege lässt sich auch leicht der Druck des Gases in den 4 Zuständen $abcd$ bestimmen, wenn der Druck p_1 für den Anfangszustand a bekannt ist.

Nehmen wir hinsichtlich der Temperaturen die äussersten praktischen Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 300$, d. h. $T_1 = 273$ und $T_2 = 573$, so ergiebt sich für das Maximum der Arbeit der calorischen Maschinen unter den gemachten allgemeinen Voraussetzungen, nach Gl. (149), wenn wir dort:

$$\sqrt{T_2} = \sqrt{573} = 23{,}9374$$

$$\sqrt{T_1} = \sqrt{273} = 16{.}5227$$

und

$$A = \frac{1}{424}$$

substituiren:

$$L_m = 131{,}335\ Q \text{ Meterkilogr.}$$

Soll die Maschine im Maximum N Pferdestärken Leistung geben und bedeutet Q_h die Wärmemenge, die stündlich der Maschine zuzuführen ist, so ist $L_m = 3600 . 75\ N = 131{,}335\ Q_h$ und hieraus folgt

$$\frac{Q_h}{N} = 2058$$

Diese Zahl giebt an, welche Wärmemenge stündlich pro Pferdestärke, vom Feuerraume aus, der Maschine wirklich zuzuführen ist. Multiplicirt man diesen Werth mit $\frac{T_1}{T}$ oder mit Rücksicht auf Gl. (147) mit $\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = 0{,}6902$, so folgt nach Gl. (142ᵃ)

$$\frac{Q'_h}{N} = 1420$$

d. h. die Wärmemenge, die stündlich pro Pferdestärke abzuführen ist. Aus dem erstern Werthe liesse sich je nach der Anlage der Heizvorrichtung auf die erforderliche Brennmaterialmenge, aus dem letztern Werthe auf die Wassermenge schliessen, die zur Abkühlung (Wärmeentziehung) sich nöthig macht. Beide Werthe sind als Minimalwerthe anzusehen, denen wir uns so sehr als möglich zu nähern hätten: sie gelten ohne Rücksicht auf

neverluste und für den vortheilhaftesten Gang der :hine, d. h. wir haben auch angenommen, dass die Verhältwerthe der Compression und Expansion so gewählt wurden, ; die Zwischentemperaturen nach (148) sind:

$$T = T_3 = \sqrt{T_1 T_2} = 395{,}51$$

a. dass nach Celsius $t = t_3 = 122{,}51^0$ ist.

Vorstehende Werthe sind übrigens noch ganz unabhängig von m Gesetze der Curven bc und ad, d. h. von den Werthen m id n der Gl. (140) nur den Fall $m = n$ ausgenommen. Die erschiedenen bis jetzt ausgeführten Maschinen unterscheiden sich ber nur durch diese Curve, daher geht aus Vorstehendem ervor, dass theoretisch genommen keine der bis jetzt ausgeführten :alorischen Maschinen einen Vorzug vor der andern hat.

Führen wir die angenommenen Werthe von T_1, T_2 und A auch in Gl. (151) ein, in welcher M das Gewicht der Luftmenge ist, welches in der Maschine thätig ist, so ergiebt sich:

$$L_m = 23310{,}6 \,.\, \lambda M \text{ Meterkilogr.}$$

als Maximalarbeit pro Spiel.

Macht die Maschine bei der Arbeit von N Pferdestärken u Spiele in der Minute, so ist

$$u L_m = 60 \,.\, 75 \,.\, N$$

Die Substitution in vorige Gleichung giebt dann das Gewicht der Luft, welche in der Maschine arbeitet

$$M = 0{,}19304 \cdot \frac{N}{u\lambda} \text{ Kilogr.} \qquad (155)$$

Nennen wir V_1 das Volumen dieser Luftmenge im Zustande a Fig. 31 im Beginn des Kreisprozesses und ist p_1 der Druck, so ist

$$M = \frac{V_1 p_1}{R T_1}$$

Dieser Werth in Gl. (155) substituirt und $T_1 = 273$, $R = 29{,}272$ gesetzt giebt, wenn p_1 in Atmosphären gemessen werden soll:

$$V_1 = 0{,}14928 \frac{N}{\lambda u p_1} \qquad (156)$$

Das Volumen V im Augenblick der grössten Compression (Zustand b, Fig. 31) findet sich nach Gl. (152)

$$V = V_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = V_1 \, (0{,}69024)^{\frac{1}{x-1}} = 0{,}4049 \cdot V_1 \qquad (157)$$

und das Volumen V_3 im Augenblick der grössten Ausdehnung (Zustand d, Fig. 31) findet sich nach Gl. (154)

$$V_3 = V_1 \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{r-1}} \qquad (158)$$

Die letzten Formeln geben uns Aufschluss über die Grösse der Maschine, da sie angeben, wie gross das Luftvolumen in den verschiedenen Zuständen seines Kreislaufes ist. Man erkennt aus den allgemeinen Formeln, dass nun aber die Grösse der Maschine von den Werthen λ und r zunächst abhängt, d. h. von dem Gesetze, nach welchem die Druckänderungen auf dem Wege ad und bc (Fig. 31) stattfinden. Ferner hängt aber die Grösse der Maschine nach Gl. (156) nur noch ab von u, p_1 und N, die Maschine wird um so geringern Raum einnehmen, je mehr Spiele sie in der Minute macht, je grösser der Druck der Luft und je kleiner die geforderte Leistung ist.

Dass die Grösse der Maschine mit der Leistung wächst, ist selbstverständlich; was ferner die Zahl der Spiele in der Minute betrifft, so sind wir darin in der Praxis beschränkt, da die Widerstände sehr rasch mit schnellerm Gange der Maschine wachsen (besonders diejenigen Widerstände, welche der Bewegung der Luft durch die einzelnen Theile der Maschine, durch Röhren etc. sich entgegen stellen); die Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe von Seiten der Luft findet nach den Versuchen von Combes u. A. allerdings ausserordentlich rasch statt.

Will man daher, dass calorische Maschinen von grosser Stärke nicht ganz unförmliche Dimensionen erhalten, so bleibt uns nur ein Ausweg übrig, man muss den Anfangsdruck p_1 so gross als möglich halten.

Ich schliesse daraus, dass alle solche calorische Maschinen, welche ihren Kreislauf mit Luft von atmosphärischer Pressung

beginnen, und das ist bei allen Maschinen der Fall, welche bei jedem Spiele die Luft ausstossen und neue Luft von atmosphärischer Pressung ansaugen, nimmermehr eine Zukunft haben und dass solche Maschinen und nie die Dampfmaschinen ersetzen werden, wenn es auf Entwicklung grosser Arbeitsleistungen ankommt.

Diejenigen, welche sich mit der Frage der Vervollkommnung calorischer Maschinen beschäftigen, haben daher ihr Augenmerk nur auf geschlossene Maschinen, bei denen immer die gleiche Luftmenge thätig ist, zu richten. Vor dem Ingangsetzen der Maschine muss die Luft stark comprimirt werden. Auf die Stärke der Maschine hat jedoch, wir wiederholen das, der grössere Druck der eingeschlossenen Luft keinen Einfluss, nur die Grösse der Maschine wird dadurch herabgezogen und in dem Umstande, dass calorischen Maschinen von grosser Stärke colossale Dimensionen gegeben werden mussten, liegt es ja eben, dass die grossen Hoffnungen, die man auf Einführung dieser Maschine setzte, sehr herabgestimmt worden sind.

Die calorischen Maschinen, die bis jetzt vorgeschlagen und ausgeführt wurden, unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass das Gesetz der beiden Curven ad und bc (Fig. 31) verschieden ist. Wir wollen hier nur auf zwei der wichtigsten Systeme näher eingehen und nur die Frage über die Grösse solcher Maschinen etwas weiter verfolgen, denn die Frage über die Maximalleistung ist vorhin schon allgemein erledigt worden; in dieser Beziehung findet kein Unterschied unter den einzelnen Maschinensystemen statt.

1) System Stirling. Hier findet die Wärmezuführung und Wärmeableitung bei constantem Volumen statt, es sind also die beiden Curven ad und bc (Fig. 31) gerade Linien, welche der Ordinatenaxe OY parallel laufen.

Hier ist in der Gleichung

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

$m = 0$; daher folgt nach Gl. (140)

$$\lambda = c = 0,16847$$

und der Werth r findet sich aus

$$r = \frac{n}{m} = \infty$$

Für solche Maschinen ist das Gewicht der eingeschlossenen Luftmenge nach Gl. (155)

$$M = 1{,}1458 \frac{N}{u}$$

und nach Gl. (156) das Volumen V_1, das hier mit V_3 identisch ist

$$V_1 = V_3 = 0{,}8861 \frac{N}{u p_1}.$$

während nach Gl. (157) das Volumen V im Augenblick der grössten Compression, das hier mit V_2 identisch ist, beträgt:

$$V = V_2 = 0{,}4049\, V_1$$

2) System Ericsson. (Aeltere Maschine.) Die Wärmezuführung und Wärmeentziehung findet bei constantem Drucke statt, die Curven ad und bc sind gerade Linien, parallel der Abscissenaxe OX.

Hier ist $n = 0$ und daher folgt nach Gl. (140)

$$\lambda = \varkappa c = 0{,}23751$$

und

$$r = \frac{n}{m} = 0$$

Für solche Maschinen ist das Gewicht der arbeitenden Luftmenge nach Gl. (155)

$$M = 0{,}81276 \cdot \frac{N}{u}$$

also unter sonst gleichen Verhältnissen etwas geringer, als bei Maschinen des ersten Systemes.

Das Volumen V_1 im Beginn des Kreislaufes ist nach Gl. (156).

$$V_1 = 0{,}62854 \cdot \frac{N}{u p_1}$$

Das Volumen im Augenblick der stärksten Compression nach (157)

$$V = 0{,}25449 \cdot \frac{N}{u p_1}$$

id das Volumen im Augenblick der stärksten Expansion nach (158)

$$V_3 = 0{,}91060 \cdot \frac{N}{u p_1}$$

Diese Maschine fällt sonach, trotz des geringern Luftgewichtes, welches in ihr thätig ist, etwas grösser aus, als die Maschine nach Stirling's System.

Die Wärmeentziehung findet bei constantem Drucke p_1 statt; während der Wärmemittheilung ist hingegen der Druck p_2, wie leicht zu übersehen nach Gl. (78) S. 131 nämlich

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

zu berechnen, woraus sich, wegen des Werthes von T nach Gl. 148) für die Maximalleistung findet:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} = 3{,}5785 \cdot p_1$$

Für eine Leistung von $N = 100$ Pferdestärken und $n = 10$ Spielen pro Minute (welch' letzterer Werth aber ohne Zweifel schon zu hoch gegriffen ist) und für die Anfangspressung $p_1 = 1$ Atmosphäre ergiebt vorstehende Formel für V_3:

$$V_3 = 9{,}106 \text{ Cubikmeter}$$

für den Inhalt, welchen der Treibcylinder der Luft am Ende der Expansion darbieten muss und dabei müsste in der Compressionsperiode der Druck von $p_1 = 1$ auf $p_2 = 3{,}578$ Atmosphären gebracht werden, sowie das Luftvolumen von 6,2854 Cubikm. auf 2,5449 Cubikmeter. Würde dieselbe Maschine nur zwischen den Spannungsgrenzen p_1 und $p_2 = 2 p_1$ Atmosphären arbeiten, so wäre die Zwischentemperatur T nach der Gleichung

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

bestimmt:

$$T = 1{,}2233 \cdot T_1 = 333{,}96^0$$

und daher nach Gl. (146) die Arbeit pro Spiel:

$$L = \frac{\lambda}{A} \frac{(T_2 - T)(T - T_1)}{T} M$$

$$L = 53{,}6992\ M$$

oder wenn die Maschine bei u Umdrehungen pro Minute N_1 Pferdestärken giebt, also

$$L = 75.60 \frac{N_1}{u}$$

ist,

$$M = 0{,}8380 \frac{N_1}{u}$$

während vorhin für die Maximalleistung

$$M = 0{,}81276 \frac{N}{u}$$

gefunden wurde. Bei gleicher Luftmenge M und gleicher Umdrehungszahl u findet sich daher durch Division

$$N_1 = 0{,}9698\ N.$$

Ist, wie hier angenommen, das Compressionsverhältniss $\frac{p_2}{p_1}$ nicht richtig gewählt, so fällt natürlich auch der Treibcylinder grösser aus, als oben für die Maximalarbeit gefunden wurde.

Die angegebenen Dimensionen des Treibcylinders selbst für die Maximalleistung sind schon ganz unförmliche: bei einer Dampfmaschine von gleicher Stärke (Mitteldruck mit Expansion und Condensation) würde sich der Inhalt des Dampfcylinders auf etwa 1,2 Cubikmeter herausstellen.

Sollte der Treibcylinder unserer calorischen Maschine keinen grössern Inhalt haben, als dieser Dampfcylinder, so müsste bei $N = 100$ Pferdestärken und $u = 10$ Umdrehungen nach dem für V_3 gegebenen Ausdrucke die Pressung der Luft bei der Wärmeentziehung

$$p_1 = \frac{0{,}9106 \,.\, 100}{1{,}2 \,.\, 10} = 7{,}588 \text{ Atmosphären}$$

sein und der Druck bei der Wärmemittheilung auf

$$p_2 = 7{,}588 \,.\, 3{,}5785 = 27{,}154 \text{ Atmosphären}$$

gebracht worden sein; in der That Resultate, die nicht sehr ermuthigen, die Frage weiter zu verfolgen, welche Construction für calorische Maschinen von grosser Stärke einen praktischen Erfolg erwarten lässt.

Anders gestaltet sich die Frage aber bei Maschinen von geringer und mittlerer Stärke; Maschinen solcher Art, die man erfahrungsgemäss sehr rasch arbeiten lassen kann, werden ohne Zweifel noch vielseitige Anwendung finden, nur müssen sie für Hochdruck und so construirt werden, dass die in der Maschine eingeschlossene Luft die einzelnen Perioden des Kreislaufes möglichst genau in der Art durchläuft, wie ich es oben allgemein für Entwicklung der Maximalarbeit hingestellt habe.

Es mögen nun schliesslich die Formeln, die wir oben für den Kreisprozess einer geschlossenen calorischen Maschine gegeben haben, noch etwas verallgemeinert werden. Wir haben nämlich oben vorausgesetzt, dass die beiden Curven ab und cd (Fig. 31) adiabatische Curven seien, dass also auf diesen Wegen die Compression und Expansion ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme stattfinde, eine Annahme, die allerdings bei den bis jetzt in Vorschlag gekommenen Maschinen wenigstens nahezu erfüllt ist.

Wir wollen nun aber voraussetzen, dass sowohl das Curvenpaar ab und cd Fig. 31, als auch das Paar bc und da dem Gesetze

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

unterworfen ist, nur dass bei beiden Paaren die Werthe von m und n verschieden sind.

Wir setzen für das Paar ab und cd den Werth $\frac{n}{m} = r_1$ für das Paar bc und ad aber $\frac{n}{m} = r_2$, sowie die zugehörigen nach Gl. (140) berechneten Wärmecapacitäten, resp. λ_1 und λ_2.

Dann ist für den Uebergang abc die Wärmemenge, welche zuzuführen ist:

$$Q = \lambda_1 (T - T_1) + \lambda_2 (T_2 - T) \tag{159}$$

und die Wärmemenge, welche auf dem Wege cda abzuführen ist

$$Q_1 = \lambda_2 (T_3 - T_1) + \lambda_1 (T_2 - T_3) \tag{160}$$

und dann folgt die bei diesem Prozesse gewonnene Arbeit L wieder aus:

$$A L = Q - Q_1 \tag{161}$$

Die vier Temperaturwerthe T_1, T. T_2 und T_3 stehen aber auch hier wieder in einfacher Beziehung unter einander.

Auf welchem Wege auch der Uebergang von a nach c stattfinden mag, immer ist, wie nun mehrfach hervorgehoben wurde, der Werth des Integrales:

$$P = \int \frac{d\,Q}{A\,T}$$

constant.

So findet sich denn für den Weg $a\,b\,c$

$$P = \int_{T_1}^{T} \frac{\lambda_1\,d\,T}{T} + \int_{T}^{T_2} \frac{\lambda_2\,d\,T}{T} = \lambda_1 \text{ logn. } \frac{T}{T_1} + \lambda_2 \text{ logn. } \frac{T_2}{T}$$

und für den Uebergang $a\,c\,d$ wäre:

$$P = \int_{T_1}^{T_3} \frac{\lambda_2\,d\,T}{T} + \int_{T_3}^{T_2} \frac{\lambda_1\,d\,T}{T} = \lambda_2 \text{ logn. } \frac{T_3}{T_1} + \lambda_1 \text{ logn. } \frac{T_2}{T_3}$$

Durch Gleichsetzen beider Werthe findet sich:

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{T_2}{T}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\lambda_1}$$

und daraus folgt durch einfache Umformung

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T} \tag{162}$$

genau, wie es schon oben in Gl. (144) gefunden wurde. Setzt man den aus dieser Formel entspringenden Werth von T_3 in Gl. 160 ein, so folgt sofort

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{T_2}{T} (T - T_1) + \lambda_2 \frac{T_1}{T} (T_2 - T)$$

und wenn wir diesen Werth von Q (Gl. 159) nach Angabe von Gl. (161) subtrahiren, die Arbeit für einen Kreislauf und für die Gewichtseinheit Luft:

$$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A\,T} (T - T_1) (T_2 - T) \tag{163}$$

oder durch Gl. (159) dividirt:

$$L = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,Q}{A\,T} \cdot \frac{(T - T_1)\,(T_2 - T)}{\lambda_1\,(T - T_1) + \lambda_2\,(T_2 - T)} \tag{164}$$

Setzen wir in diese Gleichungen $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2 = \lambda$, so kommen wir auf die speziellen Fälle, die oben behandelt wurden. (Gl. 145 und 146.)

Hätten wir es mit einer calorischen Maschine zu thun, in welcher M Kilogr. Luft arbeiten, so ist nach Gl. (163) die Arbeit pro Spiel

$$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A\,T} M\,(T - T_1)\,(T_2 - T) \tag{165}$$

Setzen wir beide Werthe λ_1 und λ_2 positiv voraus, so ist $T > T_1$ und $T_2 > T$: also ist dann T_1 der kleinste und T_2 der grösste Temperaturwerth: sind diese Werthe, wie es in der Praxis der Fall ist, vorgeschrieben, so würde man wieder die Zwischentemperatur T so zu wählen haben, dass vorstehende Arbeit L ein Maximum ist.

Die Formel schreibt sich aber auch:

$$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A} M \left(T_2 + T_1 - \frac{T_1\,T_2}{T} - T\right)$$

und hier ist der Klammerausdruck ein Maximum für

$$T = \sqrt{T_1\,T_2}$$

und dann ist auch nach Gl. (162)

$$T_3 = \sqrt{T_1\,T_2} = T \tag{166}$$

das gleiche Resultat, wie früher: man erkennt daraus, dass der vortheilhafteste Werth der Zwischentemperaturen T und T_3 unabhängig von dem Gesetze der Curven ist, welche in Figur 31

die Fläche $abcd$ abschliessen, wenn nur jedes Paar gegenüberliegender Curven der verlangten Bedingung

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

unterworfen ist. (Vorausgesetzt, dass nicht $m = n$ ist.) Die Substitution der Werthe T und T_3 in die Gleichung für die Arbeit L giebt dann den Maximalwerth L_m der Arbeit:

$$L_m = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A} M [\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}]^2 \tag{167}$$

Die vorstehenden Gleichungen gebe ich als die Fundamentalgleichungen für calorische Maschinen, sie gelten für unendlich verschiedene Systeme; für ein bestimmtes System hat man nur den, den beiden Curvenpaaren der Fläche $abcd$ entsprechenden Werth von λ_1 und λ_2 zu substituiren; für die bis jetzt vorgeschlagenen Systeme ist allerdings $\lambda_1 = 0$, die wichtigsten Fälle dieser Art wurden oben schon speziell behandelt; doch liesse sich wohl denken, dass Constructionen derartiger Maschinen auftauchen, bei denen λ_1 von Null verschieden ist, d. h. die beiden Curven ab und cd keine adiabatischen Linien sind.

Fände z. B. die Zustandsänderung des Gases auf den Wegen ab und cd bei constantem Volumen und die auf den Wegen bc und da bei constantem Drucke statt, so wäre nach Gl. (140) $\lambda_1 = c$ und $\lambda_2 = \varkappa c$, sonach in vorstehenden Formeln

$$\lambda_2 - \lambda_1 = c(\varkappa - 1)$$

zu setzen. Die Fläche $abcd$ wäre dann eine Rechteckfläche.

Für den technischen Gebrauch würde man die Gln. (165) und (167) dadurch umformen, dass man die Arbeit der Maschine in Pferdestärken (N) und die Zahl der Spiele pro Minute (u) einsetzen, also L und L_m durch den Werth

$$60 . 75 \frac{N}{u}$$

ersetzen würde. Ebenso würde man in gleicher Weise, wie es oben geschehen ist, das Gewicht M der arbeitenden Luftmenge, durch das Volumen V_1, den Druck p_1 und Temperatur T_1 ersetzen, also schreiben

$$M = \frac{V_1 p_1}{R T_1}$$

ntsprechend dem Anfangszustand a (Fig. 31): für die andern renzzustände b, c und d bestimmt sich dann Volumen und ruck leicht unter Zugrundelegung der bekannten Temperaturen ach der Gl. (153) S. 213.

Die ganze Aufgabe ist so leicht durchführbar, dass es unöthig erscheint, durch numerische Beispiele weitere Erläuterungen u geben.

Gewinnen die calorischen Maschinen wirklich noch eine echnische Bedeutung, so liegen jetzt wenigstens für eine gewisse lasse derselben die Hauptgleichungen zu deren Beurtheilung nd Berechnung vor.

Ueber die disponible Arbeit und vom Wirkungsgrade der calorischen Maschinen.

Unter Wirkungsgrad einer Maschine versteht man das Verhältniss der von der Maschine gelieferten Arbeit zur disponiblen Arbeit. d. h. zu der Arbeit, welche in der gleichen Zeit uns zur Verwerthung und Ausnutzung mittelst der Maschine zur Disposition gestellt wurde. Dieses Verhältniss ist natürlich immer ein echter Bruch: die Maschine erscheint dann aber um so vollkommener, je näher dieser Bruch der Einheit rückt.

Für calorische Maschinen sind oben die Formeln zur Berechnung ihrer Leistung entwickelt worden, allerdings ohne Rücksicht auf Wärme- und Luftverluste, aber mit Rücksicht auf die Arten der Kreisprozesse, welche bei verschiedenen Systemen calorischer Maschinen bis jetzt angewandt worden sind.

Nun tritt aber die Frage heran, auf welche Weise für calorische Maschinen überhaupt die disponible Arbeit bestimmt werden soll. Der zunächst liegende Gedanke ist der, die ganze Wärmemenge Q, welche der Maschine pro Sekunde zugeleitet wird, in Arbeit auszudrücken. d. h. den Werth $\frac{Q}{A}$ zu berechnen und diesen Werth als disponible Arbeit anzusehen: von der Ma-

schine wäre dann zu verlangen, dass sie den möglichst grössten Theil dieser Arbeit nutzbar zu machen hätte.

Man könnte aber auch von einem andern Gesichtspunkte ausgehen. Die Wärme, welche wir unsern Maschinen zuführen, erzeugen wir im Feuerraum durch Verbrennung von Brennmaterialien; da uns nun die sogenannte Heizkraft der verschiedenen Brennstoffe bekannt ist, d. h., da wir wissen, welche Wärmemenge bei der Verbrennung der Gewichtseinheit Brennstoff frei wird, so könnten wir auch die in der Sekunde im Feuerraum durch die Verbrennung freiwerdende Wärmemenge in Arbeit ausdrücken und diese Arbeit als disponibel, als technisch wirklich verwerthbar ansehen und hiernach den Werth der calorischen Maschinen (wozu auch im weitern Sinne die Dampfmaschinen zu rechnen sind) beurtheilen.

Die zuletzt angedeutete Bestimmung der disponiblen Arbeit ist nun auch wirklich von einzelnen Schriftstellern, meines Wissens zuerst von Redtenbacher, gewählt worden, und hat zu dem demüthigenden Resultate geführt, dass unsere heutigen Dampfmaschinen, wie die Luftexpansionsmaschinen vom mechanischen Standpunkte aus, als die unvollkommensten aller Umtriebsmaschinen erscheinen; auf diese Weise hat man dann gefunden, dass die Dampfmaschinen im Mittel einen Wirkungsgrad von 0,04 bis 0,05 aufweisen*) und dass bei den besten Maschinen dieser Art der Wirkungsgrad kaum 0,07 übersteige!

Bei den besten Wasserrädern und Turbinen erhebt sich aber bekanntlich der Wirkungsgrad bis auf 0,80. Der Vergleich mit den Dampfmaschinen führt daher zu dem Schlusse, dass man bei diesen Maschinen das Brennmaterial auf ganz unverantwortliche Weise verwendet: daher kommt es auch, dass die Frage über den Wirkungsgrad der Dampfmaschinen, dieser Maschinen, die so unfassbar viel zu der ganzen Entwicklung der neuern Zeit beigetragen haben, unter Mechanikern nicht gern behandelt wird und dass der geistvolle Redtenbacher mehrfach in seinen Schriften andeuten konnte, dass jede neue constructive Verbesserung im Baue der Dampfmaschinen und spezielles Studium ein-

*) Redtenbacher, Der Maschinenbau. Mannheim 1863. B. 2. S. 592. Auch der Verfasser hat in der ersten Auflage der vorliegenden Schrift ein ähnliches Urtheil gefällt (S. 123).

lner Theile derselben so lange keine grosse Bedeutung habe, s man nicht eine ganz neue Art der Ausnutzung des Dampfes ıd der Wärme überhaupt entdecke.

Glücklicher Weise ruhen diese Urtheile auf ganz unrichgen Annahmen, auf einer falschen Bestimmung derjenigen :beit, die uns in der, aus der Verbrennung von Körpern hervorıhenden Wärme zur Verfügung steht. Ich werde im Folgenden ırlegen, dass die calorischen Maschinen (mit Einschluss der ampfmaschinen) weit besser und vollkommener sind, als man emlich allgemein jetzt angenommen hat.

Wenn man bei einer Maschine dieser Art die in Arbeit ausdrückte Wärmemenge als disponibel betrachten will, welche er Maschine zugeleitet wird, so verhält sich dies, wie ich igen werde, genau so, als wollte man bei der Bestimmung der sponiblen Arbeit bei einem Wasserrade oder einer Turbine das ewicht der Wassermenge, die pro Sekunde herbeikommt, nicht it dem Gefälle, vom Oberwasserspiegel bis zum Unterwasseriegel gemessen, multipliciren. sondern mit dem Gefälle gemessen m Oberwasserspiegel bis zum **Meeresspiegel**.

Legt man hingegen bei der Beurtheilung der Grösse der sponibeln Arbeit diejenige (in Arbeit bestimmte) Wärmemenge, e im Feuerraume frei wird, zu Grunde, so verhält es h damit gerade so, als wollte man bei dem Wasserrade als ıponibles Gefälle den Verticalabstand vom Niveau der ıelle des Wasserlaufes bis zum Meeresspiegel ge:hnet, einführen! —

Auf diese Weise die disponible Arbeit berechnet, würde nn begreiflicher Weise selbst beim besten Wasserrade auf einen rschwindend kleinen Wirkungsgrad führen. Wer wird dann raus rückwärts auf eine schlechte Construction des Wasserrades ıd auf eine prinzipiell unrichtige Benutzung der Wasserkraft hliessen wollen?

So sonderbar das Alles scheint, so ist man doch gerade bei er Beurtheilung der Dampfmaschinen auf diesen Fehler verfallen.

Mein Vergleich ist keineswegs ein oberflächlicher, vielmehr rerde ich zeigen, dass sich merkwürdiger Weise zur Berechnung er disponibeln Arbeit calorischer Maschinen und Dampfmaschinen ieselbe Formel ergiebt, die wir bei Berechnung der dispoıibeln Arbeit der hydraulischen Umtriebsmaschinen benutzen.

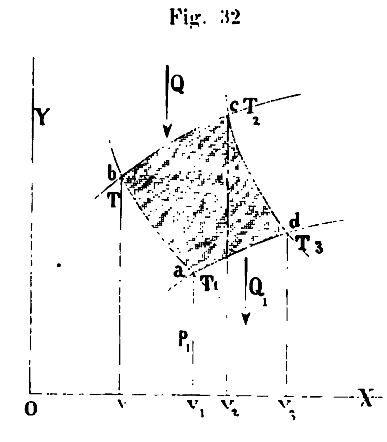
Die Arbeit ergiebt sich hier, wie dort, durch das Produkt aus dem Gewichte eines gewissen Stoffes in eine vorgeschriebene Fallhöhe.

Die ganze hier angeregte Frage ist von hoher Wichtigkeit und es wird daher gewiss nicht ungerechtfertigt erscheinen, wenn ich dieselbe im Folgenden gründlich und einmal vom rein technischen Standpunkt aus beleuchte. Es ist doch gewiss eine Ehrenrettung unserer Dampfmaschine nicht ohne Bedeutung und wichtig ist es, den wissenschaftlichen Nachweis zu führen, dass die calorischen Maschinen und Dampfmaschinen nicht nur 5% der disponibeln Arbeit verwerthen, sondern weit mehr. Es muss das erreichbare Ziel in der Verbesserung dieser Maschinen einmal festgestellt werden, damit wir hinsichtlich der Verbesserung der Dampfmaschinen nicht einem leeren Phantom nachjagen, sondern in voller Erkenntniss des möglich Erreichbaren unsere Kräfte verwerthen.

Kehren wir noch einmal zur Betrachtung des Kreisprozesses zurück, wie wir ihn auf S. 206 den Untersuchungen der calorischen Maschinen zu Grunde legten.

Es sei Fig. 32 die Gewichtseinheit Gas im Zustande a gegeben, durch das Volumen v_1, den Druck p_1 und die Temperatur T_1; wir ziehen wieder die adiabatischen Curven ab und cd und die beiden Curven bc und ad, die dem Gesetze $p^m v^n =$ Const. unterworfen sein sollen. Das Gas beschrieb in der Maschine den Kreislauf $abcd$; auf dem Wege bc ist die Wärmemenge Q zu- und auf dem Wege da die Wärmemenge Q_1 abzuführen und ferner sei T_1 der kleinste und T_2 der grösste der im ganzen Prozesse vorkommenden Temperaturwerthe. Die Zwischentemperaturen T und T_3 sind dann, wenn T_1 und T_2 vorgeschrieben sind der Beziehung

Fig. 32



$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T}$$

nach Gl. (144) unterworfen, sonst ist aber einer dieser Werthe. z. B. T, willkürlich; mit andern Worten, die beiden Curven bc und ad können wir beliebig wählen.

Die durch diesen Prozess zu gewinnende Arbeit beträgt nach Gl. (145)

$$L = \frac{Q}{AT} (T - T_1)$$

Ist nun die Wärmemenge Q bestimmt vorgeschrieben (ebenso wie T_1 und T_2), so wird man doch offenbar den Prozess so wählen, dass die Arbeit L ein Maximum wird und dem entsprechend über die Zwischentemperaturen T und T_3 verfügen.

Vorstehende Gleichung schreibt sich aber auch

$$L = \frac{Q}{A}\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)$$

und daraus ersieht man ohne alle Rechnung, dass die grösstmögliche Arbeit, die man durch die Wärmemenge Q gewinnen kann, sich ergiebt, wenn man den Werth T so gross wie möglich wählt, d. h. $T = T_2$ macht. Dann folgt aber auch sofort $T_3 = T_1$ und das absolute Maximum der Arbeit, das mit L_a bezeichnet werden mag, findet sich daher aus vorstehender Gleichung für L, wenn dort T_2 statt T gesetzt wird:

$$L_a = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1) \qquad (168)$$

Das ist nun aber auch die wahre disponible Arbeit der calorischen Maschine: da wir in der Technik in Betreff der Temperaturen T_1 und T_2 zwischen feste Grenzen eingeschlossen sind (wir haben dieselben oben schon zu $t_1 = 0$ und $t_2 = 300^0$, d. h. zu $T_1 = 273^0$ und $T_2 = 573^0$ angenommen), so ist der durch Gl. (168) gegebene Arbeitswerth L_a der Wärmemenge Q der höchst erreichbare.

Die Entwickelung zeigt zugleich, dass wir sogar durch calorische Maschinen die ganze Arbeit gewinnen könnten (abgesehen von Luft- und Wärmeverlusten und den Widerständen in der Maschine selbst), wenn man $T = T_2$ und $T_3 = T_1$ macht, d. h. wenn die beiden Curven bc und ad isothermische Linien sind; man hätte die Wärmemittheilung auf der Curve bc

bei der constanten (höchsten) Temperatur T_2 und die Wärmeableitung auf dem Wege da bei der constanten (niedrigsten) Temperatur T_1 stattfinden zu lassen. Der Ausnahmefall $m = n$ führt also auf das absolute Maximum der Arbeit.

Sind aber, wie das bei den bis jetzt ausgeführten calorischen Maschinen der Fall ist, die Curven bc und ad dem Gesetze $p^m v^n =$ Const. unterworfen (mit Ausnahme, dass $m = n$ ist), so ist die von diesen Maschinen gelieferte Arbeit jederzeit kleiner, als sie sich nach Gl. (168) herausstellt. Für irgend eine beliebige Zwischentemperatur T fand sich nach Gl. (145) die Arbeit

$$L = \frac{Q}{A\,T}(T - T_1)$$

und das Maximum der Arbeit dieser Maschine nach Gl. (149)

$$L_m = \frac{Q}{A}\,\frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

Dividiren wir diese beiden Formeln durch die disponible Arbeit nach Gl. (168), so folgt der Wirkungsgrad η dieser Maschine für eine beliebige Zwischentemperatur T

$$\eta = \frac{T_2}{T}\,\frac{(T - T_1)}{(T_2 - T_1)} \qquad (169)$$

hingegen der Maximalwirkungsgrad η_{max}:

$$\eta_{max} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}} \qquad (170)$$

und diese Formeln gelten für alle calorischen Maschinen, welches auch die Werthe m, n, λ entsprechend dem Gesetze der Curven bc und ad des Kreislaufes sein mögen, den Fall $m = n$ ausgenommen.

Setzen wir den Erfahrungen zu Folge als äusserste Grenze wieder $T_2 = 573$ und $T_1 = 273$, so folgt der Maximalwirkungsgrad *)

$$\eta_{max} = 0{,}5910$$

*) Der Maximalwirkungsgrad calorischer Maschinen ist zuerst nach richtigen Grundsätzen von Hirn (Théorie mécanique de la chaleur. S. 288) berechnet worden. Hirn berechnet diesen Wirkungsgrad speziell aber nur für das System Stirling und System Ericsson, für beide Maschinen findet Hirn (in Folge

dabei muss aber die Zwischentemperatur nach Gl. (148)

$$T = T_3 = 395{,}51$$

oder

$$t = 122{,}51^0$$

sein.

Wäre diese Zwischentemperatur nur $T = 333{,}96$ oder $t = 60{,}96^0$ so folgt der Wirkungsgrad nach Gl. (169) (Vergl. S. 219)

$$\eta = 0{,}3486$$

Die disponible Arbeit selbst ist übrigens (168)

$$L_a = 0{,}5235 \cdot \frac{Q}{A}$$

Man erkennt aus diesen Zahlenwerthen, dass schon die bis jetzt angewandten Systeme calorischer Maschinen die Wärme in ziemlich befriedigender Weise benutzen können, dass aber auch sehr viel darauf ankommt, den ganzen Kreisprozess in richtiger Weise so durchzuführen, dass die angegebenen Bedingungen hinsichtlich des richtigen Werthes der Zwischentemperatur T zur Erlangung des Maximalwirkungsgrades erfüllt werden.

Wir könnten ferner schliessen, dass es nur ein Mittel giebt den Wirkungsgrad dieser Maschinen zu erhöhen, nämlich das, die Differenz der Grenztemperaturen T_1 und T_2 zu vergrössern; wären wir z. B. im Stande in calorischen Maschinen als obere Temperaturgrenze $t_2 = 500$ statt 300^0 zu verwenden, so wäre $T_2 = 773$ in Gl. (170) einzusetzen und man würde dann, die untere Grenze $T_1 = 273$ beibehalten, als theoretischen Maximalwirkungsgrad erhalten:

---

eines Rechenfehlers) verschiedene Werthe für den Maximalwirkungsgrad. Es ist ihm daher entgangen, dass dieser Werth für alle Maschinensysteme der gleiche ist und nur von den Grenztemperaturen abhängt.

Später hat Cazin (Théorie élémentaire des machines à air chaud. Versailles 1865) für verschiedene Systeme calorischer Maschinen den Maximalwirkungsgrad auf graphischem Wege (durch Flächenbestimmungen) ermittelt. Dieser Weg ist natürlich ein bedeutender Umweg und konnte Cazin nicht auf unser Gesetz führen.

Unsere Formeln des Textes sind so einfach, dass die Methode von Cazin wohl kaum weitere Verwendung finden wird.

$$\eta_{max} = \frac{\sqrt{773}}{\sqrt{773} + \sqrt{273}} = 0{,}6272$$

freilich eine verhältnissmässig geringe Erhöhung!

Die hier angegebenen Wirkungsgrade sind überdies noch rein theoretisch bestimmte, in Wirklichkeit würden sie noch wesentlich kleiner ausfallen, da wir nie im Stande sein werden, die den Rechnungen zu Grunde liegenden Kreisprozesse vollkommen durchzuführen und wir überdies auch die in der Maschine auftretenden Verluste an arbeitender Luft und an Wärme nie werden beseitigen können.

Diese Umstände ins Auge gefasst und beachtet, dass die oben berechneten Wirkungsgrade noch bedeutend unter denjenigen stehen, die wir bei hydraulischen Umtriebsmaschinen erreichen, könnten nun leicht zu dem Schlusse führen, es sei durch die ganzen obigen Betrachtungen im Grunde doch erwiesen, dass die calorischen Maschinen unter allen Umständen die in der Wärme zu Disposition stehende Arbeit schlechter verwerthen, als die Wasserräder die im Wasser verfügbare Arbeit. Dieser Schluss wäre aber nicht richtig: es muss nämlich ausdrücklich bemerkt werden, dass, so allgemein meine obigen Entwickelungen erscheinen, da sie unendlich verschiedene Systeme calorischer Maschinen umfassen, die Formeln und zwar vor Allem die Hauptformel (170), die speziell den Maassstab für die Güte der Maschine liefert, doch nur unter einer gewissen Beschränkung gelten. Ich habe nämlich ausdrücklich vorausgesetzt, dass die beiden Curven *bc* und *ad* des Kreisprozesses (Fig. 32) einer geschlossenen Maschine der Bedingung

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

unterworfen seien, wo m und n beliebige Constante vorstellen, jedoch die Ausnahme $m = n$ zunächst unbeachtet bleiben sollte. Dann ist nämlich, wie wir gezeigt haben, auf dem vorgeschriebenen Wege die Temperaturänderung des Gases der mitgetheilten oder entzogenen Wärmemenge direct proportional. Unter dieser Voraussetzung, die ja eben von den bis jetzt in Vorschlag gekommenen, geschlossenen calorischen Maschinen erfüllt werden, gelten die obigen Rechnungsresultate.

Wenn wir nun für solche Maschinen als theoretischen Maximal-

wirkungsgrad allgemein für die angenommenen Grenztemperaturen den Werth 0,5910 gefunden haben und dieser Werth zu klein erscheint, so trifft der Vorwurf nicht die calorischen Maschinen überhaupt, sondern nur die bei der Rechnung vorausgesetzten Systeme derartiger Maschinen, d. h. die bis jetzt in Vorschlag gekommenen; vor Allem gilt das dem System Stirling und System Ericsson (ältere Maschine). Maschinen solcher Art sind prinzipiell zu verwerfen und ihr Fehler liegt darin, dass eben die Curven bc und ad allgemein dem Gesetze $p^m v^n =$ Const. unterworfen sind.

Eine Vervollkommnung solcher Maschinen wird daher nur dadurch zu erreichen sein, dass man die Zustandsänderungen der Luft auf den Wegen bc und ad nicht nach dem Gesetze $p^m v^n =$ Const. stattfinden lässt, also beispielsweise nicht bei constantem Volumen (Stirling) oder constantem Drucke (Ericsson), und das war es, was ich zunächst beweisen wollte.

Nun stellt sich aber auch sofort die Frage, welches andre Gesetz für die beiden Curven bc und ad zu wählen ist, wenn sich das vorhin Angenommene als unpraktisch herausstellte. Die Beantwortung dieser Frage erfordert aber keine neue Untersuchung, sondern ist schon in dem Vorstehenden enthalten. Merkwürdiger Weise führt uns gerade der Ausnahmsfall $m = n$ auf das einzig zu empfehlende System calorischer Maschinen, wir sollen in unserm Kreisprozesse für die Curven bc und ad isothermische Linien wählen, die Wärmemittheilung auf dem Wege bc bei constanter (höchster) Temperatur T_2, die Wärmeentziehung auf dem Wege da bei constanter (niedrigster) Temperatur T_1 stattfinden lassen. Setzen wir nämlich in Gl. (169) $T = T_2$ und $T_3 = T_1$, so folgt der theoretische Maximalwirkungsgrad

$$\eta = 1$$

also das höchst Erreichbare; eine solche Maschine wird die ganze disponible Arbeit verwerthen. Begreiflicher Weise wird man nie dazu gelangen, eine solche Maschine herzustellen, ebenso wenig, wie wir je eine hydraulische Umtriebsmaschine werden erbauen lernen, welche die ganze disponible Wasserkraft verwerthet. Man erkennt aber doch jetzt deutlich das Ziel, dem man zuzustreben hat.

Im Prinzip sind allein diejenigen calorischen

Maschinen die richtigen, bei denen die beiden Curven ab und cd des Kreisprozesses (Fig. 32) adiabatische Curven und die Linien bc und ad isothermische Curven sind*). Jede andre Curvenart führt schon theoretisch auf kleinere Maximalwirkungsgrade.

Es mag nun eine calorische Maschine der vollkommensten Art noch näher untersucht werden, indem wir obige allgemeinen Gleichungen in die in der Technik gebräuchliche Form darstellen.

Die Arbeit einer solchen vollkommenen Maschine wäre nach Gl. (168) pro Spiel

$$L_0 = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1)$$

oder wenn wir die auf dem Wege da zu entziehende Wärmemenge Q_1 einführen und die Beziehung (142[a] S. 208) auf vorliegenden Fall anwenden, also

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q}{T_2}$$

substituiren:

$$L_a = \frac{Q_1}{A T_1} (T_2 - T_1)$$

Wird das spezifische Volumen in den vier Grenzzuständen $abcd$ mit v_1, v, v_2 und v_3 bezeichnet, so ist die Wärmemenge Q_1, welche auf dem Wege da bei constanter Temperatur T_1 und bei der Compression von v_3 auf v_1 der Luft zu entziehen ist, nach Gl. (74) S. 124

$$Q_1 = A p_1 v_1 \text{ logn. } \frac{v_3}{v_1}$$

oder wegen der bekannten Beziehung

$$R T_1 = p_1 v_1$$

auch:

$$Q_1 = A R T_1 \text{ logn. } \frac{v_3}{v_1}$$

*) Es darf schon hier hervorgehoben werden, ich komme aber unten bei den Untersuchungen des Verhaltens der Dämpfe darauf zurück, dass unsere Dampfmaschinen in Wirklichkeit calorische Maschinen vom vortheilhaftesten System sind. Wir haben dort wirklich einen Kreisprozess derjenigen Art, der oben als der vollkommenste hingestellt worden ist.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung für L_a ein, so folgt die Arbeit pro Spiel

$$L_a = R(T_2 - T_1) \text{ logn.} \frac{v_3}{v_1}$$

Diese Gleichung setzt aber noch voraus, dass gerade die Gewichtseinheit Luft arbeite: nehmen wir hingegen wieder an, dass in der Maschine M Kilogramm Luft eingeschlossen sind, so folgt, wenn wir das Volumen dieser Luftmenge in den vier Grenzzuständen mit V_1, V, V_2 und V_3 bezeichnen, auch die Arbeit pro Spiel

$$L_a = RM(T_2 - T_1) \text{ logn.} \frac{V_3}{V_1}$$

Nennen wir nun die Pressungen in den vier Grenzzuständen $abcd : p_1\, p\, p_2\, p_3$, so ist p_3 der kleinste und p der grösste Druck, der während des Kreislaufes vorkommt, während das grösste Volumen V_3, das kleinste V ist.

Bestimmen wir nun das Gewicht der Luft nach der Formel

$$M = \frac{V_3\, p_3}{R\, T_1}$$

so findet sich durch Substitution die Arbeit auch

$$L_a = V_3\, p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \text{ logn.} \frac{V_3}{V_1}$$

Statt des Verhältnisses $V_3 : V_1$ führt man nun am besten das Verhältniss des grössten zum kleinsten Drucke ein; nach bekannten Sätzen ist unter der angenommenen Bezeichnung

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

und

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_3}{V_1}$$

und hieraus folgt durch Verbindung:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p}{p_3} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \tag{171}$$

Setzen wir das in die letzte Gleichung für L_a ein. so folgt die Arbeit pro Spiel auch:

$$L_a = V_3 p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \text{logn.} \frac{p}{p_3} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

Macht die Maschine u Spiele in der Minute bei der Leistung von N Pferdestärken, so gilt auch noch die Beziehung

$$u L_a = 60.75\, N$$

Setzt man daher noch den hieraus entspringenden Werth von L_a in die vorstehende Gleichung und nimmt man p und p_3 in Atmosphären gegeben an, so folgt endlich:

$$V_3 p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \text{logn.} \frac{p}{p_3} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = 0{,}43545 \frac{N}{u} \qquad (172)$$

oder wenn auch hier wieder die äusserst zulässigen Grenzen für die Temperaturen: $T_1 = 273$ und $T_2 = 573$ gesetzt werden:

$$V_3 p_3 \text{ logn.} \frac{p}{12{,}8037\, p_3} = 0{,}39626 \frac{N}{u}$$

und endlich wenn man statt des natürlichen den Brigg'schen Logarithmus setzt:

$$V_3 p_3 \text{ log.} \frac{p}{12{,}8037\, p_3} = 0{,}172093 \frac{N}{u}$$

Aus dieser Formel schliesst sich nun leicht auf die allgemeinen Eigenschaften einer vollkommenen calorischen Maschine.

Das Volumen V_3 am Ende der stärksten Expansion, aus dem man auf die Grössenverhältnisse der ganzen Maschine schliesst, fällt um so kleiner aus, je kleiner die Leistung, je grösser die Anzahl u der Spiele und je grösser der kleinste Druck p_3 ist; überdies aber hängt V_3 auch ab und das ist diesem System eigenthümlich von dem grössten im Prozesse vorkommenden Drucke p; die Gleichung giebt nur dann einen reellen Werth von V_3, wenn

$$p > 12{,}8037 . p_3 \qquad (173)$$

und zwar soll die Differenz der Werthe auf beiden Seiten des Ungleichheitszeichens so gross als möglich sein. Das wird nun im Allgemeinen auf sehr hohe Pressungen führen.

Nehmen wir beispielsweise $p_3 = 1$ und $p = 20$ Atmosphären, so giebt obige Gleichung

$$V_3 = 0{,}88847 \frac{N}{u}$$

(Vergl. die Beispiele auf S. 218 und 219.)

Trotz der enormen Pressung im Zustande der stärksten Compression (20 Atmosphären), fällt sonach bei grossen Leistungen die Maschine noch sehr unförmlich aus. Im Augenblicke der stärksten Compression ist übrigens das Luftvolumen, wie sich leicht nach Gl. (171) findet:

$$V_1 = 0{,}64018 . V_3$$

Für die praktische Ausführung sind sonach die Verhältnisse einer vollkommenen calorischen Maschine keineswegs sehr günstig.

Die Hauptbedingung (173) kann man offenbar nur erfüllen, wenn p_3 kleiner und zwar bedeutend kleiner, als der äussere Atmosphärendruck genommen wird und dann muss die Compression bis auf möglichst hohen Druck p fortgesetzt werden, bis auf weit höheren Druck, als bei den bis jetzt ausgeführten Maschinen geschehen ist.

Die Pressungsdifferenzen fallen hier desshalb sehr bedeutend aus, weil auf der adiabatischen Curve ab (Fig. 32) allein durch Compression die Temperatur der Luft von 0° auf 300° C. erhöht werden soll; eine Aufgabe, die praktisch kaum lösbar sein wird; immerhin darf man keineswegs behaupten, dass die calorischen Maschinen keine Zukunft haben können, es lassen sich doch wohl Anordnungen finden, welche den hier aufgestellten Forderungen wenigstens nahezu genügen, vor Allem, wenn die Maschine verhältnissmässig geringe Leistung entwickeln soll.

Die oben entwickelten Sätze geben doch nun im Allgemeinen an, welche Bedingungen eine vollkommene calorische Maschine zu erfüllen hat und wie sich die bis jetzt in Vorschlag gekommenen Systeme gegenüber diesen Bedingungen verhalten.

Es bleibt mir nun schliesslich noch übrig, die Bedeutung der allgemeinen Formel für die disponible Arbeit [Gl. (168)] der calorischen Maschinen, welche Formel wir später auch bei Beurtheilung der Dampfmaschinen wieder verwenden werden, noch näher zu erläutern.

In der angegebenen Gleichung:

$$L_a = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1) \tag{174}$$

bedeutet Q die Wärmemenge, welche während eines Kreislaufes der Maschine zugeführt wird, und T_2 die höchste, T_1 die niedrigste der im ganzen Prozesse vorkommenden Temperaturen. Ist Q_1 die Wärmemenge, welche während dieses Prozesses abzuleiten ist, so gilt nach Gl. (142ᵃ) auch noch die Beziehung

$$\frac{Q}{A T_2} = \frac{Q_1}{A T_1} \tag{175}$$

Theoretisch könnte man die ganze Arbeit gewinnen, wenn man die Wärmezuleitung bei constanter Temperatur T_2 und die Wärmeableitung bei constanter Temperatur T_1 stattfinden lassen würde. Die beiden Curven *bc* und *ad* (Fig. 32) müssten isothermische Linien sein, während *ab* und *cd* adiabatische Curven darstellen. Für den Fall, dass wirklich vier Curven dieser Art die Arbeitsfläche umschliessen, lässt sich aber, wie ich im 1. Abschnitte S. 66 u. f. bei näherer Erläuterung der Kreisprozesse gezeigt habe, der vorstehenden Gleichung eine eigenthümliche Bedeutung unterlegen.

Auf die dort angegebene Darstellung kommen wir hier zurück, werden aber, da wir die Verhältnisse bei calorischen Maschinen und Dampfmaschinen im Auge behalten wollen, die Frage in einer dem Techniker geläufigen Form behandeln.

Angenommen, bei der Anlage einer hydraulischen Umtriebsmaschine sei das Gewicht der Wassermenge, die in der Sekunde herbeiströmt und zur Benutzung zur Verfügung steht, G Kilogr.; wir beziehen ferner die Lage der Wasserspiegel auf den Meeresspiegel, es sei h_2 der Verticalabstand des Oberwasserspiegels und h_1 der Abstand des Unterwasserspiegels vom Meeresspiegel. Das ganze zur Disposition stehende Gefälle ist sonach $h_2 - h_1$ und sonach folgt die Arbeit, welche bei diesem Wasserlaufe pro Sekunde zur Verfügung steht:

$$L_a = G (h_2 - h_1)$$

Könnte man die ganze Höhe h_2 bis zum Nullpunkte (dem

Meeresspiegel) verwerthen, so wäre die Arbeit W, die pro Sekunde gewonnen würde:

$$W = G h_2$$

Diese Arbeit ist aber nicht zu benutzen, vielmehr ist in der Höhe h_1 das Wasser, nachdem es arbeitsverrichtend niedergesunken sein kann, wieder abzuliefern; die Arbeit W_1, die im Wasser verbleibt, ist aber

$$W_1 = G h_1$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$G = \frac{W}{h_2} = \frac{W_1}{h_1} \tag{176}$$

und die Substitution in die Gleichung für L_a giebt:

$$L_a = \frac{W}{h_2}(h_2 - h_1) \tag{177}$$

Diese Gleichungen stimmen aber der Form nach vollkommen mit den Gln. (174) und (175) überein, was dort die absoluten Temperaturen T_2 und T_1 sind, sind hier die Höhen h_2 und h_1, der absolute Nullpunkt spielt dort die gleiche Rolle, wie hier das Niveau des Meeresspiegels, und die beiden gleichen Werthe $\frac{Q}{A\,T_2}$ und $\frac{Q_1}{A\,T_1}$ können wir als das Gewicht der Wärmemenge Q von der Temperatur T_2 oder der Wärmemenge Q_1 von der Temperatur T_1 auffassen. Eine gewisse Wärmemenge von bestimmter Temperatur lässt sich daher ansehen, wie eine flüssige Masse, die wir arbeitsverrichtend um eine gewisse Höhe $T_2 - T_1$ niedersinken lassen; die Wärmemittheilung bei constanter Temperatur erscheint wie ein Herbeifliessen dieser Masse auf bestimmter Höhe und die Wärmeableitung bei constanter niedrigerer Temperatur, wie ein Wegfliessen der Masse im tiefer gelegenen Niveau.

Man erkennt nun auch deutlich, welchen Fehler man begeht, wenn man bei calorischen Maschinen und Dampfmaschinen die der Maschine in der Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge Q in Arbeit ausdrücken, d. h. den Werth $Q : A$ berechnen wollte und man diesen Werth als disponible Arbeit ansehen würde; man würde den gleichen Fehler machen, wenn man bei einer Wasser-

radanlage nicht, wie es geschieht, die disponible Arbeit nach Gl. (177) bestimmen, sondern annehmen wollte, diese Arbeit betrage

$$W = G h_2$$

nämlich gleich der Arbeit, welche gewonnen würde, wenn das Wassergewicht G vom Oberwasserspiegel bis zum Meeresspiegel arbeitsverrichtend herabsinken könnte.

Der Besitzer einer calorischen Maschine oder einer Dampfmaschine befindet sich sonach in derselben Lage, wie der Besitzer einer hydraulischen Umtriebsmaschine; er vermag nur ein bestimmtes Wärmegewicht resp. Wassergewicht auf einem bestimmt vorgeschriebenen Gefälle $T_2 - T_1$ resp. $h_2 - h_1$ seiner Maschine zur Ausnutzung zu bieten. Bei calorischen Maschinen haben wir oben als das höchst Erreichbare das Temperaturgefälle $T_2 - T_1 = 300^0$ angegeben: bei Dampfmaschinen ist es aber, wie sich zeigen wird, weit geringer. Findet die Wärmemittheilung und Wärmeentziehung nicht bei constanter Temperatur statt, so verhält es sich damit gerade so, als wenn das Wasser bei der Anlage einer hydraulischen Maschine in verschiedenen Höhen zu- und abströmen würde: wir machen dann eben nicht das ganze Gefälle vom Ober- bis zum Unterwasserspiegel nutzbar, kann aber im letztern Fall von einem mittlern disponiblen Gefälle sprechen; ganz ähnlich verhält es sich auch bei dem Kreisprozesse der calorischen Maschinen.

Findet die Wärmemittheilung beim Uebergange eines Körpers von einer adiabatischen Curve zur andern bei veränderlicher Temperatur statt, so ist das ganze Wärmegewicht nach früherem:

$$P = \int \frac{dQ}{AT} \tag{179}$$

Wäre dieselbe Wärmemenge Q bei constanter Temperatur T_y zwischen den gleichen adiabatischen Curven zugeleitet worden, so bestände auch die Beziehung

$$P = \frac{Q}{A T_y} \tag{180}$$

und für den Rückgang in den Anfangszustand bei constanter Temperatur T_x, wobei die Wärmemenge Q_1 abzuführen ist:

$$P = \frac{Q_1}{A T_x} \tag{181}$$

Die gewonnene Arbeit wäre dann

$$L = \frac{Q - Q_1}{A}$$

oder nach der Verbindung der Gl. (180) und (181)

$$L = \frac{Q}{A T_y} (T_y - T_x) = P (T_y - T_x) \tag{182}$$

Hiernach lässt sich jeder Kreisprozess auf den Normalfall zurückführen, bei welchem die Arbeitsfläche von zwei isothermischen und zwei adiabatischen Curven begrenzt wird; mit andern Worten, es lässt sich jeder Kreisprozess auffassen, wie das Herabsinken eines Wärmegewichtes P um eine gewisse Höhe $T_y - T_x$.

Den gleichen Fall haben wir auch bei der Anlage von hydraulischen Motoren; ist das Profil des Oberkanales verschieden von dem des Unterkanales, so erfordert die genaue Bestimmung der disponibeln Arbeit eine ganz ähnliche Rechnung, dann ist nicht ohne Weiteres die disponible Arbeit einfach das Produkt aus dem Gewichte der Wassermenge pro Sekunde in den Abstand beider Wasserspiegel, vorausgesetzt, dass wir nur das eigentliche Druckgefälle benutzen können.

Die Reduction eines beliebigen Kreisprozesses auf den Normalfall mit Hülfe vorstehender Formeln mag noch durch ein Beispiel erläutert werden.

Legen wir die bekannte Bezeichnung der Fig. 32 S. 228 zu Grunde und nehmen wir an, die beiden Curven bc und ad seien dem Gesetze $p^m v^n =$ Const. unterworfen, so ist (den Fall $m = n$ ausgenommen):

$$dQ = \lambda dT$$

sonach nach Gl. (179) das Wärmegewicht

$$P = \frac{\lambda}{A} \text{ logn. } \frac{T_2}{T}$$

und

$$Q = \lambda (T_2 - T).$$

Daher folgt nach Gl. (180)

$$T_y = \frac{T_2 - T}{\log.\, T_2 - \log.\, T}$$

Hingegen ist, weil nach Gl. (142ᵃ) S. 208

$$Q_1 = \frac{T_1}{T} Q$$

ist, aus Gleichung (181)

$$T_x = \frac{T_1}{T} \frac{Q}{AP}$$

oder vorstehende Werthe von Q und P substituirt:

$$T_x = \frac{T_1}{T} \frac{T_2 - T}{\log.\, T_2 - \log.\, T}$$

Hiernach ist dieser Kreisprozess auf den Normalfall zurückgeführt; die Arbeit ist dieselbe, die man gewinnen würde, wenn die Wärmemittheilung bei constanter Temperatur T_y und die Wärmeableitung bei constanter Temperatur T_x erfolgen würde.

Das Temperaturgefälle für diesen Kreisprozess ist dann:

$$T_y - T_x = \frac{(T_2 - T)\ (T - T_1)}{T \operatorname{logn.} \frac{T_2}{T}}$$

Die Substitution dieses Werthes und des angegebenen Werthes von P in Gl. (182) führt dann auf dieselbe Formel für die gewonnene Arbeit, die wir oben unter No. 146 auf S. 209 für den gleichen Fall schon angegeben haben.

DRITTER ABSCHNITT.

---

tersuchungen über das Verhalten

der

Dämpfe.



Die Dämpfe im gesättigten und überhitzten Zustande.

Mit dem Namen »Dampf« bezeichnet man eine Gasart, welche aus einer tropfbaren Flüssigkeit, gewöhnlich durch Wärmemittheilung, entstanden ist und die umgekehrt, gewöhnlich durch Abkühlung d. h. Wärmeentziehung wieder in den flüssigen Zustand zurückgeführt werden kann.

So lange die Dämpfe noch mit der Flüssigkeit, aus der sie hervorgingen, in Berührung stehen, zeigen sie sich in ihrem Verhalten wesentlich von den permanenten Gasen verschieden; nur dann wenn die Dämpfe sich frei von Flüssigkeit befinden, können sie durch Erwärmung, Compression u. s. w. in einen Zustand versetzt werden, der dem eines permanenten Gases ähnlich ist. Im erstern Falle bringt die geringste Abkühlung eine theilweise Condensation hervor, während im andern Falle die Dämpfe unter Umständen einen verhältnissmässig grossen Wärmeverlust ertragen können, ohne auch nur theilweise condensirt zu werden. Dämpfe der erstern Art nennt man »gesättigte oder saturirte Dämpfe«, während die der andern Art »ungesättigte oder überhitzte Dämpfe« genannt werden.

So lange der Dampf, selbst mit den geringsten Mengen derjenigen Flüssigkeit in Berührung steht, aus der er hervorging, ist er *jederzeit gesättigt*, er befindet sich in seinem Condensationspunkte, doch kann man sich natürlicher Weise auch gesättigten Dampf ohne seine Flüssigkeit denken, man hat sich nur vorzustellen, dass bei seiner Bildung so eben das letzte Flüssigkeitselement in Dampf überging.

Ungesättigter oder überhitzter Dampf kann hingegen, zusammengebracht mit seiner Flüssigkeit, nicht bestehen.

Befindet sich in einem Gefässe die Gewichtseinheit Mischung einer Flüssigkeit und ihres Dampfes abgesperrt, so

zeigt sich, dass der spezifische Druck p nur von der Temperatur t, nicht aber von dem spezifischen Volumen der Mischung abhängt; vermehrt oder vermindert man nämlich das Gefässvolumen und sorgt man durch Mittheilung oder Entziehung von Wärme dafür, dass am Ende die Temperatur wieder die anfängliche ist, so ist das auch mit dem Druck p der Fall, vorausgesetzt, dass am Ende der Operation noch Flüssigkeit vorhanden, der Dampf also noch im gesättigten Zustande ist.

Erhöht oder erniedrigt man die Temperatur t der Flüssigkeits- und Dampfmischung, so steigt oder sinkt auch in ganz bestimmter Weise die Spannung oder der Druck p; der Druck bleibt dann aber wieder auf constanter Höhe, wenn wir, wie vorhin bei veränderlichem Gefässvolumen, die Temperatur constant erhalten: dabei ist aber begreiflicher Weise mit der Ausdehnung des Gefässes, d. h. des Volumens der Mischung eine Dampfbildung, das Verdampfen eines Theiles der Flüssigkeit verbunden, während umgekehrt bei einer Volumenverminderung unter constanter Temperatur ein Niederschlagen von Dampf stattfindet.

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass der Druck p des gesättigten Dampfes nur eine Funktion der Temperatur t ist, also unabhängig vom Volumen der Mischung von Flüssigkeit und Dampf oder wie sich auch sagen lässt, unabhängig vom Mischungsverhältniss ist. Dieses Mischungsverhältniss werden wir in der Folge durch die Gewichtsmenge Dampf ausdrücken, welche in der Gewichtseinheit Mischung von Flüssigkeit und Dampf enthalten ist. Diese Gewichtsmenge bezeichnen wir durchgängig mit x und nennen diesen Werth die spezifische Dampfmenge: das Gewicht der Flüssigkeit beträgt dann natürlich $1 - x$ Kilogramm.

Wiederholen wir mit der Flüssigkeits- und Dampfmischung den vorhin angegebenen Versuch, indem wir das Gefäss erweitern, durch Wärmezuleitung die Temperatur t constant erhalten und fortwährend neue Flüssigkeitstheile in Dampf überführen, so wird endlich ein Moment eintreten, in welchem eben das letzte Flüssigkeitselement in Dampf übergeht; in diesem Augenblicke ist die spezifische Dampfmenge $x = 1$ und bis dahin erhielt sich auch der Druck p unverändert auf gleicher Höhe und der Dampf blieb gesättigt.

Führt man aber den Versuch weiter aus, d. h. setzt man

Erweiterung des Gefässes und Wärmemittheilung weiter fort, aber der Art, dass die Temperatur t auch im Weitern auf der Höhe von vorhin erhalten wird, so zeigt nun der Dampf ein ganz andres Verhalten; der Druck nimmt nämlich von jetzt an um so mehr ab, je mehr das Volumen vergrössert wird und zwar erscheint jetzt der Druck p nicht mehr als Funktion der Temperatur t allein, sondern zugleich im bestimmten Zusammenhange mit dem spezifischen Volumen v. Dieser Dampf ist nun überhitzt und entfernt sich begreiflicher Weise um so weiter von seinem Condensationspunkte, je weiter man die Ausdehnung fortsetzt; bis endlich, wie wir mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen dürfen, das Verhalten dieses Dampfes mit dem eines vollkommenen permanenten Gases übereinstimmt.

Kehren wir nun aber den Versuch um, indem wir überhitzten Dampf bei constanter Temperatur, also unter Wärmeentziehung comprimiren, so wächst der Druck fortwährend mit kleiner werdenden Volumen bis zu dem Augenblicke, in welchem der Dampf gesättigt ist: von da bleibt der Druck p constant und die Compression des gesättigten Dampfes findet unter fortwährenden Niederschlagen von Dampf statt, bis endlich aller Dampf in Flüssigkeit übergegangen ist und nun die weitere Volumenverminderung nur unter sehr bedeutender Druckzunahme und nur bis zu gewissem Grade möglich ist.

Man erkennt also, dass für eine bestimmte Temperatur, sobald der Dampf in den gesättigten Zustand übergegangen ist, eine weitere Druckerhöhung nicht möglich ist, vielmehr mit der Compression jetzt nur die Condensation verbunden ist. Aus diesem Grunde sagt man von dem gesättigten Dampfe, er befinde sich im Maximo der Spannung, es existirt bei gleicher Temperatur kein Dampf von höherm Drucke.

Der überhitzte Dampf hingegen hat bei gleicher Temperatur jederzeit einen geringern Druck, als der gesättigte Dampf und daher umgekehrt auch bei gleichem Drucke eine höhere Temperatur; aus dem letztern Grunde nennt man eben den Dampf überhitzt.

Denken wir uns einen gesättigten Dampf von bestimmter Temperatur t und ohne Beimischung von Flüssigkeit, so wird das spezifische Volumen v (Volumen der Gewichtseinheit) und die Dichtigkeit γ (Gewicht der Volumeneinheit) dieses Dampfes

einen bestimmten Werth haben und beide Grössen können, wie der Druck p, als Funktionen der Temperatur t allein angesehen werden. Ueberdies übersieht man leicht, dass beim gesättigten Dampfe, wenn wir ihn mit überhitztem Dampf von gleicher Temperatur vergleichen, die Dichtigkeit γ ein Maximum und das spezifische Volumen v ein Minimum ist.

Es wurde schon oben berührt, dass sich der überhitzte Dampf in seinem Verhalten um so mehr dem eines permanenten Gases nähert, je weiter er sich von seinem Condensationspunkte entfernt befindet. Von welchem Momente an diese Uebereinstimmung im Verhalten (Befolgung des Gesetzes von Mariotte und Gay-Lussac) aber auch nur annähernd bei den verschiedenen Dampfarten angenommen werden kann, ist leider bis jetzt nur sehr unsicher bestimmt, nur so viel ist als sicher anzunehmen, wie Clausius zuerst zeigte und worauf wir zurückkommen, dass diese Uebereinstimmung, wie noch die meisten Lehrbücher der Physik angeben, keineswegs schon vom Condensationspunkte an gerechnet, angenommen werden darf.

Wir haben auch schon früher ausgesprochen (S. 100), dass man in der mechanischen Wärmetheorie mit Zuverlässigkeit bis jetzt nur die beiden Grenzzustände der Dämpfe mathematischer Behandlung unterwerfen kann; den Zustand nämlich, in welchem der Dampf sich befindet, wenn er gesättigt ist, und den Zustand, in welchem er als ein permanentes Gas erscheint. Beide Zustände liegen verhältnissmässig weit auseinander und gehen nicht plötzlich in einander über. Für den zweiten der angegebenen Grenzzustände gelten alle Entwickelungen, die oben im zweiten Abschnitte gegeben wurden, leider fehlen uns aber noch für hoch überhitzte Dämpfe die wichtigsten Constanten, um von den dort gegebenen Formeln praktischen Gebrauch zu machen.

A. Das Verhalten der gesättigten Dämpfe.

Von der Expansivkraft der gesättigten Dämpfe.

Die Expansivkraft oder der Druck p der gesättigten Dämpfe ist, wie vorhin hervorgehoben wurde, unabhängig vom Volumen und dem Mischungsverhältniss einer Mischung von Flüssigkeit und Dampf und nur als Funktion der Temperatur t anzusehen. Es ist nun aber bis jetzt noch nicht gelungen, auf theoretischem Wege für die verschiedenen Dampfarten die Form der Funktion $p = F(t)$ aufzufinden; die Beziehung zwischen den beiden Werthen p und t ist uns nur durch Versuche, und zwar vor Allem durch die berühmten Versuche Regnault's bekannt, deren Resultate, soweit es speziell die Wasserdämpfe betrifft, durch die mit gleicher Sorgfalt ausgeführten Versuche von Magnus ihre Bestätigung finden.

Regnault's Versuche *) erstrecken sich über eine grosse Zahl von Dampfarten, von denen wir in der Folge jedoch nur diejenigen hervorheben, die eine technische Verwendung (bei Dampfmaschinen) schon gefunden haben oder möglicher Weise noch finden können und über welche Regnault auch noch Beobachtungen anderer Art angestellt hat, deren Resultate gebraucht werden, wenn es sich darum handelt, die Lehren der mechanischen Wärmetheorie auf Untersuchungen des Verhaltens dieser Dämpfe anzuwenden.

Diejenigen Dampfarten, welche auf Grund der Regnault'schen Versuche eine derartige weitere Untersuchung zulassen und deren Verhalten durch die Tabellen am Schlusse dieses Werkes näher dargelegt wird, sind die gesättigten Dämpfe von Wasser (Tab. 1, a und b), Aether (Tab. 2, a und b), Alkohol (Tab. 3, a und b), Aceton (Tab. 4, a und b), Chloroform (Tab. 5, a und b), Chlorkohlenstoff (Tab. 6, a und b), Schwefelkohlenstoff (Tab. 7, a und b).

Von allen übrigen Dampfarten fehlen, wie wir später zeigen werden, noch gewisse Werthe: von denselben haben wir, wegen ihrer merkwürdigen Eigenschaften nur die Dämpfe von Quecksilber und Kohlensäure (Tab. 8 und 9) aufgenommen. Tab. 10

*) Regnault, Relation des expériences etc.

endlich bezieht sich wieder auf Wasserdämpfe, wie Tab. 1, mit dem Unterschiede gegen Letztere, dass sie in einer, speziell für technische Zwecke bequemern Form angeordnet ist. Tabelle 1 bis 7 erste Hälfte (a) und Tab. 8 und 9 sind in gleicher Weise geordnet; Col. 1 giebt die Temperatur t nach Celsius (Luftthermometer); die Col. 2 giebt die absolute Temperatur bestimmt durch die Formel $T = a + t = 273 + t$; bei den Wasserdämpfen fortschreitend von 5 zu 5°, bei den übrigen Dämpfen von 10 zu 10°; die Col. 3 giebt dann nach Regnault den Druck p des gesättigten Dampfes und zwar in Millimeter Quecksilbersäule gemessen; will man den spezifischen Druck wissen (Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter), so hat man die Werthe dieser Columne nur mit $\frac{10334}{760}$ zu multipliciren, während sich der Druck in Atmosphären ergiebt, wenn man die Werthe p der Tabellen mit 760 dividirt. Die in den Tabellen angegebenen Werthe für die Dampfspannung sind nicht direct beobachtet, sondern nach einer empirischen Formel berechnet. Regnault hat nämlich (Mémoires de l'Académie des sciences t. XXI) seine Versuchsresultate graphisch dargestellt, indem die Temperatur t als Abscisse und der beobachtete Druck p als Ordinate aufgetragen wurde. Die Verbindung der einzelnen so bestimmten Punkte führte dann auf eine Curve, deren Verlauf im Weitern für jede beliebige andre Temperatur den zugehörigen Druck leicht ermitteln lässt. Das wahre Gesetz dieser Curve ist nicht bekannt, wohl aber sind eine grosse Menge empirischer Formeln angegeben worden (vergl. Poggendorff's Annalen Bd. 18. — Dove, Repertorium Bd. 1), welche den Verlauf dieser Curven für verschiedene Dampfarten mehr oder weniger genau wiedergeben.

Von allen diesen Formeln erwähnen wir aber hier nur diejenige, welche Regnault nach dem Vorgange von Biot zur Darstellung seiner Versuchsreihen gewählt hat und nach welcher auch die Columne 3 der angehängten Tabellen berechnet ist. Die Formel, die auch wir im Weitern unsern Untersuchungen zu Grunde legen werden, lautet allgemein für jede Art von gesättigten Dampf

$$\log. p = a + b\alpha^{\tau} + c\beta^{\tau} \qquad (183)$$

wobei $\tau = t - t_0$ ist.

Hier bedeuten a, b, c, α und β constante Grössen, die für jede einzelne Dampfart auf Grund der Versuche ermittelt werden mussten und deren Werthe Regnault in seinem Werke (Relation des expériences t. 2. p. 651) tabellarisch zusammengestellt hat. Der angegebene Logarithmus ist der Brigg'sche und der Druck p ist in Millimeter Quecksilbersäule gemessen; t ist die Temperatur nach Celsius und t_0 eine constante Grösse, welche von Regnault willkürlich gewählt wurde und welche die Temperatur desjenigen der fünf Versuche ist, der dem kleinsten Drucke entspricht. Die Ermittelung der fünf Constanten der Gl. (183) ist auf analytischem Wege nur möglich, wenn die fünf Werthe von p, welche der Constantenbestimmung zu Grunde gelegt werden, bei gleichen Temperaturintervallen gewählt werden, was Regnault auf Grund der graphischen Darstellung seiner Versuchsresultate leicht ermöglicht war.

Ist für eine Reihe derartiger Versuche t_0 die Temperatur für den Versuch, welcher dem kleinsten Drucke entspricht, und t_1 die Temperatur des nächstfolgenden Versuches, so ist allgemein bei gleichen Temperaturdifferenzen

$$\tau = n\,(t_1 - t_0)$$

wobei $n = 0, 1, 2, 3$ u. s. w. zu setzen ist; die Substitution in Gl. (183) giebt dann

$$\log. p = a + b\alpha^{n\,(t_1 - t_0)} + c\beta^{n\,(t_1 - t_0)}$$

oder wenn wir vorübergehend setzen:

$$\alpha_1 = \alpha^{t_1 - t_0} \text{ und } \beta_1 = \beta^{t_1 - t_0} \qquad (184)$$

$$\log. p = a + b\alpha_1^{\,n} + c\beta_1^{\,n} \qquad (185)$$

Setzen wir jetzt der Einfachheit wegen $\log. p = y$ und unterscheiden wir die fünf Versuchswerthe von $\log. p$ durch die Bezeichnung

$$y_0\, y_1\, y_2\, y_3\, y_4$$

und setzen wir der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3, 4$, so schreibt sich Gl. (185) für die fünf Versuche:

$$\begin{aligned} y_0 &= a + b + c \\ y_1 &= a + b\alpha_1 + c\beta_1 \\ y_2 &= a + b\alpha_1^{\,2} + c\beta_1^{\,2} \\ y_3 &= a + b\alpha_1^{\,3} + c\beta_1^{\,3} \\ y_4 &= a + b\alpha_1^{\,4} + c\beta_1^{\,4} \end{aligned}$$

Führen wir ferner noch für die Differenzen zweier benachbarter Werthe folgende Bezeichnung ein:

$$y_1 - y_0 = \delta y_0$$
$$y_2 - y_1 = \delta y_1$$
$$y_3 - y_2 = \delta y_2$$
$$y_4 - y_3 = \delta y_3$$

so ergeben sich durch entsprechende Verbindung der gegebenen Formeln zunächst zur Ermittlung der Constanten α_1 und β_1 die beiden Gleichungen

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\delta y_1 \cdot \delta y_2 - \delta y_0 \cdot \delta y_3}{(\delta y_1)^2 - \delta y_0 \cdot \delta y_2}$$

$$\alpha_1 \beta_1 = \frac{(\delta y_2)^2 - \delta y_1 \cdot \delta y_3}{(\delta y_1)^2 - \delta y_0 \cdot \delta y_2}$$

und dann folgt:

$$b = \frac{\beta_1 \cdot \delta y_0 - \delta y_1}{(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$c = \frac{\delta y_1 - \alpha_1 \cdot \delta y_0}{(\beta_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$a = y_0 - b - c$$

und endlich nach den Gln. (184)

$$\log. \alpha = \frac{1}{t_1 - t_0} \log. \alpha_1 \text{ und } \log. \beta = \frac{1}{t_1 - t_0} \log. \beta_1$$

Auf dem hier angedeuteten Wege*) sind die Constanten in den Regnault'schen Formeln berechnet worden, wie sie sich in dessen Schriften angegeben finden. Die Angabe aller dieser Constanten ist hier unterlassen, ich habe vielmehr vorgezogen, in der folgenden Zusammenstellung zur Erleichterung der numerischen Rechnungen neben den Werthen von a für verschiedene Dampfarten die Werthe von log. $(b\alpha^\tau)$ und log. $(c\beta^\tau)$ als Funktionen der Temperatur t anzugeben, dabei mussten freilich die Vorzeigen des zweiten und dritten Gliedes der Gl. (183) speziell aufgeführt werden.

*) Ich habe es nicht für überflüssig gehalten, die Formeln zur Berechnung der fünf Constanten hier anzugeben, weil sich in der Schrift Regnault's (Mémoires de l'Académie t. XXI. S. 596) in den beiden Formeln für $\alpha_1 + \beta_1$ und $\alpha_1 \beta_1$ Druckfehler befinden, worauf Moritz im Bulletin de l'Académie de St-Petersbourg t. 13. S. 43 aufmerksam machte. Im zweiten Bande der »Relations etc.« macht auch Regnault selbst davon Anzeige.

Gesättigte Dämpfe von:	Werthe von a	Vorzeichen von $b\alpha^\tau$	Vorzeichen von $c\beta^\tau$	Werthe von log. $(b\alpha^\tau)$	Werthe von log. $(c\beta^\tau)$
Wasser *) 0—100°.	4.7393707	—	+	+ 0.6117408 — 0.003274463 t	— 1.8680093 + 0.006864937 t
Wasser *) 100—200°.	6.2640348	—	—	+ 0.6593123 — 0.001656138 t	+ 0.0207601 — 0.005950708 t
Aether	5.0286298	—	+	+ 0.4414317 — 0.0031223 t	— 3.3497030 + 0.0145775 t
Alkohol	5.4562028	—	+	+ 0.6390301 — 0.0029143 t	— 2.4949325 — 0.0590515 t
Aceton **)	5.3085419	—	—	+ 0.5312766 — 0.0026148 t	— 0.9645222 — 0.0215592 t
Chloroform	5.2253893	—	—	+ 0.5219943 — 0.0025856 t	— 0.9111383 — 0.0131824 t
Chlorkohlenstoff . .	12.0962331	—	—	+ 0.9550683 — 0.0002880 t	+ 0.1934744 — 0.0050220 t
Schwefelkohlenstoff .	5.4011662	—	—	+ 0.4918860 — 0.0022372 t	— 0.7200368 — 0.0088003 t
Quecksilber . . .	5.6640459	—	+	+ 0.8890208 — 0.0012438 t	— 0.4179605 — 0.0119062 t
Kohlensäure . . .	5.6771989	—	+	+ 0.2175359 — 0.0052911 t	— 0.3948491 — 0.0089594 t

(t Temperatur nach Celsius.)

*) Die Constanten für Wasser für die Temperaturgrenzen 0—100° sind von Moritz (Bulletin de l'Académie de St-Petersbourg t. 13 S. 43) neu berechnet, weil sich in die betreffenden Rechnungen von Regnault ein Fehler eingeschlichen hatte.

**) Die Constanten für Aceton habe ich neu bestimmt, weil sich die von Regnault gegebenen Werthe (Relations etc. t. 2 S. 474) als unrichtig herausstellten.

Mit Hülfe der in vorstehender Zusammenstellung gegebenen Werthe lassen sich nun leicht die Tabellen 1 bis 9 Columne 3 controlliren*) und auch für andere Temperaturwerthe die Werthe des Druckes p ermitteln. Zum Vergleich der verschiedenen Dampfarten unter sich sind aber die Tabellen nicht sehr bequem,

	Temperatur t (Celsius)			
Druck in Atmosphären.	1 Wasser.	2 Aether.	3 Alkohol.	4 Aceton.
1	100.00	34.956	78.299	56.319
2	120.60	55.866	96.823	78.[illegible]
3	133.91	69.607	108.832	92.303
4	144.00	80.211	117.980	103.[illegible]
5	152.22	88.961	125.485	112.301
6	159.22	96.473	131.910	120.077
7	165.34	103.085	137.567	126.[illegible]
8	170.81	109.005	142.647	133.146
9	175.77	114.369	147.276	138.811
10	180.31	119.389	151.543	144.[illegible]

Diese Zusammenstellung ist besonders für technische Rechnungen recht brauchbar, sie gewährt aber auch sonst bequemen Ueberblick über das Verhalten der verschiedenen Dampfarten. Eigenthümlich treten die Quecksilberdämpfe hervor; diese Dämpfe und die Kohlensäuredämpfe schliessen gewissermassen alle

*) Die Werthe des Dampfdruckes p für verschiedene Temperaturwerthe t, wie sie sich in den angehängten Tabellen finden, sind von Regnault gegeben, mit Ausnahme der für Wasser (0—100°) und für Aceton gegebenen Werthe. (S. o.) Bei der Controlle der Regnault'schen Tabellen fand sich ferner, dass auch die für den Druck des gesättigten Aetherdampfes angegebenen Werthe (Relations etc. t. 2. S. 392) nicht ganz genau mit den Werthen übereinstimmen, auf welche die dort gegebene Formel führt. Die Constanten der Formel für Aether sind richtig, der Fehler muss bei Berechnung der Tabelle (S. 392) begangen worden sein. Die Abweichungen sind jedoch so geringfügig, dass ich es nicht für nöthig gehalten habe, eine neue Tabelle zu berechnen.

ich gebe daher im Folgenden eine Zusammenstellung von Zahlenwerthen, welche die Temperatur der verschiedenen Dämpfe für Pressungen von 1 bis 10 Atmosphären angiebt. Da die Formel (183) sich nicht für t direct auflösen lässt, so mussten die Werthe der folgenden Tafel durch Interpolation gefunden werden.

…igte Dämpfe von:				
5 …oform.	6 Chlorkohlen-stoff.	7 Schwefel-kohlenstoff.	8 Quecksilber.	Druck in Atmosphären.
60.159	76.521	46.254	357.347	1
82.587	101.371	69.251	397.317	2
97.550	117.906	84.456	423.010	3
109.041	130.502	96.174	442.469	4
118.563	141.178	105.863	458.328	5
126.784	150.188	114.209	471.851	6
134.062	158.123	121.593	483.709	7
140.664	—	128.252	494.316	8
146.706	—	134.342	505.152	9
152.343	—	139.972	513.907	10

übrigen Dämpfe zwischen sich ein und bilden die Grenzen. Die Temperatur der gesättigten Quecksilberdämpfe ist bei gleichem Drucke weit höher, als bei allen übrigen Dämpfen, während umgekehrt die Kohlensäuredämpfe schon bei geringer Temperatur so bedeutenden Druck zeigen, dass sie in vorstehende Zusammenstellung nicht mit aufgenommen werden konnten. Nach Tab. 9 beträgt der Druck gesättigter Kohlensäuredämpfe schon bei 0° Celsius 26906,60 Millimeter Quecksilbersäule oder 35,403 Atmosphären und bei 45° C. ist der Druck 76314,60 Millimeter oder 100,414 Atmosphären. Wegen des abweichenden Verhaltens, welches gerade diese Dämpfe zeigen, sind sie hier mit aufgenommen worden; sollte es gelingen, das Gesetz der Dampfbildung und das innere Wesen der Dämpfe überhaupt aufzudecken, so werden gerade die Tabellen 8 und 9 zur Prüfung der theoretischen Ableitungen gute Dienste leisten.

Ich glaube, dass überhaupt die Tabellen im Anhange unter Umständen von grösserm Nutzen werden können, als es vielleicht auf den ersten Augenblick scheinen mag und habe mich daher sofort nach dem Erscheinen des 2. Bandes von Regnault's »Relations des expériences« ohne Bedenken der zeitraubenden und mühevollen Berechnung dieser Tabellen unterzogen; ein Vergleich gleichartiger Werthe der Tabellen für verschiedene Dämpfe kann möglicher Weise allein schon auf ganz neue Beziehungen und auf die Entdeckung eines Gesetzes führen, welchem alle Dampfarten in gleicher Art unterworfen sind.

Die Auffindung eines solchen Gesetzes ist überhaupt nur auf zwei Wegen denkbar; entweder dadurch, dass es gelingt aus der innern Constitution der Flüssigkeiten und Gasarten das Gesetz der Dampfbildung abzuleiten oder dadurch, dass man die für verschiedene Dampfarten erhaltenen Versuchs- und Rechnungsresultate sorgfältig unter einander vergleicht. Eine solche Vergleichung wird aber nun durch meine Tabellen ermöglicht.

Von allen Dampfarten ist der Wasserdampf, wegen seiner Verwendung in der Praxis, bei Weitem der wichtigste, es ist deswegen speziell für diese Dampfart noch Tabelle 10 angefügt worden, welche alle Werthe enthält, die besonders für Beurtheilung der Dampfmaschinen von Wichtigkeit sind. Die erste Columne giebt den Dampfdruck in Atmosphären von $^1/_{10}$ Atmosphären bis 7 Atmosphären fortschreitend von $^1/_{10}$ zu $^1/_{10}$ und von 7 bis 14 Atmosphären fortschreitend von $^1/_4$ zu $^1/_4$ Atmosphären. Die zweite Columne giebt den entsprechenden Druck in Millimeter Quecksilbersäule und Columne 3 den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter (spezifischer Druck). Columne 4 giebt dann die entsprechende Dampftemperatur, ebenfalls auf Grund von Regnault's Versuchen durch Interpolation gefunden, wie die Werthe vorstehender Zusammenstellung. Von Tabelle 10 sowohl, als von der zuletzt gegebenen Uebersicht werden wir in der Folge bei der Darlegung des Verhaltens von Dampf- und Flüssigkeitsmischungen durch spezielle Beispiele häufig Gebrauch machen, weil es bequemer und gebräuchlicher ist, bei den Zustandsänderungen der Mischungen nicht die Temperatur-, sondern die Druckänderungen als bekannt vorauszusetzen.

Die Anwendung der Sätze der mechanischen Wärmetheorie auf Untersuchung des Verhaltens der Dämpfe erfordert nun

aber nicht nur die Kenntniss der Beziehung zwischen Druck p und Temperatur t, sondern man muss auch wissen, wie der Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$, der in den wichtigsten Formeln erscheinen wird, mit der Temperatur zusammenhängt. Diese Beziehung lässt sich aber leicht aus Regnault's Formel ableiten.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\log. \, p = a + b\alpha^\tau + c\beta^\tau$$

auf beiden Seiten mit dem natürlichen Logarithmus von 10 nämlich 2,302585093, welchen Werth wir mit k bezeichnen wollen, so erscheint links der natürliche Logarithmus von p; man erhält

$$\text{logn.} \, p = ka + kb\alpha^\tau + kc\beta^\tau$$

Differentiirt man diese Gleichung und beachtet man dabei, dass $\tau = t - t_0$ ist, wobei t_0 eine constante Grösse ist, so folgt:

$$\frac{dp}{p\,dt} = kb \, \text{logn.} \, \alpha \cdot \alpha^\tau + kc \, \text{logn.} \, \beta \cdot \beta^\tau$$

oder wenn wir die natürlichen Logarithmen der rechten Seite durch die Brigg'schen ersetzen:

$$\frac{dp}{p\,dt} = (k^2 b \log. \alpha) \, \alpha^\tau + (k^2 c \log. \beta) \, \beta^\tau$$

Da nun nach frühern Angaben die Constanten b, c, α und β für die verschiedenen Dämpfe bekannt sind, so lassen sich die beiden Coefficienten von α^τ und β^τ berechnen; bezeichnen wir dieselben mit m und n, setzen wir also

$$m = k^2 b \log. \alpha \text{ und } n = k^2 c \log. \beta \tag{186}$$

so folgt:

$$\frac{dp}{p\,dt} = m\alpha^\tau + n\beta^\tau \tag{187}$$

Ich habe in folgender Uebersicht nicht die Werthe von m und n, sondern der bequemern Anwendung wegen die Werthe von log. $(m\alpha^\tau)$ und log. $(n\beta^\tau)$ als Funktionen von t angegeben, musste aber in Folge dessen in den ersten beiden Columnen die Vorzeichen der beiden Glieder der rechten Seite der Gl. (187) besonders anführen.

Mit Hülfe der Ausdrücke der folgenden Zusammenstellung sind nun die Werthe:

$$\frac{dp}{p\,dt}$$

der Tabellen 1 bis 9 (a) Columne 5 berechnet worden. Diese Werthe sind in die Tabellen aufgenommen worden, weil sie, wie sich später zeigen wird, ebenfalls eine wichtige Rolle spielen: multiplicirt man sie mit dem zugehörigen Werth von p, so ergeben sich dann die den einzelnen Temperaturwerthen entsprechenden Werthe des Differentialquotienten

$$\frac{dp}{dt}$$

welche Werthe in Columne 4 der angegebenen Tabellen aufgeführt sind. Dieser Differentialquotient erscheint in Millimeter Quecksilbersäule gemessen, in der Anwendung bei den unten folgenden Formeln muss er in Kilogrammen pro Quadratmeter ausgedrückt werden; zu diesem Zwecke hat man die Tabellenwerthe nur mit $\frac{10334}{760}$ zu multipliciren.

Es mag nun noch durch ein Beispiel der Gebrauch der beiden Uebersichtstabellen erläutert werden.

Es sei der Druck gesättigter Acetondämpfe für die Temperatur $t = 100^0$ zu bestimmen; hier folgt nach der Tafel S. 253

$$\log.\ (b\alpha^\tau) = +\ 0{,}5312766 - 0{,}0026148\ t = 0{,}2697966$$
$$\log.\ (c\beta^\tau) = -\ 0{,}9645222 - 0{,}0215592\ t = -\ 3{,}1204422$$
$$= 0{,}8795578 - 4$$

woraus sich ergiebt:

$$b\alpha^\tau = 1{,}8612155$$
$$c\beta^\tau = 0{,}0007578$$

Da nun ferner $a = 5{,}3085419$ ist, so folgt mit Rücksicht auf die angegebenen Vorzeichen von $b\alpha^\tau$ und $c\beta^\tau$ nach Gl. (153)

$$\log.\ p = 3.4465686$$

und

$$p = 2796{,}20 \text{ Millim.}$$

wie auch Tabelle 4 a angiebt.

Grundlagen für die Formel: $\frac{dp}{p\,dt} = m\alpha^{\tau} + n\beta^{\tau}$

Gesättigte Dämpfe von:	Vorzeichen von $m\alpha^{\tau}$	Vorzeichen von $n\beta^{\tau}$	Werthe von log. $(m\alpha^{\tau})$	Werthe von log. $(n\beta^{\tau})$
Wasser 0—100⁰	+	+	— 1.1486877 — 0.003274463 t	— 3.3069414 + 0.006864937 t
Wasser 100—200⁰	+	+	— 1.3971597 — 0.001656138 t	— 1.4802398 — 0.005950708 t
Aether	+	+	— 1.3396624 — 0.0031223 t	— 4.4616396 + 0.0145775 t
Alkohol	+	—	— 1.1720041 — 0.0029143 t	— 2.9992701 — 0.0590515 t
Aceton	+	+	— 1.3268535 — 0.0026148 t	— 1.9064582 — 0.0215592 t
Chloroform	+	+	— 1.3410130 — 0.0025856 t	— 2.0667124 — 0.0131824 t
Chlorkohlenstoff	+	+	— 1.8611078 — 0.0002880 t	— 1.3812195 — 0.0050220 t
Schwefelkohlenstoff	+	+	— 1.4339778 — 0.0022372 t	— 2.0511078 — 0.0088003 t
Quecksilber	+	—	— 1.2917974 — 0.0012438 t	— 1.6177651 — 0.0119062 t
Kohlensäure	+	—	— 1.3344869 — 0.0052911 t	— 1.7181390 — 0.0089594 t

(t Temperatur nach Celsius.)

Es sei fernerhin für Acetondämpfe der Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ für 5 Atmosphären Druck zu bestimmen; hier giebt die Uebersicht S. 254 $t = 112{,}301^0$ und für diese Temperatur folgt nach der vorstehenden Tafel:

$$\log.\ (m\alpha^\tau) = -1.3268535 - 0.0026148\,t = -1.6204981$$
$$= 0.3795019 - 2$$

$$\log.\ (n\beta^\tau) = -1.9064582 - 0.0215592\,t = -4.3275779$$
$$= 0.6724221 - 5$$

Hiernach

$$m\alpha^\tau = 0.0239608$$

$$n\beta^\tau = 0.0000470$$

und durch Addition nach Gl. 187)

$$\frac{dp}{p\,dt} = 0.0240078$$

Dieser Werth mit $p = 5$ multiplicirt; giebt

$$\frac{dp}{dt} = 0.120039 \text{ in Atmosphären},$$

$$= 760 . 0{,}120039 = 91.230 \text{ in Millimeter Quecksilber},$$

$$= 10334 . 0{,}120039 = 1240{,}48 \text{ in Kilogr. pro Quadratmeter.}$$

Von der Flüssigkeits- und Verdampfungswärme.

Wir gehen nun zur Beantwortung der Frage über, welche Wärmemenge einer gewissen Menge z. B. der Gewichtseinheit Flüssigkeit von bestimmter Temperatur mitgetheilt werden muss, um daraus gesättigten Dampf von vorgeschriebener Temperatur oder gegebenem Druck zu erzeugen.

In der hier gegebenen Fassung wird die Frage in den ältern Lehrbüchern der Physik und Mechanik gestellt und beantwortet und zwar in neuerer Zeit immer unter Zugrundelegung der Resultate der Versuche von Regnault. Die mechanische Wärmetheorie lehrt aber, dass die Frage in der hier gestellten

Weise gar keine Beantwortung zulässt, und dass es unmöglich ist, aus der Anfangstemperatur der Flüssigkeit und der Temperatur des daraus gebildeten, gesättigten Dampfes allein die Wärmemenge zu bestimmen, welche diese Zustandsänderung erforderte; vielmehr verlangt diese Bestimmung noch eine genauere Angabe darüber, auf welche Weise die Flüssigkeit in den dampfförmigen Zustand übergegangen ist; da dieser Uebergang auf unendlich verschiedenen Wegen erfolgen kann, so wird auch in jedem einzelnen Falle die Wärmemenge, welche der Flüssigkeits- und Dampfmischung von aussen her zur Erzielung des verlangten Ueberganges mitgetheilt werden muss, eine andre sein.

So könnte man sich ein mit Flüssigkeit und Dampf gefülltes Gefäss denken, dessen Rauminhalt während der Wärmemittheilung constant erhalten oder verringert oder vergrössert wird; das Letztere könnte dann wieder unter Ueberwindung eines äussern Druckes erfolgen, der nach irgend welchem Gesetze variirt. In jedem einzelnen Falle könnte recht wohl die vorgeschriebene Dampfmenge von bestimmter Temperatur erzeugt worden sein; da aber die während der Zustandsänderungen von der Masse aufgenommene oder verrichtete äussere Arbeit von der Grösse und dem Gesetz der Veränderung des äussern Druckes abhängt, so ist das auch der Fall mit der Wärmemenge, die bei jedem einzelnen Versuche der Masse mitzutheilen war.

Wüssten wir daher nicht, wie Regnault seine Versuche durchführte, so würden vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie aus seine hieher gehörenden Untersuchungen für uns ganz werthlos sein. Glücklicherweise sind aber diese Versuche in einer solchen Weise durchgeführt und beschrieben*), dass wir vollständig in den Stand gesetzt sind, den Weg der Veränderungen zu überblicken, und dadurch werden die Angaben Regnault's für unsere Zwecke von der grössten Bedeutung und bilden im Verein mit andern seiner Untersuchungen einen Theil der Grundlage von allem Folgenden.

Die Versuche Regnault's erstrecken sich hauptsächlich nach zwei Richtungen. Zunächst verdanken wir ihm Angaben darüber, welche Wärmemenge der Gewichtseinheit Flüssigkeit mitzutheilen ist, um deren Temperatur um ein vorgeschriebenes

---

*) Regnault, Relations des expériences etc. B. I u. II.

Maass zu erhöhen; mit andern Worten Angaben über die spezifische Wärme der Flüssigkeiten.

Bezeichnen wir die spezifische Wärme irgend einer Flüssigkeit mit c, so ist die Wärmemenge dq, welche die Gewichtseinheit bei der Temperaturerhöhung dt fordert,

$$dq = c\,dt$$

und wenn die Erwärmung von 0° Celsius auf t^0 stattfinden soll

$$q = \int_0^t c\,dt \tag{188}$$

Diese Wärmemenge soll im Weitern die »Flüssigkeitswärme« genannt werden. Regnault leitet aus seinen Versuchen empirische Formeln ab, durch welche die Wärmemenge q als Funktion der Temperatur t erscheint, mit Hülfe dieser Formeln findet sich dann die spezifische Wärme der Flüssigkeit durch:

$$c = \frac{dq}{dt} \tag{189}$$

indem man den ersten Differentialquotienten ermittelt.

Für diejenigen Flüssigkeiten, deren Dämpfe wir oben hinsichtlich ihres Spannungsgesetzes schon betrachtet haben, giebt Regnault die folgenden Formeln zur Bestimmung der Flüssigkeitswärme q:

Wasser $q = t + 0.000\,02\,t^2 + 0.000\,000\,3\,t^3$ (190)

Aether $q = 0.52901\,t + 0.000\,295\,9\,t^2$ (191)

Alkohol $q = 0.54754\,t + 0.0011218\,t^2 + 0.000\,002\,206\,t^3$ (192)

Aceton $q = 0.50643\,t + 0.000\,3965\,t^2$ (193)

Chloroform $q = 0.23235\,t + 0.000\,0507\,t^2$ (194)

Chlorkohlenstoff $q = 0.19798\,t + 0.000\,0906\,t^2$ (195)

Schwefelkohlenstoff $q = 0.23523\,t + 0.000\,0815\,t^2$ (196)

Für Quecksilber und Kohlensäure liegen keine Versuche vor; für Quecksilber im flüssigen Zustande kennt man zwar die spezifische Wärme c, doch nicht das Gesetz der Veränderlichkeit

derselben für so weit abliegende Temperaturwerthe, wie sie dem Verdampfen unter den gewöhnlichen Pressungen entsprechen.

Bevor wir nun aber von den vorstehenden Angaben Regnault's Gebrauch machen, ist es nothwendig, die Formel (188) einer Prüfung zu unterwerfen. Wenn der Werth q die Wärmemenge angiebt, welche die Gewichtseinheit Flüssigkeit zur Erwärmung von 0^0 auf t^0 forderte, so ist noch die Frage aufzuwerfen, unter welchen Verhältnissen die Erwärmung bei Regnault's Versuchen stattfand; mit der Erwärmung der Flüssigkeit ist eine Volumenänderung (im Allgemeinen Ausdehnung) verbunden, da nun auch die Flüssigkeit dabei gewöhnlich einem gewissen, constanten oder veränderlichen äussern Drucke ausgesetzt ist, so wird mit der Erwärmung jederzeit eine Aufnahme oder Abgabe von Arbeit, also ein Gewinn oder Verlust von Wärme verbunden sein, für jeden einzelnen Fall würde also q einen andern Werth haben; nur dann, wenn mit der Erwärmung der Flüssigkeiten keine, oder verschwindend kleine Volumenänderungen verbunden sind, kommt auf die Grösse und das Gesetz der Veränderlichkeit des äussern Druckes nichts an; könnten wir sonach diese Annahme machen, so wäre damit die allgemeine Verwendbarkeit der Gl. (188) erwiesen. Wir haben sonach zunächst die Versuchsresultate zu erwähnen, die sich auf die Volumenänderung der Flüssigkeiten bei Wärmemittheilung beziehen. Diese Versuche sind aber für eine genaue Prüfung der vorliegenden Frage sehr unvollständig, wir kennen bis jetzt von oben genannten Flüssigkeiten in dieser Beziehung nur das Verhalten von Wasser, Aether, Alkohol und Schwefelkohlenstoff unter der alleinigen Voraussetzung, dass die Ausdehnung unter atmosphärischem Drucke erfolgt; über das Verhalten der Flüssigkeiten aber bei Volumenänderungen unter einem Drucke, der gleich dem der jeweiligen Temperatur entsprechenden Dampfdruck ist, liegen leider gar keine Beobachtungen vor und doch ist das gerade ein Fall, der für vorliegende Zwecke von besonderer Bedeutung ist.

Die bekannten Beobachtungen und Angaben von Kopp*) zeigen nur, dass die Ausdehnung der vorhin genannten Flüssigkeiten bei der Erwärmung unter atmosphärischem Druck sehr gering sind; verbinden wir damit die Hypothese, dass die Aus-

*) Kopp, Poggendorff's Annalen. Bd. 72.

dehnung noch weniger beträgt, wenn die Flüssigkeit unter dem meist viel höheren Drucke ihres Dampfes steht, so können wir uns bei allen folgenden Untersuchungen die Annahme erlauben, es seien die Volumenänderungen der Flüssigkeit einer Mischung von Flüssigkeit und Dampf als verschwindend klein gegen die Volumenänderungen anzusehen, welche mit der Dampfbildung und der Condensation von Dämpfen verbunden ist.

Wir werden daher jederzeit das Volumen der Gewichtseinheit Flüssigkeit als eine constante Grösse ansehen, welche Temperatur die Flüssigkeit auch haben, und welchem Drucke sie auch ausgesetzt sein mag. Der Fehler, den wir mit dieser Annahme begehen, ist gewiss höchst unbedeutend, da wir in allen folgenden Untersuchungen die Volumenänderungen von Flüssigkeits- und Dampfmischungen in's Auge fassen werden und die Volumenänderungen der Flüssigkeit allein gegen die des Dampfes dabei kaum in Betracht kommen.

Immerhin wäre es von grosser Wichtigkeit, wenn diese Lücke in unserer Kenntniss des Verhaltens der Flüssigkeiten durch genaue und umfassende Versuche beseitigt würde; es wäre keineswegs undenkbar, dass der Ausdehnungscoefficient der Flüssigkeiten bei hoher Temperatur und unter dem entsprechenden Dampfdrucke grösser, vielleicht beträchtlich grösser sich herausstellen könnte, als der Werth ist, den man bei der Ausdehnung unter atmosphärischem Drucke gefunden hat; es handelt sich eben nur, wenn wir mit σ das Volumen der Gewichtseinheit Flüssigkeit bei der Temperatur t bezeichnen und wir uns vorstellen, die Flüssigkeit stehe unter dem ihrer Temperatur entsprechenden Drucke ihres Dampfes um Ermittlung der Funktion $\sigma = f(t)$; es wäre dann $\frac{d\sigma}{dt}$ nicht der Ausdehnungscoefficient im gewöhnlichen Sinne, sondern er würde unter der Voraussetzung gelten, dass mit der Temperaturerhöhung der Flüssigkeit zugleich der Druck gegen die Flüssigkeitsoberfläche in dem Maasse wächst, wie das mit dem Dampfdrucke der Fall ist.

Wollte man den Weg, den Regnault bei Bestimmung der Flüssigkeitswärme eingeschlagen hat, genau nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie verfolgen und dabei auf die angegebene Volumenänderung der Flüssigkeit Rücksicht

nehmen, so würden dessen oben zur Berechnung von q gegebenen Formeln eine ausserordentlich complicirte Bedeutung erhalten. So bestimmte Regnault die Flüssigkeitswärme des Wassers auf folgende Weise.

Er liess aus einem kleinen Dampfkessel, in welchem sich Wasser von der Temperatur t unter dem dieser Temperatur entsprechenden Dampfdruck befand, durch ein mit einem Hahne versehenes Rohr eine gewisse Quantität Wasser nach einem weiten mit kaltem Wasser gefüllten Behälter (Calorimeter) strömen. Aus der anfänglich im Calorimeter befindlichen Wassermenge, dem Gewichte des übergegangenen heissen Wassers und der durch dessen Uebertritt bewirkten Temperaturerhöhung im Calorimeter bestimmte sich dann, mit Rücksicht auf Wärmeverluste, die Wärmemenge, welche das heisse Wasser bei der beobachteten Temperaturdifferenz abgegeben hatte; diese Wärmemenge ist nun aber streng genommen nicht gleichbedeutend mit derjenigen, die erforderlich wäre, dieselbe Wassermenge auf irgend eine Weise z. B. unter vorgeschriebenem constanten Druck wieder auf die Kesseltemperatur zu erwärmen. Der Vorgang bei diesem scheinbar einfachen Versuch ist sehr verwickelt: der Dampfkessel bildet ein Ausströmungsgefäss, aus dem das Wasser unter dem Dampfdrucke, der nahezu constant ist, ausströmt und zwar unter Aufnahme von Arbeit; in der Vorlage, hier im Calorimeter, verrichtet das Wasser Arbeit, um sich (nahe unter atmosphärischem Drucke), Raum zu machen: der Ueberschuss dieser Arbeiten im Vereine mit der Arbeit, welche der Volumenänderung entspricht, wird auf Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet, mit der das Wasser in das Calorimeter tritt. Die dieser Geschwindigkeit entsprechende Arbeit verwandelt sich in Wärme und wird zur Temperaturerhöhung im Calorimeter mit beitragen. Der ganze Vorgang lässt sich leider bis jetzt nicht genauer verfolgen, soviel giebt aber glücklicher Weise die nähere Ueberlegung, dass wir trotz dieser Unsicherheit bei allen folgenden Untersuchungen von den Regnault'schen Angaben und zwar in der oben angegebenen Weise ohne Bedenken Gebrauch machen können; der Einfluss der in Wärme verwandelten lebendigen Kraft der Bewegung und der Volumenänderung des überströmenden Wassers auf die Endtemperatur im Calorimeter ist ohne Zweifel ein sehr unbedeutender.

Eine andere Versuchsreihe Regnault's bezieht sich auf Ermittlung der Wärmemenge, welche zur Dampfbildung erforderlich ist, indem nämlich die Wärmemenge beobachtet wurde, welche frei wurde, wenn der Dampf unter constantem Druck sich niederschlug. Diese Wärmemenge ist offenbar gleichbedeutend mit derjenigen, die unter denselben Umständen zur Dampfbildung d. h. bei Erzeugung unter constantem Drucke der Masse mitzutheilen ist.

Regnault leitet aus seinen Versuchen für die oben angegebenen Flüssigkeiten empirische Formeln ab, mittelst deren man die sogenannte Gesammtwärme, die wir mit λ bezeichnen werden, berechnen kann und versteht unter Gesammtwärme diejenige Wärmemenge, »die man der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0^0 Temperatur zuführen muss, um dieselbe unter constantem Druck p in gesättigten Dampf vom Druck p und der Temperatur t zu verwandeln.«

Die Dampferzeugung in der angedeuteten Weise stellt man sich am besten folgendermassen vor.

Die Gewichtseinheit der Flüssigkeit von 0^0 Temperatur befindet sich in einem mit einem Kolben versehenen Cylinder. Der Kolben ruht auf dem Flüssigkeitsspiegel und ist von aussen her pro Quadrateinheit mit p belastet, wobei p zugleich den spezifischen Druck des zu erzeugenden Dampfes repräsentirt. Führt man jetzt dieser Flüssigkeit Wärme von aussen zu, so wird dieselbe zunächst von 0^0 auf t^0 erwärmt, bevor die Dampfbildung eintritt, denn erst bei der Temperatur t ist die Expansivkraft der Dämpfe so gross, dass der äussere Druck p überwunden

Gesättigte Dämpfe von	Gesammtwärme λ
Wasser	$\lambda = 606{,}50 + 0{,}305\ t$
Aether	$= 94{,}00 + 0{,}45000\ t - 0{,}0005555$
Aceton	$= 140{,}50 + 0{,}36644\ t - 0{,}000516$
Chloroform	$= 67{,}00 + 0{,}1375\ t$
Chlorkohlenstoff	$= 52{,}00 + 0{,}14625\ t - 0{,}000172$
Schwefelkohlenstoff	$= 90{,}00 + 0{,}14601\ t - 0{,}0004123$

werden kann, und die sich bildenden Dämpfe durch Zurückschieben des Kolbens sich Raum machen können. Die Wärmemenge, die bis zum Eintritt der Dampfbildung zuzuleiten ist, ist das, was wir oben die Flüssigkeitswärme genannt und mit q bezeichnet haben; sie berechnet sich nach den oben gegebenen Formeln für jede Temperatur. Wird jetzt die Wärmezuführung weiter fortgesetzt, so bildet sich nun Dampf von der Spannung p, der Kolben weicht zurück, bis endlich alle Flüssigkeit in Dampf übergegangen ist. Während der Dampfbildung ist Druck und Temperatur unveränderlich: die Wärmemenge, die während derselben zugeführt werden muss, mag mit r bezeichnet und nach Clausius die »Verdampfungswärme« genannt werden. Sie ist identisch mit dem, was man in den Lehrbüchern der Physik unter latenter oder gebundener Wärme des Dampfes versteht.

Die gesammte Wärmemenge λ, die hiernach erforderlich ist, um aus der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° unter constantem Drucke p gesättigten Dampf vom Drucke p und der Temperatur t zu erzeugen ist daher:

$$\lambda = q + r \tag{197}$$

Aus seinen Versuchen leitet nun Regnault für die verschiedenen im Folgenden angegebenen Dämpfe die beistehenden Formeln für die Gesammtwärme λ ab; die für die Verdampfungswärme r angegebenen Formeln sind dann leicht aus der Beziehung

$$r = \lambda - q$$

abzuleiten.

Verdampfungswärme r.

$$606{,}50 - 0{,}695\,t - 0{,}000\,02\,t^2 - 0{,}000\,000\,3\,t^3 \tag{198}$$

$$94{,}00 - 0{,}07901\,t - 0{,}000\,8514\,t^2 \tag{199}$$

$$140{,}50 - 0{,}13999\,t - 0{,}000\,9125\,t^2 \tag{200}$$

$$67{,}00 - 0{,}09485\,t - 0{,}000\,0507\,t^2 \tag{201}$$

$$52{,}00 - 0{,}05173\,t - 0{,}000\,2626\,t^2 \tag{202}$$

$$90{,}00 - 0{,}08922\,t - 0{,}000\,4938\,t^2 \tag{203}$$

Nach den hier und den auf S. 262 für q gegebenen Formeln sind nun die auf Tab. 1 bis 7, b (zweite Hälfte) in den ersten Columnen angeführten Werthe berechnet.

Columne 1 giebt die Temperatur t, Col. 2 die Gesammtwärme λ des entsprechenden Dampfes, Col. 3 giebt die Flüssigkeitswärme q und Col. 4 die Verdampfungswärme $r = \lambda - q$.

Nur für Alkoholdämpfe sind die Werthe von λ direct den Angaben Regnault's entnommen; Regnault hat hier für λ keine empirische Formel aufgestellt, weil, wie Col. 2, Tab. 3, b zeigt, diese Grösse sich in so eigenthümlicher Weise mit der Temperatur zu ändern scheint, dass nur durch eine sehr umständliche Form der empirischen Formel das Gesetz näherungsweise hätte dargestellt werden können. Für die Dämpfe von Quecksilber und Kohlensäure fehlen noch die Beobachtungen über die Gesammtwärme und die Flüssigkeitswärme*).

Die Haupttabelle für Wasserdämpfe (Tab. 10) enthält die genauen Werthe der Flüssigkeitswärme q in Col. 5 für verschiedene Dampfspannungen angegeben. Die beiden Werthe λ und r enthält zwar die Tabelle nicht direct gegeben, doch lassen sich dieselben, wie sich noch zeigen wird, der Tabelle ebenfalls entnehmen.

Von der äussern und innern latenten Wärme.

Die Versuche von Regnault, deren Resultate im Vorstehenden angegeben wurden, so weit sie für die folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit sind, geben uns Aufschluss darüber, welche Wärmemenge der Gewichtseinheit der bezeichneten Flüssigkeiten von aussen zuzuführen ist, um unter constantem Drucke gesättigten Dampf von vorgeschriebener Temperatur zu bilden: man ersieht, welcher Theil erst zur Erwärmung der Flüssigkeit.

*) Ausser für die, in der obigen Zusammenstellung aufgeführten Dämpfe, giebt Regnault nur noch für Benzindämpfe die Gesammtwärme und zwar:

$$\lambda = 109{,}00 + 0{,}24429\, t - 0{,}0001315\, t^2$$

Da aber die Flüssigkeitswärme q dieses Dampfes nicht ermittelt ist, so habe ich unterlassen, diesen Dampf in die Tabellen mit aufzunehmen.

welcher Theil ferner zur Dampfbildung verbraucht wird; die Versuche geben aber durchaus keinen Aufschluss darüber, welche Wärmemenge schliesslich in einem Kilogramm Dampf von t^0 Temperatur und im gesättigten Zustand enthalten ist. Nach der mechanischen Wärmetheorie ist es, entgegengesetzt den bisherigen Annahmen, unmöglich, dass die Gesammtwärme λ nach der Bildung des Dampfes auch wirklich noch in demselben enthalten sein kann, da der Dampf in dem Cylinder, in welchem wir uns vorhin die zu verdampfende Flüssigkeit eingeschlossen dachten, sich Raum machte und zu diesem Zwecke den Kolben mit constantem Drucke p zurückschieben musste. »Der Dampf hat sonach während seiner Bildung im vorliegenden Falle Arbeit verrichtet, und dieser Arbeit entspricht eine gewisse Wärmemenge, die während des Vorganges verschwindet und auf deren Bestimmung es nun zunächst hier ankommt.«

Denken wir uns wieder die Gewichtseinheit Flüssigkeit habe die Temperatur 0^0 und das Volumen σ, sie sei unter dem Druck p in einem Gefässe eingeschlossen und soll nun unter constantem Drucke p in gesättigten Dampf von der Temperatur t und vom Drucke p verwandelt werden. Durch Wärmezuführung wird zunächst die Flüssigkeit bis t^0 erwärmt; da bis dorthin keine Verdampfung stattfindet und wir überdies das spezifische Volumen σ der Flüssigkeit als constant ansehen, so ist die äussere Arbeit Null. Wird nun aber die Wärmezuleitung weiter fortgesetzt und zwar so weit bis alle Flüssigkeit in gesättigten Dampf vom Drucke p übergegangen ist, so ist damit eine Volumenvergrösserung, also Arbeitsverrichtung verbunden: die ganze äussere Arbeit berechnet sich aber leicht nach der Formel:

$$L = \int p\,dv$$

Da nämlich p constant ist, das Anfangsvolumen σ beträgt, so findet sich leicht durch Integration, wenn wir noch das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes vom Drucke p mit s bezeichnen, die während der Dampfbildung verrichtete äussere Arbeit:

$$L = p\,(s - \sigma)$$

und hiernach ist die Wärmemenge, welche dieser Arbeit entspricht und bei diesem Prozesse verschwindet:

$$Ap(s-\sigma)$$

Wir wollen nun, wie Clausius es gethan hat, für die Differenz $s-\sigma$, die Differenz des spezifischen Volumens des Dampfes und desjenigen der Flüssigkeit, den Buchstaben u einführen, weil in den folgenden Gleichungen die beiden Werthe s und σ immer in der Verbindung $(s-\sigma)$ vorkommen; wir schreiben also für die Wärmemenge, welche in Arbeit verwandelt wird und verschwindet, wenn die Gewichtseinheit Flüssigkeit unter constantem Drucke in Dampf verwandelt wird, die Formel in der Gestalt:

$$Apu$$

Den Werth σ betrachten wir als constant, die Werthe s und u hingegen sind als Funktionen der Temperatur t oder des Druckes p anzusehen und als solche noch näher zu bestimmen.

Betrachten wir den Werth Apu als schon bekannt für jede Temperatur oder für jeden Druck, so ergeben sich zunächst folgende wichtigen Schlüsse.

Die ganze Wärmemenge, welche erforderlich ist um die Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° Temperatur unter constantem Drucke p in gesättigten Dampf zu verwandeln, nannten wir nach Regnault die Gesammtwärme und haben sie oben mit λ bezeichnet und sie für verschiedene Dampfarten nach Regnault als Funktion der Temperatur t gegeben.

Da nun aber bei der Dampfbildung in der vorgeschriebenen Art die Wärmemenge Apu verschwindet, so ist offenbar von der ganzen zugeführten Wärmemenge λ im Dampfe schliesslich nur noch die Wärmemenge $(\lambda - Apu)$ zurückgeblieben. Bezeichnen wir diesen Rest mit J, so folgt die Beziehung

$$J = \lambda - Apu \qquad (204)$$

Die Wärmemenge J nenne ich »die im Dampfe enthaltene Wärme« oder kurz die »Dampfwärme«, der Werth giebt an, wie viel Calorien Wärme in der Gewichtseinheit von gesättigten Dampf gewissen Druckes p mehr enthalten sind, als in der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° Temperatur.

Die latente Wärme oder Verdampfungswärme r ergab hingegen nach obiger Darstellung die Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit einer Flüssigkeit zugeführt werden muss, die schon die Temperatur t des zu bildenden Dampfes hat, unter der Voraussetzung, dass die Bildung des Dampfes bei constantem Drucke stattfindet. Subtrahirt man von dem Werthe r die in Arbeit verwandelte Wärme Apu, so ergiebt die Differenz, die mit ϱ bezeichnet werden mag, die Wärmemenge, die in der Gewichtseinheit Dampf von der Temperatur t mehr erhalten, als in der Gewichtseinheit Flüssigkeit von gleicher Temperatur. Den Werth

$$\varrho = r - Apu \tag{205}$$

nenne ich die »innere latente Wärme«, während der Wärmemenge Apu die Bezeichnung »äussere latente Wärme« beigelegt werden mag, weil beide zusammengenommen den Werth r geben, der in physikalischen Werken unter dem Namen »latente Wärme« aufgeführt wird.

Die beiden Grössen J und ϱ habe ich in die Wärmelehre eingeführt, nicht nur weil dadurch alle auf das Verhalten des Dampfes bezüglichen Rechnungen wesentlich vereinfacht werden, sondern weil dieselben eine allgemeinere Bedeutung haben, als die Grössen λ und r. Die Dampfwärme J und innere latente Wärme ϱ sind beide gänzlich unabhängig von der Art und Weise, wie der Dampf gebildet wurde, während man bei der Anwendung der Gesammtwärme λ und der Verdampfungswärme r stets im Auge behalten muss, dass sie voraussetzen, die Dampfbildung habe unter constantem Drucke stattgefunden.

Beide Grössen J und ϱ stehen übrigens in einfachem Zusammenhange. Nach Obigem war die Flüssigkeitswärme $q = \lambda - r$; die Subtraction der beiden Gleichungen (204) und (205) ergiebt daher auch

$$q = J - \varrho \tag{206}$$

Wenn wir von den drei Grössen J, ϱ und Apu nur eine näher als Funktion der Temperatur darstellen können, so sind damit nach vorstehenden Formeln, weil λ und r nach Regnault bekannt ist, auch die beiden andern Grössen bestimmt.

Mit Hülfe der Fundamentalgleichungen III der mechanischen

Wärmetheorie (S. 77) bestimmt sich nun aber leicht die äussere latente Wärme Apu.

Es befinde sich im Gefässe unter dem entsprechenden Drucke p die Gewichtseinheit einer Dampf- und Flüssigkeitsmischung; davon seien x Kilogr. dampfförmig und $(1-x)$ Kilogr. in tropfbar flüssigem Zustand. Die vorhin angegebene Bezeichnung beibehalten, giebt daher für das Volumen des Dampfes xs und für das Volumen der Flüssigkeit $(1-x)\sigma$, daher das spezifische Volumen v der Mischung

$$v = xs + (1-x)\sigma$$

oder

$$v = x(s-\sigma) + \sigma$$

und wenn man noch die Bezeichnung

$$s - \sigma = u \tag{207}$$

von oben benutzt:

$$v = xu + \sigma \tag{208}$$

Führt man der Mischung unter constantem Drucke also bei constanter Temperatur t die Wärmemenge dQ zu, so geht eine Flüssigkeitsmenge dx in Dampf über und es besteht, weil die Gewichtseinheit Flüssigkeit hierzu die Wärmemenge r bedarf, die Gleichung

$$dQ = r\,dx$$

oder wenn man Gl. (208) unter der Voraussetzung differentiirt, dass die Temperatur t, also auch u constant ist und wenn man aus der daraus hervorgehenden Beziehung:

$$dv = u\,dx$$

den Werth dx bestimmt und in vorstehende Gleichung für dQ substituirt:

$$dQ = \frac{r}{u}\,dv \tag{209}$$

Verwenden wir nun aber zur Beantwortung der gleichen Frage die Fundamentalgleichungen, die wir auf S. 77 unter III aufgestellt haben und von denen die erste und zweite folgendermassen geschrieben wurde:

$$dQ = A\,[X\,dp + Y\,dv]$$

$$dQ = \frac{A}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,[X\,dt + (a + t)\,dv]$$

so findet sich hier, weil während der Mittheilung der Wärmemenge dQ die Temperatur und der Druck constant, also $dp = 0$ und $dt = 0$ ist:

$$dQ = A\,Y\,dv \text{ oder } dQ = \frac{A\,(a + t)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv$$

Diese beiden Gleichungen und Gl. (209) sind identisch; durch Gleichsetzen erhält man daher folgende wichtigen Formeln:

$$A\,Y = \frac{r}{u} \tag{210}$$

$$\frac{r}{u} = \frac{A\,(a + t)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} \tag{211}$$

Die erste Gleichung lehrt uns jetzt die Bedeutung der Funktion Y bei Dampf- und Flüssigkeitsmischungen: die andere Gleichung giebt hingegen für gesättigten Dampf die Beziehung zwischen der Verdampfungswärme r, dem Drucke p, der Temperatur t und weil $u = s - \sigma$ ist, dem spezifischen Volumen des Dampfes und der Flüssigkeit.

Die letztere Gl. (211) schreibt sich etwas einfacher; zunächst können wir $a + t$ durch T ersetzen, da uns die Untersuchungen des Verhaltens der permanenten Gase gezeigt haben, dass $a + t$ nichts Anderes, als die absolute Temperatur ist, d. h. die Temperatur nach der hunderttheiligen Scala, aber gemessen von einem Nullpunkte aus, der um 273° unter dem Gefrierpunkte liegt. Der einfachern Schreibweise wegen haben wir schon bei Gasen, dem Gebrauche entsprechend, die Bezeichnung

$$T = a + t = 273 + t$$

eingeführt.

Ferner können wir, da bei gesättigten Dämpfen der Druck p nur eine Funktion der Temperatur t ist, setzen

$$\frac{1}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} = \frac{dp}{dt}$$

Wir erhalten daher statt Gl. (211)

$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt} \tag{212}$$

und in dieser Form soll sie bei den weitern Untersuchungen verwendet werden*).

---

*) Die im Texte gegebene Gleichung (212) bildet das wichtigste und hervorragendste Resultat, auf welches bis jetzt die mechanische Wärmetheorie, angewandt auf Dämpfe, geführt hat. Die Gleichung rührt von Clapeyron her (1834), welcher sie (unsere Beziehungsweise in dessen Formel benutzt) in folgender Form aufstellte:

$$\frac{r}{u} = C.\frac{dp}{dt} \tag{α}$$

in welcher Gleichung nach dessen Entwickelungen der Werth C eine für alle Körper gleiche Temperaturfunktion ist, die man später die Carnot'sche Funktion genannt hat. Die Form dieser Funktion C giebt Clapeyron nicht, wohl aber berechnet er ihren Werth für verschiedene Temperaturen mit Hülfe der vorstehenden Formel, indem er die damals bekannten Werthe der Verdampfungswerthe r einiger Dampfarten für deren Siedepunkt unter atmosphärischem Drucke und den aus den Spannungscurven abgeleiteten Werth $dp:dt$ benutzt und indem er überdies für u das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes substituirt, berechnet unter der Voraussetzung, dass die Dämpfe dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac, wie die Gase, unterworfen seien.

Später hat dann Helmholtz (1847) (S. oben Anmerkung S. 75) auch die Form dieser Funktion C erkannt und zwar auf folgendem Wege:

Clapeyron fand für permanente Gase (die in vorliegender Schrift eingeführte Bezeichnung benutzt) die Gleichung:

$$Yv - Xp = RC \tag{β}$$

während später (1845) Holtzmann auf ganz anderm Wege für Gase die Gleichung:

$$Yv - Xp = Apv \tag{γ}$$

aufstellte. Aus dem Vergleiche beider Formeln schloss nun Helmholtz auf die Beziehung:

$$RC = Apv$$

oder weil für permanente Gase $pv = R(a + t) = RT$ ist, auf die Beziehung:

$$C = AT \tag{δ}$$

Ersetzen wir die Verdampfungswärme r durch die innere und äussere latente Wärme, indem wir von Gl. (205) $r = \varrho + Apu$ Gebrauch machen, so ergiebt sich im Weitern auch folgende Beziehung, die wie das Folgende zeigen wird, ebenfalls eine wichtige Rolle spielt:

$$\frac{\varrho}{u} = A\left(T\frac{dp}{dt} - p\right) \tag{213}$$

Den beiden Werthen $r:u$ und $\varrho:u$ lässt sich eine besondere Bedeutung unterlegen: da nämlich in der Beziehung (207) $u = s - \sigma$ das Volumen σ der Gewichtseinheit Flüssigkeit immer sehr klein gegen das Volumen s der Gewichtseinheit des aus dieser Flüssigkeit hervorgehenden Dampfes ist, so kann man näherungsweise u durch s ersetzen. Da nun r die Verdampfungswärme und ϱ die innere latente Wärme der Gewichtseinheit Dampf bedeutet, so ist nahezu $r:u$ als die Verdampfungswärme und $\varrho:u$ als die innere latente Wärme der Volumeneinheit Dampf anzusehen.

Beide Werthe haben aber auch noch eine andere, für uns

Mit Hülfe dieser Gleichung, die Helmholtz nur in etwas anderer Form schreibt, berechnete derselbe C für die von Clapeyron angenommenen Temperaturen und findet vortreffliche Uebereinstimmung. Weiter verfolgte Helmholtz die Sache nicht und unterliess auch den gefundenen Werth von C in die Gleichung (α), die Clapeyron für Dämpfe gab, einzusetzen. Ein weiteres Verfolgen des von Clapeyron und Holtzmann eingeschlagenen Weges würde aber auch resultatlos geblieben sein; beide gehen nämlich von der Annahme aus, dass die Gleichung für die Wärmemenge dQ

$$dQ = X dp + Y dv$$

integrabel sei; eine Annahme, die später von Clausius (1850) (vergleiche oben S. 39) als unhaltbar nachgewiesen wurde. Aus den Untersuchungen von Clausius ging aber gleichzeitig hervor, dass die beiden Gleichungen von Clapeyron und Holtzmann (β und γ) durch die falsche Voraussetzung nicht berührt werden; die beiden Gleichungen bleiben als richtig bestehen und sind identisch mit der sogenannten zweiten Hauptgleichung (II. S. 77 des Textes); dieselbe in der Form geschrieben, wie sie sich für Gase gestaltet. Hiermit war dann auch die Richtigkeit oder besser die grosse Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit der von Helmholtz aufgestellten Beziehung (δ) nachgewiesen. Die Substitution des Werthes C in die Gleichung (α) liefert dann die Gl. (212) des Textes, die in der angegebenen Form zuerst von Clausius aufgestellt wurde.

wichtigere Bedeutung. In der allgemeinen Gl. (12) S. 39 für die der Gewichtseinheit eines Körpers mitzutheilende Wärme

$$dQ = A\,(X\,dp + Y\,dv)$$

und in der Gl. (3) S. 28 für die mit dieser Wärmemittheilung verbundene Zunahme dU der innern Arbeit

$$dU = X\,dp + Z\,dv$$

wurden oben die Werthe X, Y und Z als Funktionen des Druckes p und des spezifischen Volumens v hingestellt und überdies angegeben (Gl. 11), dass die Werthe Y und Z in der Beziehung $Z + p = Y$ stehen.

Nun hat uns aber die Ableitung der beiden Gleichungen (212) und (213) vorhin in Gl. (210) auf die Beziehung

$$A\,Y = \frac{r}{u}$$

geführt und wenn wir hier Y mit Hülfe vorstehender Gleichung durch Z ersetzen und $r = \varrho + A\,p\,u$ substituiren, so folgt im Weitern:

$$A\,Z = \frac{\varrho}{u} \tag{214}$$

Wir erkennen hiernach schon jetzt die Bedeutung der Werthe Y und Z der Hauptgleichungen, dieselben auf Dämpfe angewandt und ersehen schon, dass beide Grössen nur Funktionen des Druckes p (oder der Temperatur) also vom Volumen v unabhängig sind. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch für permanente Gase. Die Gl. (61) S. 115 und (62) S. 116 führen auf die Beziehungen:

$$A\,Y = \frac{c_p}{R}\,p \quad \text{und} \quad A\,Z = \frac{c_v}{R}\,p$$

Es sind also bei permanenten Gasen, weil für diese R, c_p und c_v constant sind, die Werthe Y und Z ebenfalls unabhängig vom Volumen v, überdies aber dem Drucke p direct proportional. Die Division giebt:

$$\frac{Y}{Z} = \frac{c_p}{c_v} = \varkappa$$

welcher Werth bei Gasen ebenfalls constant ist. Wollten wir die Annahme machen, dass die letztere Beziehung auch bei gesättigten Dämpfen gültig sei, dass diese sich also wie ein vollkommenes Gas verhalten, so wäre

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{r}{u}}{\frac{\varrho}{u}} = \varkappa$$

wobei $\varkappa$ irgend eine constante Grösse bedeutet.

Benutzen wir hier die Gln. (212) und (213), so würde sich ergeben

$$T\frac{dp}{p\,dt} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$$

und hieraus sogar, da $\varkappa$ constant sein soll, sehr leicht durch Integration die Beziehung zwischen Druck und Temperatur der gesättigten Dämpfe sich ermitteln lassen. Die vorstehende Beziehung wird aber von keiner Dampfart befolgt und sonach sind auch die Annahmen, auf denen sie basirt, zu verwerfen.

In den angehängten Tabellen (a) findet sich für die verschiedenen Dämpfe der Werth $Tdp : pdt$ berechnet und in Col. 6 jeder Tabelle für verschiedene Temperaturen angegeben. Ich hatte einfach die Werthe $dp : pdt$ (Col. 5) deren Entstehung oben (S. 257) angegeben wurde mit der absoluten Temperatur (Col. 2) zu multipliciren. Ein Blick auf die in Col. 6 der 9 ersten Tabellen (a) angegebenen Werthe zeigt nun, dass dieselben nicht nur bei der gleichen Dampfart zweifellos mit zunehmender Temperatur abnehmen, sondern auch bei verschiedenen Dämpfen bei gleicher Temperatur verschieden ausfallen. Wir werden übrigens auf die Betrachtung dieser Werthe zurückkommen, da denselben noch eine andere Bedeutung untergelegt werden kann.

Die sämmtlichen Tabellen 1 a bis 9 enthalten nun im Weitern in Columne 7 und 8 die Werthe von $r : u$ und $\varrho : u$ angegeben, berechnet nach Gl. (212) und (213), wozu die Columnen 2 und 4 die erforderlichen Grundlagen lieferten.

Man erkennt zunächst aus den Tabellen, dass die Werthe $r : u$ und $\varrho : u$ für ein und denselben Dampf rasch mit der Temperatur t zunehmen und zwar in ähnlichem Verhältniss wie der Druck p. Der innere Zusammenhang dieser Werthe für

verschiedene Dämpfe, bei gleichen Temperaturen genommen, ist aber nicht zu erkennen; das einzige Resultat, auf welches die Tabellen direct führen, ist, dass die genannten Werthe für verschiedene Dämpfe, bei gleichem Drucke p genommen, nahezu gleich sind.

So ist z. B. für Wasserdämpfe (Tab. 1a) für $p = 354{,}62$ Millim. $r : u = 162{,}96$; während für Alkoholdämpfe (Tab. 3a) für $p = 350{,}21^{mm}$ sich $r : u = 168{,}26$ herausstellt; ebenso stellen sich bei gleichem Drucke auch die Werthe $\varrho : u$ und von $Tdp : pdt$ als nahezu gleich heraus, wie das aber wegen der Beziehung dieser Grössen zu dem Werthe $r : u$ nach obigen Gleichungen erklärlich ist. Wäre die angedeutete Beziehung genau richtig, so müsste man den Werth $r : u$ als eine für alle Dämpfe gleiche Funktion des Druckes p ansehen; alle gesättigten Dämpfe wären dann einer Gleichung von der Form $r : u = F(p)$ gleichzeitig unterworfen. Eine genauere Prüfung bestätigt aber dieses Gesetz nicht. In den meisten Lehrbüchern der Physik macht man auf diesen, zuerst von Despretz angegebenen Satz aufmerksam und spricht ihn dahin aus, »es verhalte sich bei gleichem Drucke der Werth der Verdampfungswärme umgekehrt, wie die Dichtigkeit der Dämpfe«, welche Annahme mit den Angaben der Formel $r : u = F(p)$ übereinstimmt, denn ersetzt man näherungsweise den Werth u durch das spezifische Volumen s des Dampfes und beachtet man, dass dieses zu der Dichtigkeit γ (Gewicht der Volumeneinheit) in der Beziehung $s = 1 . \gamma$ steht, so würde sich die Formel schreiben: $r\gamma = F(p)$ und diese Formel den Despretz'schen Satz aussprechen. Wie schon erwähnt, wird aber der Satz, wenn man die neuesten Versuche von Regnault bei den Rechnungen zu Grunde legt, keineswegs bestätigt, wie folgende Uebersicht zeigt:

Gesättigte Dämpfe	Werthe von $r:u$ berechnet nach Gleichung (212) für die Dampfspannung von:		
von	1 Atmosphäre	5 Atmosphären	10 Atmosphären
Wasser	325.23	1375.0	2534.9
Aether	267.88	1094.6	2036.1
Alkohol.	340.71	1407.9	2518.7
Aceton	275.47	1127.3	2012.7
Chloroform.	270.00	1085.5	1917.4
Chlorkohlenstoff . . .	257.66	1042.9	—
Schwefelkohlenstoff . .	252.82	1033.3	1854.2
Quecksilber	282.16	1225.9	2250.5

Die Werthe derselben Verticalcolumne sind hiernach schon so verschieden, dass man die Abweichungen durchaus nicht Beobachtungsfehlern zuschreiben kann und man schliessen muss, dass der Satz von Despretz nur angenähert durch die Regnault'schen Beobachtungen und die Formeln der mechanischen Wärmetheorie bestätigt wird. Immerhin rücken die einzelnen Zahlenwerthe einander nahe genug, so dass sich wenigstens sagen lässt, dass bei den verschiedenen Dampfarten die Verdampfungswärme der Volumeneinheit Dampf bei gleichem Drucke nahezu gleich gross ist. Das Gleiche gilt auch für die innere latente Wärme der Volumeneinheit Dampf, da diese von der Verdampfungswärme nur um den Werth Ap verschieden ist. Ich schliesse im Weitern daraus, dass die Arbeit, welche zur Ueberwindung derjenigen Kräfte verbraucht wird, mit welcher die Flüssigkeitstheilchen auf einander wirken, bei der Bildung der Volumeneinheit Dampf bei gleichem Drucke bei allen Flüssigkeiten nahezu gleich ist.

Die Gl. (212) giebt aber nun im Weitern noch zu Untersuchungen Anlass, die für unsere Zwecke von weit grösserer Wichtigkeit sind.

Dividirt man Gl. (212) auf beiden Seiten mit Ap, so folgt:

$$\frac{r}{Apu} = T . \frac{dp}{pdt} \tag{215}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber der gleiche, auf den wir oben schon gelangt sind und dessen Werthe in Col. 6 der Tabellen 1a bis 7a, sowie 8 und 9 für die verschiedenen Dämpfe angegeben sind. Der Ausdruck giebt also auch nach vorstehender Gleichung das Verhältniss der Verdampfungswärme r der Gewichtseinheit Dampf zur äussern latenten Wärme Apu, d. h. zu der Wärmemenge, welche bei der Dampfbildung unter constantem Druck in äussere Arbeit verwandelt wird. Den reciproken Werth habe ich in den Tabellen mit φ bezeichnet und in der Col. 9 die Werthe

$$\varphi = \frac{Apu}{r} \tag{216}$$

ebenfalls angegeben.

Man erkennt aus dem bis jetzt Vorgeführten, dass alle Werthe der Tabellen 1*a* bis 7*a* und der Tabellen 8 und 9 sich allein aus den Spannungsgesetzen berechnen lassen; man kann daher leicht auch für die übrigen, hier nicht angeführten Dämpfe, für welche Regnault das Spannungsgesetz aufgestellt hat, die wichtigen Grössen $r:u$; $\varrho:u$ und $Apu:r$ ermitteln. Damit ist jedoch nicht viel gewonnen, da die Anwendung der Versuchsresultate bei unsern Untersuchungen nicht allein die Kenntniss der vorstehenden Verhältnisswerthe, sondern auch die der Werthe ϱ und Apu, sowie des Werthes von u verlangt.

Diese Grössen lassen sich aber nur für solche Dämpfe ermitteln, für welche der Werth der Verdampfungswärme r bekannt ist, und das ist denn nur bei denjenigen Dämpfen der Fall, die auf S. 267 aufgeführt sind, mit Einschluss der Alkoholdämpfe. Für die verschiedenen Dampfarten finden sich in der zweiten Hälfte (*b*) der Tabellen 1 bis 7 die Resultate der angezeigten Rechnungen aufgeführt.

Die Columnen 2, 3 und 4 geben, wie schon oben hervorgehoben wurde, für den betreffenden gesättigten Dampf bei verschiedenen Temperaturen die Gesammtwärme λ, die Flüssigkeitswärme q und die Verdampfungswärme r. In Columne 5 sind nun zunächst die Werthe der äussern latenten Wärme Apu aufgeführt, berechnet auf Grund der Gl. (216) nach dem Ausdrucke:

$$Apu = \varphi r$$

wobei die Grösse φ der Col. 9 der ersten Hälfte der Tabellen entnommen wurde.

Die Subtraction des Werthes Apu von der Gesammtwärme λ ergab dann nach Gl. (204) die Dampfwärme J (Col. 6) und die Subtraction des gleichen Werthes von der Verdampfungswärme r nach Gl. (205) die innere latente Wärme ϱ (Col. 7).

Endlich ergab noch die Benutzung des Ausdruckes

$$u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$$

die Werthe von u (Col. 8), auf deren nähere Betrachtung wir später zurückkommen werden. Die Grössen $r : u$ wurden dabei der Col. 7 der ersten Hälfte der Tabellen entnommen.

Die weitern Untersuchungen erfordern nun aber die Aufstellung von neuen Gleichungen, welche die Beziehung zwischen den Werthen ϱ, Apu und J und der Temperatur t geben; es wäre viel zu umständlich, für jeden einzelnen Spezialfall die angegebenen Werthe für gegebene Temperaturen in der Art zu berechnen, wie es mit den Tabellenwerthen geschehen ist. Innerhalb der in den Tabellen angenommenen Temperaturgrenzen lassen sich aber leicht empirische Formeln aufstellen, welche die Tabellenwerthe genau genug wiedergeben. Es bedarf nur der Aufstellung der Gleichungen für eine der drei Wärmemengen ϱ, J und Apu; durch Hinzuziehung der Formeln, welche Regnault für die Wärmemengen λ, r und q gegeben hat, finden sich dann leicht die Formeln für die beiden andern. Die innere latente Wärme ϱ ist derjenige Werth, der bei den später folgenden Problemen am häufigsten gebraucht wird; ich habe daher für die verschiedenen Dämpfe, die auf Grund der angehängten Tabellen eine solche Bestimmung zuliessen, für ϱ die empirischen Formeln gebildet, welche in der ersten Columne der folgenden Zusammenstellung angegeben sind. Bei den angeführten Dämpfen (mit Ausnahme der Wasserdämpfe) sind bei Bestimmung der Constanten diejenigen Werthe von ϱ der Tabellen benutzt worden, welche den Temperaturen 10°, 60° und 110° entsprechen. Nur für Alkoholdämpfe wurde die Aufstellung einer Formel unter-

Gesättigte Dämpfe von	Innere latente Wärme ϱ
Wasser	$\varrho = 575.40 - 0.791\ t$
Aether	$= 86.54 - 0.10648\ t - 0.0007160\ t^2$
Aceton	$= 131.63 - 0.20184\ t - 0.0006280\ t^2$
Chloroform	$= 62.44 - 0.11282\ t - 0.0000140\ t^2$
Chlorkohlenstoff . .	$= 48.57 - 0.06844\ t - 0.0002080\ t^2$
Schwefelkohlenstoff .	$= 82.79 - 0.11446\ t - 0.0004020\ t^2$

lassen, aus dem gleichen Grunde, der Regnault veranlasste, für dieselben Dämpfe keine Formel für die Gesammtwärme λ zu geben (S. 268).

Subtrahirt man die hier für ϱ hingestellten Gleichungen von den entsprechenden Gleichungen, welche Regnault für die Verdampfungswärme r (S. 267) angiebt, so ergeben sich die Formeln, welche in der zweiten Columne der vorstehenden Zusammenstellung für die äussere latente Wärme Apu aufgeführt sind. Die Formeln sind hier mit angegeben, weil wir in der Folge einige Male in die Lage kommen, direct für eine gewisse Temperatur t den Werth Apu anzugeben.

Ebenso leicht wäre es nun auch, empirische Formeln für die Dampfwärme J aufzustellen: wir hätten auf Grund der Gl. (206) S. 271 zu den Ausdrücken für ϱ nur die entsprechenden Regnault-schen Formeln für die Flüssigkeitswärme q (S. 262) zu addiren. Ich unterlasse die Angabe der hieraus entspringenden Formeln, da die angegebene Vereinigung für jeden einzelnen Fall leicht bewerkstelligt werden kann und weil in der Folge die Werthe der Dampfwärme J nur ausnahmsweise gebraucht werden.

Die für ϱ angegebenen Formeln führen, wie man sich leicht überzeugen kann, fast genau auf die Werthe der Tabellen, die wir direct, aber auf grossen Umwegen gefunden haben. Am besten stimmt aber die Formel für ϱ bei der wichtigsten Dampfart, nämlich beim Wasserdampfe, und hier tritt noch der ausserordentlich günstige Umstand hinzu, dass die Formel einfacher gebaut ist, als bei den übrigen Dampfarten. Die Formel zeigt, dass die innere latente Wärme ϱ bei Wasserdämpfen ganz gleich-

Aeussere latente Wärme $Apu = r - \varrho$
$s = 31.10 + 0.096\ t \quad - 0.000\,02\ t^2 - 0.000\,000\,3\ t^3$
$= 7.46 + 0.02747\ t - 0.000\,1354\ t^2$
$= 8.87 + 0.06185\ t - 0.000\,2845\ t^2$
$= 4.56 + 0.01797\ t - 0.000\,0367\ t^2$
$= 3.43 + 0.01671\ t - 0.000\,0546\ t^2$
$= 7.21 + 0.02524\ t - 0.000\,0918\ t^2$

mässig mit wachsender Temperatur abnimmt, und die Richtigkeit dieses Resultates beweist auch der Umstand, dass die Differenzen der Werthe von ϱ der 7. Columne der Tabelle 1b zwischen den weiten Temperaturgrenzen 0° und 200° fast genau gleich sind. Das Resultat ist überraschend, wenn man bedenkt, durch welche verschiedenartigen Versuche und durch welche umfänglichen Rechnungen wir auf die Werthe der innern latenten Wärme der Wasserdämpfe gelangt sind.

Viel weniger einfach gestaltet sich bei Wasserdämpfen die Formel für die äussere latente Wärme. Wir werden sie aber auch in der Folge nicht in der Gestalt verwenden, wie sie in vorstehender Zusammenstellung angegeben ist. Auf eine einfachere Form gelangt man auf folgendem Wege:

Die Verdampfungswärme r war allgemein:

$$r = \lambda - q$$

und daher folgt die äussere latente Wärme nach obigen Angaben:

$$Apu = \lambda - q - \varrho$$

Ersetzt man hier die Gesammtwärme λ durch die Regnault-sche Formel (S. 266):

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\ t$$

und den Werth der innern latenten Wärme durch unsere Formel

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791\ t \qquad (217)$$

so folgt für Wasserdampf:

$$Apu = 31,10 + 1,096\, t - q \tag{218}$$

wobei für q die Flüssigkeitswärme des Wassers nach Gl. (190) S. 262 zu substituiren ist.

Die Werthe, auf welche diese Formel führt, stimmen fast mathematisch genau mit den Werthen, welche für Wasserdampf auf Tab. 1b Col. 7 gegeben worden sind*). Die vorstehenden

*) Wie schon früher bemerkt wurde, sind sämmtliche Tabellen des Anhanges neu berechnet. Die erste Auflage dieses Buches enthält nur drei auf Wasserdämpfe bezügliche Tabellen. Da diese ältern Tabellen sowohl, als eine Tabelle, welche ich zuerst in der Schweiz. polyt. Zeitschrift B. VIII veröffentlichte und die der Anordnung nach mit der hier gegebenen Tabelle 10 übereinstimmt, in viele Bücher und Zeitschriften übergegangen sind, so ist es zweckmässig, hier auf den Unterschied der neuern und ältern Tafeln hinzuweisen. Zwei Tabellen der ersten Auflage sind der Anordnung nach mit Tab. 1a und 1b identisch; es ist aber dort der Differentialquotient $dp : dt$ nicht, wie hier, durch Differentiation der Regnault'schen Formel für p gefunden worden, sondern es wurden die Näherungswerthe benutzt, welche Clausius gegeben hat (Abhandlungen V, S. 230). Ferner wurde zur Berechnung der Verdampfungswärme r dort eine Näherungsformel verwendet, welche Clausius vorgeschlagen hat und welche lautet:

$$r = 607 - 0,708\, t$$

während ich hier wieder zu der genauen Formel von Regnault zurückgegangen bin; ich habe mich später überzeugt, dass die Näherungsformel von Clausius für vorliegende Zwecke nicht genau genug ist. Am besten tritt das durch die Differenzen der Werthe von ϱ (Col. 7, Tab. 1b) hervor, die jetzt als vollkommen gleich hervortreten, während das in den ältern Tabellen keineswegs der Fall war. Ferner würde die Verbindung der Formel von Clausius mit der genauen Formel für ϱ, wie sie sich jetzt ergeben hat, zu der Beziehung

$$Apu = r - \varrho = 31,6 + 0,083\, t$$

führen, welche Werthe ergiebt, die entschieden zu stark von denen der Col. 5, Tab. 1b abweichen. Auf Grund der ältern Tabellen ergaben sich mir die empirischen Formeln

$$\varrho = 575,03 - 0,7882\, t$$

und

$$Apu = B \log \frac{T}{n}$$

wobei $B = 30,456$ und $n = 100$ gesetzt wurde. Die erstere Formel stellte ich als nur für mittlere Temperaturen geltend hin, während sich jetzt findet, dass sie mit geringer Aenderung der Constanten die Werthe der neuen Tabellen genau wiedergiebt. Ich habe daher die ältern empirischen Formeln verlassen, überhaupt die Anzahl solcher Formeln im vorliegenden Werke möglichst reducirt und neben den Formeln, welche Regnault giebt, nur neue For-

Formeln sind es nun auch, die bei Berechnung der Haupttabelle für Wasserdämpfe No. 10 des Anhanges benutzt worden sind. Col. 6 enthält die Werthe der innern und Col. 7 die der äussern latenten Wärme für Wasserdämpfe für die in der ersten Columne angegebenen Dampfspannungen. Bei Berechnung der Werthe von Apu wurden in Gl. (218) die Werthe der Flüssigkeitswärme q benutzt, welche Col. 5 enthält. Die Division der Werthe Apu durch Ap führte dann auf die Grösse u (Col. 8), und dann ergaben sich wieder leicht durch Division der entsprechenden Werthe die Grössen $\varrho : u$, deren Bedeutung oben dargelegt wurde und von denen man bei speziellen Problemen häufig Gebrauch zu machen hat. Die Differenzen in Col. 10 deuten, da sie nur langsam mit wachsendem Druck abnehmen, darauf hin, dass die Werthe $\varrho : u$ nahezu gleichmässig mit dem Dampfdrucke wachsen.

Nach der Gleichung $r = \varrho + Apu$ lässt sich dann nach der Tabelle auch die Verdampfungswärme r bestimmen, und wenn man dann zu r den Werth q addirt, findet sich die Gesammtwärme λ. Man kann sich leicht überzeugen, dass die so erhaltenen Werthe von r und λ vollständig mit denen übereinstimmen, auf welche die empirischen Formeln von Regnault führen. Endlich führt die Tabelle auch auf die Werthe der Dampfwärme J; man hat [vergl. Gl. (206), S. 271] einfach nur die entsprechenden Werthe von q und ϱ zu addiren.

Von der Dichtigkeit und dem spezifischen Gewicht der gesättigten Dämpfe.

Man hat früher allgemein, und von einzelnen Schriftstellern geschieht es noch, die Annahme gemacht, dass sich die Dämpfe im gesättigten Zustande genau wie permanente Gase verhalten, d. h. dass sie hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen Druck,

---

meln zur Berechnung der innern latenten Wärme ϱ aufgestellt, weil sich das als nothwendig, aber auch als genügend herausstellte.

Uebrigens ist doch hervorzuheben, dass die Werthe der ältern Tabellen von denen der neuen keineswegs so stark abweichen, dass man sie nicht mehr verwenden dürfte.

spezifischem Volumen und Temperatur genau das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac befolgen. Es wurde aber schon oben darauf hingewiesen, dass die Regnault'schen Versuche diese Annahme selbst für Gase nur als annähernd richtig erweisen, und dass die Dämpfe um so mehr in ihrem Verhalten von dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze abweichen, je näher sie ihrem Condensationspunkte kommen; die gesättigten Dämpfe müssten daher die stärksten Abweichungen zeigen.

Clausius hat in seiner ersten Abhandlung (1850) zuerst auf diesen Umstand aufmerksam gemacht, und aus den Formeln der mechanischen Wärmetheorie speziell für Wasserdämpfe den Grad der Abweichungen ermittelt.

Würden die Dämpfe sich wirklich dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac fügen, so bestände für dieselben die Gleichung:

$$pv = R(a + t)$$

wobei R eine Constante wäre, die für jeden einzelnen Dampf besonders bestimmt werden müsste, und zwar in der Art, wie es auf S. 105 für verschiedene permanente Gase geschehen ist; man hätte nämlich einfach nur den Werth von R für atmosphärische Luft, nämlich 29,272 zu dividiren durch das spezifische Gewicht ε des betreffenden Dampfes in Hinsicht der Luft. So hat man z. B. für Wasserdampf nach Gay-Lussac das spezifische Gewicht zu 0,6225 angenommen; man würde daher für diesen Dampf erhalten $R = 47{,}023$ und könnte dann aus vorstehender Gleichung das spezifische Volumen v, welches wir oben für reine gesättigte Dämpfe (ohne Beimischung von Flüssigkeit) mit s bezeichnet haben, berechnen. Umgekehrt fände sich dann die Dichtigkeit γ (Gewicht der Cubikeinheit)

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{s}$$

Auf diese Weise sind denn auch für Wasserdampf die Werthe von s und γ in den ältern Tabellen für verschiedene Dampfspannungen berechnet worden, und Navier zeigte dann auf Grund dieser Rechnungsresultate, dass man für Wasserdämpfe genau genug die Dichtigkeit γ einfach aus dem Dampfdrucke nach der Formel

$$\gamma = \alpha + \beta p$$

berechnen könne, in welcher Formel die Grössen α und β zwischen ziemlich weiten Spannungsgrenzen als constant anzusehen seien. Es ist bekannt, dass Pambour von dieser Formel in seiner Dampfmaschinentheorie ausgedehnten Gebrauch gemacht hat.

Wie schon erwähnt wurde, bestätigt aber die mechanische Wärmetheorie diese Sätze keineswegs. Wäre diese Annahme richtig, so wäre, weil in der Formel $ps = R\,(a + t)$ für die verschiedenen Dämpfe der Werth s durch $u = s - \sigma$ ersetzt werden kann

$$Apu = AR\,(a + t)$$

denn das specifische Volumen σ der Flüssigkeiten ist gegen das spezifische Volumen s der verschiedenen Dämpfe sehr klein und daher bei Näherungsrechnungen zu vernachlässigen.

Hiernach müsste also die äussere latente Wärme Apu bei den gesättigten Dämpfen gleichmässig mit der Temperatur wachsen, was aber weder durch die empirischen Formeln auf S. 283, noch durch die Tabellen bestätigt wird, denn die Differenzen der Werthe der Columnen 5 aller Tabellen 1b bis 7b stellen sich keineswegs, wie es sein müsste, gleich heraus.

Es bleibt daher zur Bestimmung der angegebenen Werthe kein anderer Weg, als die Formeln der mechanischen Wärmetheorie zu verwenden und das unterliegt keinen Schwierigkeiten.

Für verschiedene Dampfarten sind nach Obigem für jede Temperatur und jeden Druck die Werthe von Apu bekannt, dividirt man daher diese Werthe durch den zugehörigen Werth Ap, so ergiebt sich die Grösse u. Auf diese Weise sind die Werthe u in Col. 8 Tab. 10 für Wasserdampf bestimmt; in den übrigen Tabellen 1b bis 7b ist u in der letzten Columne aufgeführt, hier aber auf einem andern, oben angegebenen Wege (S. 281), ermittelt worden.

Ist u bekannt, so bestimmt sich auf Grund unserer Beziehung $u = s - \sigma$ leicht das spezifische Volumen s von reinem gesättigten Dampf, wenn man zu u das spezifische Volumen σ der Flüssigkeit, aus der der Dampf hervorging, addirt. Für Wasser ist bekanntlich $\sigma = 0{,}0010$ Cubikmeter, und diese Grösse nehmen wir, wie früher erwähnt wurde, bis auf Weiteres constant an. Für eine andere Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht in Hinsicht des Wassers mit ε_1 bezeichnet wird, findet sich dann das entsprechende spezifische Volumen

$$\sigma = \frac{0,0010}{\varepsilon_1}$$

Für diejenigen Flüssigkeiten, deren Dämpfe wir näherer Untersuchung unterworfen haben, sind aber die spezifischen Gewichte nach Pierre, Gay-Lussac, Kopp, Regnault u. A. bekannt und führen nach vorstehender Formel auf folgende Werthe von σ: Aether (0,0013), Alkohol (0,0013), Aceton (0,0012), Chloroform (0,0006), Chlorkohlenstoff (0,0006), Schwefelkohlenstoff (0,0008).

Ist auf dem angegebenen Wege für eine bestimmte Temperatur bei einem gewissen Dampfe das spezifische Volumen s berechnet, so findet sich dann das Gewicht der Volumeneinheit (ein Cubikmeter), d. h. die Dichtigkeit γ aus der Formel:

$$\gamma = \frac{1}{s} = \frac{1}{u + \sigma}$$

Für Wasserdämpfe finden sich die Werthe von γ in Col. 11, Tab. 10 aufgeführt, und Col. 12 enthält ihre Differenzen für gleiche Spannungszunahmen. Man sieht, dass diese Differenzen mit wachsendem Drucke abnehmen, also keineswegs constant sind, wie es nach der empirischen Formel von Navier, die oben erwähnt wurde, erwartet werden müsste.

Um übrigens zu zeigen, wie sich diese nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorien berechneten Werthe der Dichtigkeit γ des Wasserdampfes zu den Werthen verhalten, die man bisher dafür angenommen hat, ist folgende kleine Tafel berechnet worden.

1 Druck des gesättigten Wasserdampfes in Atmosphären.	2 Dichtigkeit γ nach Tab. 10.	3 Spezif. Gewicht ε in Hinsicht der Luft.	4 Dichtigkeit γ nach der ältern Berechnungsweise.
0.1	0.0687	0.621	0.0688
0.5	0.3153	0.633	0.3098
1	0.6059	0.640	0.5892
2	1.1631	0.648	1.1167
5	2.7500	0.662	2.5841
10	5.2703	0.676	4.8479

Die zweite Columne enthält die Werthe der Dichtigkeit γ für die verschiedenen in der ersten Columne angegebenen Spannungen, entnommen der Col. 11 der Tab. 10. Col. 3 giebt das spezifische Gewicht ε des Dampfes in Hinsicht der atmosphärischen Luft für gleiche Temperatur und gleichen Druck. Die Gl. (57) S. 104 giebt nämlich für atmosphärische Luft die Dichtigkeit, die mit γ_1 bezeichnet werden mag:

$$\gamma_1 = \frac{p}{R\,(273 + t)}$$

Dividirt man mit diesem Werthe, indem man $R = 29{,}272$ setzt, in die Werthe γ der Col. 2, so ergiebt sich das verlangte spezifische Gewicht ε; multiplizirt man hingegen den vorstehenden Ausdruck mit 0,6225, dem von Gay-Lussac angegebenen spezifischen Gewicht des Wasserdampfes, so folgen die Werthe der Dichtigkeit γ der Col. 4, d. h. die Werthe, die man bisher für γ angegeben hat.

Col. 3 zeigt, dass das spezifische Gewicht des Wasserdampfes keine constante Grösse ist, sondern dass dasselbe ziemlich stark mit dem Drucke wächst. Nur bei kleinem Drucke näherten sich die Werthe dem von Gay-Lussac angegebenen Werthe von 0,6225; man schliesst daraus, dass sich die gesättigten Wasserdämpfe nur bei sehr geringer Temperatur und sehr kleiner Spannung in ihrem Verhalten dem der permanenten Gase nähern, dass aber bei hohem Druck, bei Spannungen, wie sie in Dampfkesseln vorkommen, schon sehr beträchtliche Abweichungen auftreten. Auf das hier angeführte Verhalten der Wasserdämpfe hat Clausius schon in seiner ersten Abhandlung aufmerksam gemacht; eine nähere Prüfung der andern Dampfarten, wozu die angehängten Tabellen die Grundlagen liefern, ergiebt im Weitern, dass diese Dämpfe ein ähnliches Verhalten zeigen.

Die Col. 4 obiger Zusammenstellung giebt die Dichtigkeit γ nach der ältern Berechnungsweise; ein Vergleich mit den Werthen der Col. 2 zeigt wieder, dass die Abweichungen mit wachsendem Drucke zunehmen, und dass sie schon bei gewöhnlichen Dampfspannungen so beträchtlich sind, dass man selbst bei technischen Rechnungen von dem Gebrauche der ältern Tabellen absehen sollte.

Dass übrigens die ältere Bestimmungsweise wirklich auf unrichtige Werthe für γ führt, ist in neuerer Zeit durch die Ver-

suche von Tate und Fairbairn ausser Zweifel gesetzt worden. Die Resultate dieser Versuche *) ergaben ebenfalls eine raschere Zunahme der Dichtigkeit des Wasserdampfes mit dem Drucke, als dies nach der ältern Annahme zu erwarten war, und wenn man die eben gegebenen Formeln auf Berechnung dieser Versuche anwendet, so zeigt sich eine vollständig befriedigende Uebereinstimmung mit den Resultaten der Versuche.

Um noch zu zeigen, wie sich die verschiedenen Dämpfe bei der gewöhnlichen Siedetemperatur (Verdampfen unter atmosphärischem Drucke) verhalten, mag die folgende Zusammenstellung von Rechnungsresultaten gegeben werden. Bei der Berechnung sind die Werthe der Dampftemperatur bei atmosphärischem Drucke der ersten Zeile der Zusammenstellung auf S. 254 entnommen. Die Werthe der äussern latenten Wärme Apu sind nach den empirischen Formeln auf S. 283 berechnet, mit Ausnahme des Werthes für Alkoholdämpfe, der aus Tab. 3 b durch Interpolation gefunden wurde.

Gesättigte Dämpfe von	Werthe von: Apu	Werthe von: u	Dichtigkeit $\gamma = \frac{1}{u + \sigma}$	Spezifisches Gewicht ε in Hinsicht der Luft
	(Für den Druck von einer Atmosphäre.)			
Wasser	40.20	1.6494	0.606	0.640
Aether	8.25	0.3385	2.943	2.567
Alkohol	15.33	0.6290	1.586	1.578
Aceton	11.45	0.4698	2.123	1.980
Chloroform . . .	5.51	0.2261	4.411	4.163
Chlorkohlenstoff .	4.39	0.1801	5.534	5.479
Schwefelkohlenstoff	8.18	0.3356	2.973	2.688

Einzelne der Werthe der letzten beiden Columnen sind durch Versuche bestimmt, so giebt z. B. Gay-Lussac das spezifische Gewicht in Hinsicht der Luft für Wasserdampf 0,622: für

*) Proc. of the Royal Soc. 1860. — Phil. Mag. 4th Ser. Vol. XXI. — Civil-Engineer. 1860. — Civilingenieur. Literatur- und Notizblatt. B. 6. S. 31.

Aetherdampf 2,586, für Alkoholdampf 1,613; die Abweichungen dieser Werthe von denen der vorstehenden Zusammenstellung erklären sich durch das, was schon oben über das spezifische Gewicht der Wasserdämpfe gesagt wurde. Unsere Werthe beziehen sich auf gesättigte Dämpfe bei atmosphärischem Drucke; bei den Versuchen aber waren die Dämpfe wohl in einem andern Zustande (überhitzt). Die bis jetzt angestellten Versuche sind übrigens keineswegs als sehr zuverlässig anzusehen.

Das spezifische Gewicht, welches die Chemiker für die hier angeführten Dämpfe aus dem Aequivalentgewicht und Aequivalentvolumen berechnen, stimmt nahezu mit den obigen Werthen überein; man findet unter Annahme des in der Chemie adoptirten Gesetzes, »dass die spezifischen Gewichte zweier Stoffe sich wie ihre Aequivalentgewichte verhalten,« folgende Werthe für das spezifische Gewicht in Hinsicht der Luft für Dämpfe von:

Wasser ($H_2\ O_2$) 0,623, Aether ($C_8\ H_{10}\ O_2$) 2,562
Alkohol ($C_4\ H_6\ O_2$) 1,593, Aceton ($C_6\ H_6\ O_2$) 2,008
Chloroform ($C_2\ H\ Cl_3$) 4,138, Chlorkohlenstoff ($C_2\ Cl_4$) 5,332
Schwefelkohlenstoff ($C_2\ S_1$) 2,631.

Die hier angegebenen Werthe gelten ohne Zweifel nur für Dämpfe im überhitzten Zustande, d. h. für Dämpfe, die weit vom Condensationspunkte entfernt liegen, in ihrem Verhalten also dem der permanenten Gase nahe kommen, während die vorhin gegebenen Werthe für gesättigte Dämpfe gültig sind und zwar für Dämpfe von atmosphärischem Drucke.

Immerhin sind die Differenzen nicht sehr bedeutend, so dass man für solche Dämpfe, für welche keine Beobachtungen über die Verdampfungswärme r vorliegen, diesen Werth, sowie die innere und äussere latente Wärme, ϱ und Apu, näherungsweise bestimmen kann.

So findet sich z. B. für Kohlensäuredämpfe, aus deren chemischer Zusammensetzung das spezifische Gewicht in Hinsicht der Luft $\varepsilon = 1{,}524$. Bei 0° C ist der Druck der Kohlensäure (Tab. 9) 26906,6 Millimeter Quecksilbersäule oder 35,403 Atmosphären; bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur ist aber die Dichtigkeit γ der Luft 45,782; hieraus folgt die Dichtigkeit des Kohlensäuredampfes bei 0° C $\varepsilon\gamma = 69{,}772$ und daher das spezifische Volumen desselben

$$v = \frac{1}{\varepsilon \gamma} = 0{,}0143$$

Das spezifische Gewicht der flüssigen Kohlensäure wird aber bei 0° C zu 0,83 angenommen, daher würde ihr spezifisches Volumen $\sigma = 0{,}0012$ sein und hiernach der Werth

$$u = v - \sigma = 0{,}0131$$

gültig für Kohlensäuredämpfe bei 0° C; nun ist aber nach Tab. 9 für die gleiche Temperatur

$$\frac{r}{u} = 6397{,}22 \text{ und } \frac{\varrho}{u} = 5534{,}35$$

und hiernach fände sich, wenn diese beiden Werthe mit dem gefundenen Werth von u multiplizirt werden, die Verdampfungswärme für gesättigte Kohlensäuredämpfe von 0° C : $r = 83{,}80$; ferner die innere latente Wärme $\varrho = 72{,}50$, sowie die äussere latente Wärme $Apu = r - \varrho = 11{,}30$.

Auf ähnlichem Wege lassen sich die angegebenen Wärmemengen auch für Quecksilberdämpfe annäherungsweise bestimmen. Das spezifische Gewicht der Quecksilberdämpfe in Hinsicht Luft setzt man bekanntlich $\varepsilon = 6{,}976$; das spezifische Gewicht des flüssigen Quecksilbers in Hinsicht des Wassers ist 13,6; daher das spezifische Volumen des flüssigen Quecksilbers $\sigma = 0{,}00007$; hingegen berechnet sich das spezifische Volumen v für Quecksilberdämpfe von 360° C und (nach Tab. 8) für den Druck von 797,74 Millimeter Quecksilbersäule (nahezu atmosphärische Pressung) $v = 0{,}24487$. Wir können daher für diese Dämpfe bei dem angegebenen Drucke setzen $u = s - \sigma = 0{,}2448$.

Für den angenommenen Druck giebt aber Tabelle 8

$$\frac{r}{u} = 294{,}96 \text{ und } \frac{\varrho}{u} = 269{,}38; \text{ daher folgt}$$

die Verdampfungswärme $r = 72{,}21$
die innere latente Wärme $\varrho = 65{,}94$
und die äussere latente Wärme $Apu = 6{,}27$.

Wenn auch die im Vorstehenden für Kohlensäure- und Quecksilberdämpfe angegebenen Werthe der Wärmemengen r, ϱ und Apu nur Näherungswerthe sind und keineswegs für weitergehende

Untersuchungen verwendet werden dürfen, bevor ihre Richtigkeit nicht durch Versuche festgestellt ist, so führen sie doch zu dem Schlusse, dass diese Dämpfe hinsichtlich der Grösse der Verdampfungswärme durchaus nicht an den Grenzen stehen, wie das hinsichtlich der für dieselben geltenden Beziehung zwischen Druck und Temperatur der Fall ist; vielmehr steht unzweifelhaft, was die Wärmemenge betrifft, welche der Gewichtseinheit Flüssigkeit zum Zwecke der Verdampfung unter constantem Drucke zugeführt werden muss, unter allen Flüssigkeiten das Wasser obenan.

Die Rechnungen, auf welche die mechanische Wärmetheorie führt, wenn es sich darum handelt, für eine gewisse Art von gesättigtem Dampf für einen bestimmten Druck das spezifische Volumen v oder die Dichtigkeit γ zu bestimmen, sind sehr weitläufig, wie obige Bestimmungen zeigen. Man würde daher, wenn man häufig in die Lage käme, die Werthe v und γ für einen gewissen Druck p angeben zu müssen, bis auf Weiteres empirische Formeln aufstellen und zur Bildung solcher Formeln liefern die angehängten Tabellen das vollständige Material.

Wir begnügen uns hier, weil das vorläufig noch für technische Zwecke vollständig genügt, mit der Aufstellung einer solchen empirischen Formel speziell für gesättigten Wasserdampf. Es wurde schon erwähnt, dass man bis jetzt für solchen Dampf fast allgemein zur Berechnung der Dichtigkeit γ die Navier'sche Formel

$$\gamma = \alpha + \beta p$$

angewandt hat, in welcher Formel α und β zwei constante Grössen sind. Man wusste aber, dass diese Gleichung selbst die Dichtigkeit, wie sie sich nach der ältern Bestimmungsweise ergab, nicht genau wieder giebt, und hat daher für Hochdruckdämpfe bei technischen Rechnungen nach Pambour andere Werthe für die Constanten α und β benutzt als für Tiefdruckdämpfe. Die Tabelle 10 lehrt aber, dass selbst dieser Ausweg nicht genügt; die Differenzen der Werthe von γ (Col. 11 und 12, Tab. 10) nehmen bei gleichen Spannungszunahmen der Art ab, dass man nur zwischen nahe bei einander liegenden Spannungsgrenzen von der Navier'schen Form Gebrauch machen könnte; besser ist es daher, diese Formel durch eine neue zu ersetzen, welche die Werthe von γ giebt, wie sie sich nach der mechanischen Wärmetheorie ergeben und die gleichzeitig für alle vorkommenden Dampfspannungen gilt.

Bestimmt man für Wasserdampf das specifische Volumen s, indem man zu den Werthen von u (Col. 8 Tab. 10) die Werthe $\sigma = 0{,}001$ addirt; trägt man die Grösse s als Abscisse und den zugehörigen Druck p als Ordinate auf, so ergiebt sich eine Curve, die ich im Weitern die Curve constanter Dampfmenge nennen werde. Die Gleichung $p = F(s)$ dieser Curve, entsprechend reinem gesättigten Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit lässt sich auf theoretischem Wege noch nicht ableiten, es hat sich mir aber ergeben, dass wahrscheinlich für Wasserdampf diese Gleichung von folgender Form ist:

$$p s^n = p_1 s_1^n = \text{Const.}$$

wobei n eine constante Grösse und zwar $n = 1{.}0646$ ist und die Constante $p_1 s_1^n = 1{.}704$ gesetzt werden soll, wenn der Druck p in Atmosphären angenommen wird.

Schon auf S. 143 wurde gezeigt, welche Wichtigkeit gerade dieses Gesetz der Aenderung des Druckes mit dem Volumen bei permanenten Gasen hat; es ist daher gar nicht unwahrscheinlich, dass dieses Gesetz auch bei reinen gesättigten Dämpfen eine hervorragende Rolle spielt.

Ersetzt man in vorstehender Gleichung s durch $1 : \gamma$, so schreibt sie sich auch in der Form:

$$\gamma = a p^{\frac{1}{n}} \qquad (219)$$

wobei, wenn p in Atmosphären eingesetzt wird, $a = 0{.}6061$ und $1 : n = 0{,}9393$ ist.

Wie genau diese Formel die Werthe von γ nach Tab. 10 wiedergiebt, zeigt folgende Zusammenstellung.

Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes:

Druck in Atmosphären	γ nach Gl. 219	γ nach Tab. 10 Col. 11	Druck in Atmosphären	γ nach Gl. 219	γ nach Tab. 10 Col. 11
0.5	0.316	0.315	6	3.262	3.263
1	0.606	0.606	8	4.274	4.274
2	1.162	1.163	10	5.270	5.270
3	1.701	1.702	12	6.255	6.254
4	2.229	2.230	14	7.229	7.228

Man kann hiernach bei Wasserdampf ohne Bedenken von Formel (219) Gebrauch machen; auch für andere Dampfarten lässt sich dieselbe Form der Gleichung benutzen, wenn man für dieselben die Constanten α und n bestimmt, was nach unsern Tabellen sehr leicht ausführbar ist.

Aufstellung der Hauptgleichungen für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen.

In einem Gefässe sei die Gewichtseinheit einer Mischung von Flüssigkeit und Dampf eingeschlossen; x sei das Gewicht der Dampfmenge, sonach $(1-x)$ das Gewicht der Flüssigkeit; bezeichnet t die Temperatur der Mischung, so ist, weil der Dampf, wegen der Anwesenheit von Flüssigkeit, aus der er hervorging, gesättigt ist, auch der Druck p bekannt. Das Volumen v der Mischung ist dann nach Gl. (208) S. 272:

$$v = xu + \sigma$$

in welcher Formel wir das spezifische Volumen σ der Flüssigkeit als constant annehmen und den Werth u als eine Funktion der Temperatur t oder des Druckes p ansehen.

Wir vergleichen nun die Wärmemenge, welche in der Mischung enthalten ist, mit derjenigen der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° Temperatur. Bezeichnet q, wie früher, die Flüssigkeitswärme, so ist der in den $(1-x)$ Kilogrammen Flüssigkeit enthaltene Mehrbetrag an Wärme, verglichen mit dem gleichen Gewicht Flüssigkeit von 0°

$$(1-x)\,q$$

hingegen ist für die Dampfmenge x, verglichen mit x Kilogramm Flüssigkeit von 0°, der Mehrbetrag an Wärme:

$$xJ$$

wobei J die Dampfwärme darstellt (vergl. S. 270).

Hieraus findet sich nun der Mehrbetrag an Wärme der ganzen Mischung, verglichen mit der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° Temperatur:

$$(1-x)q + xJ$$

oder

$$q + x(J-q)$$

Nun ist aber die Differenz $(J-q)$ nach Gl. (206) S. 271 nichts anderes, als die innere latente Wärme ϱ, sonach schreibt sich vorstehender Ausdruck auch in der einfachern Form:

$$q + x\varrho$$

Nehmen wir nun an, es seien mit dieser Mischung irgend welche Aenderungen vorgenommen worden, es sei im Anfange die spezifische Dampfmenge x_1, die Temperatur t_1 gewesen und q_1 und ϱ_1 seien die der Temperatur t_1 entsprechenden Werthe von q und ϱ, so war im Anfange der angegebene Wärmeüberschuss:

$$q_1 + x_1\varrho_1$$

Beim Uebergange ist sonach die in der Mischung enthaltene Wärmemenge um

$$q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1$$

vermehrt worden; dieser Werth ist aber offenbar identisch mit der Veränderung $U - U_1$ der innern Arbeit, dieselbe in Wärmeeinheiten gemessen; man erhält daher die Gleichung:

$$A(U - U_1) = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1$$

und wenn man zum Differential übergeht:

$$A\,dU = dq + d(x\varrho) \qquad (220)$$

Diese Gleichung, in welcher man überdies dq durch $c\,dt$ ersetzen könnte und in welcher die Flüssigkeitswärme q und die innere latente Wärme ϱ nach den Angaben auf S. 262 und S. 282 als Funktionen der Temperatur bekannt sind, giebt das Mittel an die Hand, für irgend welche Zustandsänderung die Aenderung der innern Arbeit zu bestimmen; freilich gilt die Gleichung, wie das auch mit den weitern Formeln, die wir zunächst entwickeln werden, der Fall ist, nur so lange, als der Dampf im gesättigten Zustand ist, so lange überhaupt neben Dampf auch noch Flüssigkeit vorhanden ist; mit andern Worten, so lange der Druck p nur als Funktion der Temperatur t angesehen werden kann.

Bemerkenswerth ist, dass die vorstehende Formel sich auf elementarem Wege ableiten liess, ohne dass es nöthig war, auf die allgemeinen Formeln des ersten Abschnittes zurückzugreifen.

Nehmen wir nun im Weitern an, dass während der vorausgesetzten Zustandsänderung, bei der Ausdehnung der Masse um dv die äussere Arbeit dL verrichtet worden ist, so findet sich die Wärmemenge dQ, die dabei der Mischung mitzutheilen war:

$$dQ = A\,(dU + dL) \tag{221}$$

wie es schon auf S. 26 angegeben wurde.

Die beiden Gleichungen (220) und (221) liefern nun im Verein mit dem Vorhergehenden das Mittel unter allen Verhältnissen, mögen die Zustandsänderungen auf umkehrbarem oder nicht umkehrbarem Wege erfolgen, das Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen bei Wärmemittheilung und Volumenänderungen irgend welcher Art zu verfolgen.

Für den Fall, dass die Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege erfolgen, welcher Fall zunächst näherer Prüfung unterworfen werden soll, lässt sich der Werth der äussern Arbeit dL nach der Darstellung auf S. 35 durch pdv ersetzen; die Substitution dieses Werthes und des Werthes dU nach Gl. (208) in Gl. (221) giebt dann:

$$dQ = dq + d\,(x\varrho) + Apdv \tag{222}$$

Diese Gleichung lässt sich aber in sehr verschiedene Formen bringen, je nachdem man mit Hülfe der Gl. (208) die spezifische Dampfmenge x durch das spezifische Volumen v der Mischung ersetzt oder v durch x ausdrückt und je nachdem man die Werthe q und ϱ als Funktionen der Temperatur t oder als Funktionen des Druckes p auffasst.

Die wichtigsten der angedeuteten Umformungen sollen hier zunächst angegeben werden; wir gelangen dann auf Gleichungen, die zwar identisch sind, unter denen wir dann aber bei Lösung verschiedener Probleme diejenige herausgreifen, die am leichtesten zum Ziele führt.

Erste Umformung. Bestimmt man aus Gl. (208) die spezifische Dampfmenge x, so findet sich:

$$x = \frac{v - \sigma}{u}$$

Die Substitution in Gl. (222) giebt dann:

$$dQ = dq + d\left(\frac{\varrho}{u}(v - \sigma)\right) + Apdv$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, indem man q und $\varrho : u$ als Funktionen von p ansieht, so findet sich:

$$dQ = \frac{d}{dp}\left[q - \frac{\varrho}{u}\sigma + \frac{\varrho}{u}v\right]dp + \left(\frac{\varrho}{u} + Ap\right)dv$$

oder wenn man im zweiten Gliede nach Gleichung (205) S. 271 $\varrho = r - Apu$ einsetzt:

$$dQ = \frac{d}{dp}\left[q - \frac{\varrho}{u}\sigma + \frac{\varrho}{u}v\right]dp + \frac{r}{u}dv \qquad (223)$$

und diese Gleichung ist es, die als das Resultat der ersten Umformung angesehen werden soll.

Vergleicht man diese Formel mit der allgemeinen Gl. (12)

$$dQ = A(Xdp + Ydv)$$

die wir auf S. 39 für Körper jeder Art aufgestellt haben, so ergeben sich leicht die beiden Werthe X und Y, die früher allgemein als Funktionen von p und v hingestellt wurden, für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen:

$$AX = \frac{d}{dp}\left[q - \sigma\cdot\frac{\varrho}{u} + v\cdot\frac{\varrho}{u}\right]$$

oder

$$AX = \frac{dq}{dp} - \sigma\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right) + v\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right) \qquad (224)$$

und

$$AY = \frac{r}{u} \qquad (225)$$

Die letztere Gleichung für Y ist schon oben auf S. 273 gegeben worden; Gl. (224) ergiebt nun aber auch die Bedeutung von X; man kann sonach diesen Werth für ein gegebenes Volumen v der Mischung für jeden Druck p und jede Temperatur t berechnen. Da unsere Tabellen den Werth von $\varrho : u$ für verschiedenen Druck angeben, so liesse sich leicht der Differentialquotient von $\varrho : u$

in Hinsicht p bestimmen; aus Tabelle 10 erkennt man ohne Weiteres, dass dieser Differentialquotient bei **Wasserdampf** so langsam mit dem Drucke wächst (s. die Differenzen in Col. 10), dass man ihn bei Näherungsrechnungen innerhalb gewisser Grenzen sogar constant annehmen könnte. Uebrigens findet sich auch, wie leicht zu verfolgen ist, durch Differentiation von Gl. (213) S. 275

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right) = AT\frac{d}{dt}\left[\text{logn.}\frac{dp}{dt}\right]$$

wonach sich dieser Werth unter Zugrundelegung von Gl. (187) S. 257 für jede Temperatur genau berechnen liesse.

Was ferner den Differentialquotienten $\frac{dq}{dp}$ betrifft, so schreibt sich dieser auch $c : \frac{dp}{dt}$, wobei für die betreffende Flüssigkeit die spezifische Wärme $c = \frac{dq}{dt}$ nach den auf S. 262 für q angegebenen Gleichungen leicht zu ermitteln ist.

Zweite Umformung. Differentiirt man die Gleichung (208), die oben S. 272 für das spezifische Volumen der Mischung angegeben wurde, so folgt, weil wir σ als constant ansehen:

$$dv = d(xu)$$

und daher

$$Apdv = Apd(xu)$$

und hieraus nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung:

$$Apdv = Ad(pux) - Axudp$$

Substituirt man diesen Werth in Gl. (222), so folgt

$$dQ = dq + d(x\varrho) + Ad(xpu) - Axudp$$

Das zweite und dritte Glied der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich aber in **eines** zusammenziehen, wenn man für $\varrho + Apu$ die Verdampfungswärme r einführt; beide Glieder lassen sich dann durch $d(xr)$ ersetzen. Für das letzte Glied findet sich ferner nach Gl. (212) S. 274

$$Axudp = \frac{xr}{T}dt$$

hiernach endlich:

$$dQ = dq + d\,(xr) - \frac{xr}{T}\,dt \tag{226}$$

und in dieser Form ist die Gleichung zuerst von Clausius aufgestellt worden; sie schreibt sich übrigens noch etwas einfacher in folgender Art:

$$dQ = dq + Td\left(\frac{xr}{T}\right) \tag{227}$$

denn, wenn man hier die im zweiten Gliede angedeutete Differentiation ausführt, kommt man leicht auf die Form der vorhergehenden Gleichung.

Dritte Umformung. Ersetzen wir in Gl. (226) den Werth dq durch $c\,dt$ und führen wir die im zweiten Gliede angedeutete Differentiation aus, so folgt:

$$dQ = c\,dt + r\,dx + x\,dr - x\frac{r}{T}\,dt$$

oder rechts $xc\,dt$ addirt und subtrahirt und die Glieder entsprechend geordnet:

$$dQ = (1-x)\,c\,dt + r\,dx + x\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)dt$$

Bezeichnen wir den Werth:

$$\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)$$

mit h, welcher Werth offenbar nur eine Funktion von t ist, so ergiebt sich:

$$dQ = (1-x)\,c\,dt + r\,dx + xh\,dt \tag{228}$$

In dieser Form findet sich die Gleichung ebenfalls zuerst bei Clausius; das erste Glied $(1-x)\,c\,dt$ der rechten Seite stellt denjenigen Theil der mitgetheilten Wärmemenge dQ dar, welcher zur Temperaturerhöhung dt der vorhandenen Flüssigkeitsmenge $(1-x)$ verbraucht wird; gleichzeitig geht aber auch die Flüssigkeitsmenge dx in Dampf über und fordert dazu die Wärmemenge $r\,dx$, welcher Werth das zweite Glied bildet: endlich repräsentirt $xh\,dt$ den Theil von dQ, welcher auf die vorhandene Dampfmenge übergeht; der Gewichtseinheit Dampf

entspricht die Wärmemenge $h\,dt$ und daher spielt, wie Clausius schon hervorhebt der Werth:

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} \tag{229}$$

die Rolle einer Art von spezifischer Wärme; $h\,dt$ ist die Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit Dampf bei der Ausdehnung der Masse um dv mitgetheilt werden muss, damit der Dampf nach der Erwärmung um dt sich wieder im gesättigten Zustande befinde.

In der Folge werden wir von der Gl. (222) besonders unter derjenigen Form Gebrauch machen, in welche sie durch die erste und zweite Umformung übergeführt wurde; es darf aber beim Gebrauche dieser Gleichungen nie aus dem Auge verloren werden, dass sie ausdrücklich nur dann Gültigkeit haben, wenn die Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege erfolgen. Ist während der Aenderungen der äussere Druck vom Dampfdruck verschieden, so muss man auf die allgemeinen Formeln (220) und (221) zurückgreifen. Wir werden unten durch Lösung einer Reihe von verschiedenen Problemen den Gebrauch der Gleichungen näher darlegen.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, in welche Form die beiden Hauptgleichungen I u. II (S. 77) der mechanischen Wärmetheorie übergehen, wenn man sie auf Dampf- und Flüssigkeitsmischungen anwendet und ob diese Gleichungen durch das oben Gegebene bestätigt werden.

Die erste Hauptgleichung I S. 77 lautete:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1$$

Nach Gl. (224) und (225) ist aber Y und X gegeben; durch die Ausführung der angedeuteten Differentiation erhält man:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) = \frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{r}{u}\right) \text{ und } \left(\frac{dX}{dv}\right) = \frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$$

Ersetzt man im erstern Ausdrucke r durch $\varrho + Apu$, so ergiebt sich sofort für die Differenz der beiden Differentialquotienten Eins, wie es die erste Hauptgleichung ausspricht.

Die zweite Hauptgleichung II S. 77 lautete:

$$a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right)$$

Da aber bei Dampf- und Flüssigkeitsmischungen die Temperatur t nur eine Funktion vom Drucke p, also vom Volumen unabhängig ist, so folgt hier

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = 0$$

und daher

$$Y = (a + t)\frac{dp}{dt}$$

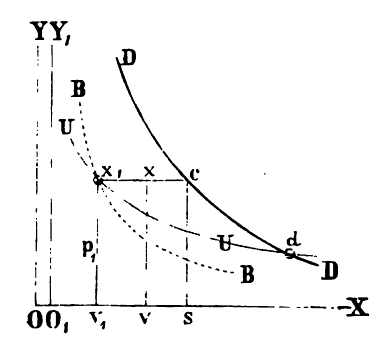
oder wenn man $a + t$ durch T ersetzt und für Y die Gl. (225) benutzt:

$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$$

und diese Formel, in welche also die zweite Hauptgleichung bei Dampf- und Flüssigkeitsmischung übergeht, ist dieselbe, die wir schon oben auf S. 274 unter No. 212 gegeben und besprochen haben.

Von der isothermischen und isodynamischen Curve der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen und über die „Curve constanter Dampfmenge".

Fig. 33.



Das Volumen s der Gewichtseinheit eines gesättigten Dampfes ohne Beimischung von Flüssigkeit ist nach Früherem durch den Druck p oder die entsprechende Temperatur vollständig bestimmt. Trägt man das spezifische Volumen s als Abscisse Os (Fig. 33) und den Druck p als Ordinate auf, so liegt der entsprechende Punkt c in einer Curve DD_1, die ich schon oben als »Curve constanter Dampf-

menge" bezeichnet habe; da hier zunächst gesättigter Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit angenommen wurde, so entspricht die Curve DD der Dampfmenge von einem Kilogramm.

Die Curve entspricht wahrscheinlich der Gleichung.

$$p s^n = \text{Const.};$$

ich habe auf S. 294' gezeigt, dass wenigstens für Wasserdampf diese Gleichung für das spezifische Volumen s und die Dichtigkeit $\gamma = 1 : s$ auf Werthe führt, die in überraschender Weise mit den auf anderm Wege bestimmten übereinstimmen.

Nehme ich nun von der gleichen Dampfart eine Mischung und zwar ebenfalls eine Gewichtseinheit an, so wird, wenn dieselbe x Kilogramm Dampf enthält, das Volumen v sein, nach Gl. 208) S. 272:

$$v = xu + \sigma$$

und dieses Volumen wird sich bei gleichem Drucke p jederzeit kleiner als s herausstellen; trägt man daher $Ov = v$ als Abscisse und p als Ordinate auf (Fig. 33), so liegt der Punkt x jederzeit, wenn der Dampf gesättigt und mit Flüssigkeit gemischt ist, in dem Raume zwischen der Curve DD und den Coordinatenaxen; sobald bei irgend welchen Zustandsänderungen die Curve DD überschritten wird, so ist das ein Zeichen, dass der Dampf in den überhitzten Zustand übergeht. Mit dem Ueberschreiten dieser Curve hört aber die Anwendbarkeit der allgemeinen Gleichungen, die oben für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen aufgestellt worden sind, auf. Da wir es aber zunächst nur mit dem Verhalten solcher Mischungen hier zu thun haben, mit andern Worten, da wir zunächst nur Dämpfe im gesättigten Zustand voraussetzen, so werden wir bis auf Weiteres annehmen müssen, dass bei den mit der Mischung vorzunehmenden Operationen die Grenzcurve DD nicht überschritten wird.

Unter isothermischer Curve haben wir diejenige Curve verstanden, welche die Aenderungen des Druckes mit dem Volumen angiebt, wenn die Temperatur t während der Zustandsänderungen constant erhalten wird. Da nun aber bei Dampf- und Flüssigkeitsmischungen der Druck p nur von der Temperatur abhängt, so ist bei den angenommenen Aenderungen auch der Druck constant, und daher ist die isothermische Curve der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen eine gerade Linie, welche der

Abscissenaxe parallel läuft. Wegen der Unveränderlichkeit der Temperatur sind dann auch die von ihr abhängigen Werthe u, q, ϱ und r constant; geht sonach das Volumen v_1 in v und die spezifische Dampfmenge x_1 in x über, so ergiebt die Rechteckfläche $v_1 v x x_1$ (Fig. 33) die äussere Arbeit, welche von der Masse verrichtet wird; die Arbeit ist:

$$L = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p\,(v - v_1)$$

oder wenn man setzt:

$$v = xu + \sigma \text{ und } v_1 = x_1 u + \sigma$$

$$L = pu\,(x - x_1) \tag{230}$$

Die Veränderung der innern Arbeit findet sich dann nach Gl. (220) S. 296, weil $dq = 0$ und ϱ constant ist:

$$U - U_1 = \frac{\varrho}{A}\,(x - x_1) \tag{231}$$

und daher die Wärmemenge, welche bei dieser Ueberführung der Masse von aussen mitgetheilt werden muss:

$$Q = A\,(U - U_1 + L) = (\varrho + Apu)\,(x - x_1)$$

oder nach der Beziehung (205) S. 271

$$Q = r\,(x - x_1) \tag{232}$$

wie sich auch durch Integration der Gl. (227) hätte direct finden lassen.

Wäre die Ausdehnung so weit fortgesetzt worden, bis alle Flüssigkeit in Dampf verwandelt war, so entspricht der Punkt c der Curve DD dem Endzustande und in vorstehenden Formeln wäre einfach $x = 1$ zu setzen. Wollte man aber jetzt Volumenvergrösserung und Wärmemittheilung noch weiter bei constanter Temperatur fortsetzen, so würde die isothermische Curve von nun an einen andern Verlauf nehmen und würde, vorausgesetzt dass überhitzte Dämpfe sich genau wie permanente Gase verhalten, eine durch den Punkt c gehende gleichseitige Hyperbel sein. (Vergl. S. 121.)

Die vorhin angegebenen Formeln gelten natürlich auch für

Dampf- und Flüssigkeitsmischungen, wenn die Masse bei constanter Temperatur vom Volumen v auf v_1 comprimirt wird, dann nimmt die Dampfmenge von x auf x_1 ab (Condensation). Gl. (230) giebt dann die Arbeit der Compression, Gl. (231) die Verminderung der innern Arbeit und Gl. (232) giebt die Wärmemenge, die bei dem Uebergange abzuleiten ist.

Wir haben nun auch den Verlauf der isodynamischen Curve zu untersuchen, welche Curve die Druckänderungen angiebt, wenn die innere Arbeit constant ist.

Hier ist in Gl. (220) $dU = 0$; man hat daher

$$dq + d(x\varrho) = 0$$

und hieraus durch Integration, wenn die der Anfangstemperatur t_1 entsprechenden Werthe von x, q und ϱ mit x_1, q_1 und ϱ_1 bezeichnet werden:

$$q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1 = 0 \tag{233}$$

Diese Gleichung löst in Verbindung mit den beiden Formeln

$$v = xu + \sigma \text{ und } v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

die vorgelegte Frage; man erhält zwar nicht die Gleichung der Curve in der gewöhnlichen Form, so dass man direct aus dem gegebenen Werthe des Volumens v den zugehörigen Druck p berechnen könnte, doch kann man leicht den Verlauf der Curve verfolgen. Ist nämlich für den Anfangszustand die spezifische Dampfmenge x_1 und die Temperatur t_1 gegeben, so ist zunächst auch der Druck p_1 und damit auch nach frühern Sätzen u_1 bekannt: hieraus bestimmt sich dann aus $v_1 = x_1 u_1 + \sigma$ das Volumen im Anfange. Denkt man sich nun die Masse auf dem angenommenen Wege in einen andern Druck p übergegangen, so ist für diesen Druck auch t, u, q und ϱ bestimmbar; man kann dann aus Gl. (233) die spezifische Dampfmenge x und durch die Gleichung $v = xu + \sigma$ das dem Drucke p entsprechende Volumen berechnen.

Wäre z. B. in einem Gefässe ein Kilogramm Wasserdampf und Wasser enthalten und davon $x_1 = 0{,}80$ dampfförmig und wäre der Druck p_1 gerade 5 Atmosphären, so giebt Tab. 10 für diesen Zustand:

$$q_1 = 153{,}741;\ \varrho_1 = 454{,}99 \text{ und } u_1 = 0{,}3626$$

woraus sich das Volumen v_1 berechnet:

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma = 0{,}2911 \text{ Cubikmeter}$$

Hätte nun die Volumenänderung auf der isodynamischen Curve so weit stattgefunden, bis der Druck nur noch **eine** Atmosphäre betrug, so wäre für diesen Druck

$$q = 100{,}500;\ \varrho = 496{,}30 \text{ und } u = 1{,}6494$$

sonach berechnet sich nach Gl. (233) die Dampfmenge x am Ende:

$$x = \frac{x_1 \varrho_1 + q_1 - q}{\varrho} = 0{,}8407 \text{ Kil.}$$

und das Endvolumen:

$$v = xu + \sigma = 1{,}3876$$

und das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v}{v_1} = 4{,}766$$

Am Ende der Ausdehnung ist hiernach etwas mehr Dampf vorhanden, als Anfangs; es ist hieraus zu schliessen, dass bei der Ausdehnung des Wasserdampfes nach der isodynamischen Curve ein Verdampfen stattfindet und dass umgekehrt bei der Compression ein Niederschlagen von Dampf erfolgt. Würde man auf die angegebene Weise für eine Reihe von verschiedenen Werthen des Druckes p das zugehörige Volumen v berechnen, so liesse sich die durch den Punkt x_1 (Fig. 33) gehende isodynamische Curve leicht verfolgen: ihr Verlauf ist in der Figur durch die Curve Ux_1U' angedeutet. Es ist mir nicht gelungen, aus den allgemeinen Gleichungen die Gleichung der Curve in der Form $p = F(v)$ darzustellen; es hat sich mir aber durch Berechnung einer Reihe von speziellen Beispielen herausgestellt, dass wenigstens für Mischungen von Wasser und Wasserdampf sich die einzelnen Punkte der einem gewissen Anfangszustande (p_1, v_1, x_1) entsprechenden isodynamischen Curve nach der Formel:

$$pv^{\nu} = p_1 v_1^{\nu}$$

näherungsweise, aber mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen lassen, wenn man nur in dieser Formel den Exponenten ν, der einem

gewissen Anfangszustand (p_1, v_1, x_1) entspricht und der dann nahezu constant ist, ermittelt; so findet sich z. B. für Wasserdämpfe unter der Voraussetzung $x_1 = 1$, d. h. dass Anfangs nur gesättigter Dampf vorhanden ist und nun Compression nach der isodynamischen Curve erfolgt, der Werth ν im Mittel 1,0456. Ich unterlasse weitere Angaben um so mehr, als wir bei Betrachtung der adiabatischen Curve auf ähnliche Untersuchungen zurückkommen. Hier sollen die Untersuchungen nur so weit geführt werden, als es die oben gegebenen allgemeinen Formeln zulassen.

Für Mischungen von Wasser und Wasserdampf ergab sich oben, dass mit der Expansion nach der isodynamischen Curve ein Verdampfen, Vermehrung des vorhandenen Dampfes verbunden ist. Es lässt sich leicht eine einfache Beziehung aufstellen, aus der sofort erkannt werden kann, ob andere Dampfarten sich ähnlich verhalten oder nicht, ob nämlich nicht auch Dampfarten existiren, die das umgekehrte Verhalten zeigen, d. h. bei denen mit der Ausdehnung nach der isodynamischen Curve ein Niederschlagen von Dampf stattfindet. Setzen wir in der Gleichung (233) reinen gesättigten Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit voraus, setzen wir also $x_1 = 1$, so folgt:

$$x = \frac{\varrho_1 + q_1 - q}{\varrho}$$

oder

$$x = 1 - \frac{(\varrho + q) - (\varrho_1 + q_1)}{\varrho}$$

Denken wir nun an Compression und soll sich der betreffende Dampf wie Wasserdampf verhalten, d. h. sich mit wachsendem Drucke und zunehmender Temperatur theilweise niederschlagen, so muss $x < 1$ sein und das ist der Fall, wenn die Differenz $[(\varrho + q) - (\varrho_1 + q_1)]$ positiv ist. Es muss sonach, wenn man zum Differential übergeht

$$\frac{d\varrho}{dt} + \frac{dq}{dt}$$

positiv sein. Da es gleichgültig ist, von welcher Temperatur man ausgeht, so untersucht man am besten den Werth der beiden Coefficienten für $t = 0^0$ C. Nun sind aber die Werthe ϱ und q nach den Angaben auf S. 282 und S. 262 als Funktionen der

Temperatur t für eine Reihe von Dämpfen bekannt, es lassen sich daher die beiden Differentialquotienten leicht ermitteln; so ist z. B. nach den angeführten Formeln für Aetherdämpfe:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = 0{,}52901 \text{ und } \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)_0 = -\ 0{,}10648$$

ihre Summe ist positiv und daher verhalten sich die Aetherdämpfe in der angezeigten Richtung genau wie Wasserdämpfe; dasselbe ist mit allen übrigen auf S. 282 angeführten Dämpfen, die eine Untersuchung in der angegebenen Art zulassen, der Fall, wie man sich leicht überzeugen kann.

Bei allen diesen Dämpfen findet sonach bei der Expansion nach der isodynamischen Curve ein Verdampfen Statt; die Curve $Ux_1\,U$ (Fig. 33), welche einer gewissen spezifischen Dampfmenge $x_1 < 1$ und einem gewissen Anfangsdrucke p_1 entspricht, wird daher die Grenzcurve DD in einem Punkte d schneiden, der näher der Abscissenaxe OX liegt. Wir schliessen ferner, dass die »Curve constanter Dampfmenge«, welche dem gleichen Anfangspunkte und der Dampfmenge $x_1 =$ Const. entspricht, sich bei allen diesen Dämpfen rascher der Abscissenaxe nähert, als die isodynamische Curve. In Fig. 33 ist diese Curve constanter Dampfmenge punktirt durch den Zug $Bx_1\,B$ dargestellt; ihr Verlauf lässt sich für alle diejenigen Dämpfe, für welche die angehängten Tabellen gelten, leicht bestimmen. Für den Anfangsdruck p_1 und das Anfangsvolumen v_1 sei die spezifische Dampfmenge x_1; für einen andern Druck p soll hier die Dampfmenge die gleiche sein, wir erhalten daher das zugehörige Volumen

$$v = x_1\,u + \sigma$$

Für die Grenzcurve DD, für welche die Dampfmenge eins ist, folgt bei gleichem Drucke, wenn s wie früher das spezifische Volumen von reinem Dampf darstellt

$$s = u + \sigma$$

Rechnet man die Abscissen v und s von einer Ordinatenaxe $O_1\,Y_1$ ab. welche um $OO_1 = \sigma$ von der Axe OY abliegt (Fig. 33) und welche die Curve constanter Dampfmenge für $x_1 = 0$ repräsentirt, so sind die Abscissen resp. .

$$v - \sigma = x_1 u \text{ und } s - \sigma = u$$

woraus durch Division folgt:

$$v - \sigma = x_1 (s - \sigma)$$

Ist hiernach die Grenzcurve DD dargestellt, so lässt sich jetzt leicht für jede andere Dampfmenge $x_1 < 1$ die neue Curve darstellen; die Abscissen, welche gleichem Drucke entsprechen, stehen im constanten Verhältniss; es ist, die Bezeichnung der Figur zu Grunde gelegt

$$x_1 = \frac{\overline{O_1 v_1}}{\overline{O_1 s}}$$

Ist die Dampfmenge x_1 von Eins nicht sehr verschieden, so lässt sich in vorstehenden Formeln auch noch σ als sehr klein vernachlässigen und man erhält:

$$x_1 = \frac{v}{s}$$

Gilt für die Grenzcurve, wie wir als sehr wahrscheinlich, wenigstens für Wasserdampf, gefunden haben (S. 294), die Gleichung

$$p s^n = p_1 s_1^n$$

so findet sich leicht auch die Gleichung der Curve, welche der constanten Dampfmenge x_1 entspricht, wenn man vorstehende Formel auf beiden Seiten mit x_1^n multiplicirt:

$$p(x_1 s)^n = p_1 (x_1 s_1)^n \text{ oder } p v^n = p_1 v_1^n$$

Für Wasserdampf fanden wir $n = 1{,}0646$ (S. 294); die Curven constanter Dampfmenge bilden sonach eine Schaar von Curven, für welche bei jeder einzelnen Curve die Constante $p_1 v_1^n$ sich aus der gegebenen Dampfmenge x_1 und dem Anfangsdrucke p_1 ermitteln lässt. So vortrefflich auch die Resultate der vorstehenden Formel mit denen der genauen Bestimmungen wenigstens bei Wasserdampf übereinstimmen, so unterlassen wir es doch im Weitern, von dieser Formel Gebrauch zu machen, da sie zunächst nur als eine empirische Formel anzusehen ist.

Wir haben im Vorstehenden zunächst gezeigt, wie sich mit Hülfe der Angaben unserer Tabellen für jede Dampfart der Ver-

lauf der »isodynamischen Curve«, sowie der »Curve constanter Dampfmenge« genau verzeichnen lässt; es liegen aber noch andere Fragen zur Beantwortung vor.

Kehren wir noch einmal zur Betrachtung der isodynamischen Curve zurück, so fragt sich noch, welche Wärmemenge der Mischung mitzutheilen oder zu entziehen ist und welche äussere Arbeit gewonnen wird oder aufzuwenden ist, wenn die Zustandsänderungen nach der isodynamischen Curve, d. h. bei constanter innerer Arbeit stattfinden sollen.

Da hier $dU = 0$ zu setzen ist, so folgt nach der Fundamentalgleichung:

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$
$$dQ = Ap\,dv$$

Es folgt also, dass hier, wenn wir an Expansion, an Arbeitsverrichtung denken, die ganze zugeführte Wärme in Arbeit verwandelt wird und dass umgekehrt bei der Compression die ganze der verrichteten Arbeit entsprechende Wärme abzuleiten ist. Es handelt sich sonach hier nur um Ermittelung der äussern Arbeit L, da mit dieser auch die Wärmemenge $Q = AL$ bestimmt ist.

Wir haben aber

$$dv = d\,(xu + \sigma) = d\,(xu)$$

und daher:

$$dL = p\,d\,(xu)$$

Diese Gleichung schreibt sich aber auch nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung

$$dL = d\,(xpu) - xu\,dp$$

oder den Werth $u\,dp$ nach Gl. (212) substituirt und zugleich dieses Glied mit ϱ multiplicirt und dividirt

$$dL = d\,(xpu) - x\varrho \frac{r}{A\varrho T} dt \tag{234}$$

Das erste Glied der rechten Seite ist integrabel und ebenso lässt sich die Integration des zweiten ausgeführt denken, wenn man $x\varrho$ aus Gl. (233) bestimmt und substituirt; man müsste freilich vorerst die Temperaturfunktionen $\frac{r}{A\varrho T}$ und $\frac{r}{A\varrho T}\,q$ durch einfachere empirische Formeln ersetzen.

Wir verfolgen hier das Problem nicht weiter, da wir bei den folgenden Untersuchungen keinen Gebrauch von den Resultaten desselben zu machen haben.

Viel weiter gehende Schlüsse lassen sich ziehen, wenn man die Zustandsänderungen der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen bei constanter Dampfmenge betrachtet.

Setzen wir nämlich die Dampfmenge $x = x_1 =$ Const. voraus, so ergiebt sich zunächst nach Gl. (220) die Aenderung der innern Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$A\,d\,U = d\,q + x_1\,d\,\varrho \quad (235)$$

also auch wenn man q und ϱ als Funktionen der Temperatur t sich gegeben denkt:

$$A\,\frac{d\,U}{d\,t} = \frac{d\,q}{d\,t} + x_1\,\frac{d\,\varrho}{d\,t}$$

Bei einem Wachsen der Temperatur, d. h. bei Compression führt das jederzeit auf eine Zunahme der innern Arbeit, denn vorstehender Werth ist, wie schon oben auf S. 308 gezeigt wurde, für die verschiedenen Dämpfe, die wir der Untersuchung unterwerfen können, selbst dann noch positiv, wenn die spezifische Dampfmenge x_1 den grössten Werth annimmt, nämlich $x_1 = 1$ wird.

Die Integration giebt übrigens:

$$A\,(U - U_1) = q - q_1 + x_1\,(\varrho - \varrho_1)$$

Was hingegen die Wärmemenge betrifft, welche der Mischung mitgetheilt oder entzogen werden muss, damit die Zustandsänderungen bei constanter Dampfmenge $x = x_1$ erfolgen, so findet sich leicht nach Gl. (228) S. 300, wenn wir dort $dx = 0$ setzen,

$$d\,Q = (1 - x_1)\,c\,d\,t + x_1\,h\,d\,t \quad (236)$$

Das erste Glied, in welchem wir $c\,d\,t$ durch $d\,q$ ersetzen können, ergiebt die Wärmemenge, welche die vorhandene Flüssigkeitsmenge erfordert, während das zweite Glied die Wärmemenge giebt, welche die x_1 Kil. Dampf bei der Temperaturerhöhung $d\,t$ erfordern; der Gewichtseinheit Dampf müssen sonach

$$h\,d\,t$$

Wärmeeinheiten mitgetheilt werden, wenn der Dampf bei der

höhern Temperatur $t + dt$ wieder gesättigt sein soll. Der Werth h, der, wie schon oben erwähnt wurde, zuerst von Clausius in die Rechnungen eingeführt wurde, spielt die Rolle einer spezifischen Wärme: es ist, wie sich hier ergiebt, »die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes bei constanter Dampfmenge«; sein Werth ist nach Gl. (229)

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

er ist sonach veränderlich und erscheint hier als eine Funktion der Temperatur, die sich feststellen lässt. da wir für verschiedene Dampfarten die Werthe von r und $c = \frac{dq}{dt}$ als Temperaturfunktionen aus Regnault's Versuchen kennen. Führen wir die Gesammtwärme λ ein, indem wir berücksichtigen, dass $\lambda = q + r$ ist, so schreibt sich auch:

$$h = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda - q}{T} \tag{237}$$

Untersuchen wir zunächst das Verhalten der Wasserdämpfe in der angegebenen Richtung, so findet sich für diese unter Benutzung der Angaben auf S. 266

$$h = 0{,}305 - \frac{606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3}{273 + t} \tag{238}$$

und hiernach stellt sich für die Temperaturgrenzen, für welche die empirischen Formeln von Regnault überhaupt nur gelten, das merkwürdige Resultat heraus, dass der Werth h für Wasserdampf negativ ist; so findet sich beziehungsweise für die Temperaturen 0°, 100°, 200°

$$h = -1{,}9166,\ -1{,}1333 \text{ und } -0{,}6766$$

Kehren wir sonach zur Betrachtung der Gl. (236) zurück, so stellt das erste Glied $(1 - x_1)\,c\,dt$ die Wärmemenge dar, welche der flüssigen Masse $(1 - x_1)$ bei der Temperaturerhöhung dt, d. h. bei der Compression mitzutheilen ist: die vorhandene Dampfmenge x_1 hingegen erfordert bei Wasserdampf eine Wärmeentziehung, wenn bei der Compression die Dampfmenge unverändert bleiben soll. Umgekehrt wird bei

der Expansion, bei der Ausdehnung der Mischung bei unveränderlicher Dampfmenge der Flüssigkeit Wärme entzogen und dem Dampfe Wärme mitgetheilt werden müssen.

Ist anfänglich reiner gesättigter Dampf ohne Flüssigkeit vorhanden, also $x_1 = 1$, d. h. soll die Expansion nach der Grenzcurve DD (Fig. 33, S. 302) stattfinden, so ist die zuzuführende Wärmemenge nach Gl. (236)

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt \tag{239}$$

wenn t_1 die Anfangs- und t_2 die Endtemperatur ist; der Ausdruck führt auf einen positiven Werth von Q, weil bei der Expansion $t_2 < t_1$ ist.

Würde sonach bei der Expansion eine Wärmemittheilung nicht erfolgen, so wird sich Dampf niederschlagen, vorausgesetzt, dass wir es zunächst mit Wasserdampf zu thun haben.

Diese merkwürdige Eigenschaft des gesättigten Wasserdampfes ist zuerst von Clausius und Rankine entdeckt worden; seitdem ist durch die Versuche von Hirn die Richtigkeit dieses Rechnungsresultates ausser Zweifel gesetzt; auch meine Beobachtungen über das Ausströmen des gesättigten Wasserdampfes in die freie Atmosphäre, auf welche Beobachtungen ich unten zurückkomme, bestätigen das Resultat.

Die genannte Entdeckung gehört unstreitig zu den wichtigsten Resultaten, auf welche bis jetzt die mechanische Wärmetheorie geführt hat, denn sie beweist, dass die Hypothese, auf welche Pambour seine Theorie der Dampfmaschinen basirt hat, unzulässig ist. Pambour macht bekanntlich die Annahme, dass reiner gesättigter Wasserdampf bei der Expansion im Cylinder einer Dampfmaschine gesättigt bleibe, und dass sich trotz der Temperaturverminderung und Druckabnahme kein Dampf niederschlage; Pambour nimmt überhaupt an, dass die Druckänderungen nach der Curve DD, Fig. 33, stattfinden. Diese Hypothese ist nun aber nach dem Obigen als unstatthaft erwiesen; wir zeigten, dass bei der Expansion bei constanter Dampfmenge eine Mittheilung von Wärme nöthig ist. Da nun aber bei Dampfmaschinen eine solche

Wärmezuführung von aussen durch die Cylinderwände nicht erfolgt, so wird sich Dampf bei der Expansion niederschlagen; der Dampf bleibt zwar gesättigt, aber die Dampfmenge bleibt nicht constant, wie Pambour behauptet, sondern vermindert sich: umgekehrt würde reiner gesättigter Wasserdampf bei der Compression sich überhitzen, wenn man ihm nicht die Wärmemenge entziehen würde, welche sich nach Gl. (238) bestimmt.

Pambour macht ferner bei seinen Rechnungen auch noch die Annahme, dass gesättigter Dampf das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac befolge und macht daher bei der Berechnung der Dichtigkeit des Dampfes von der Navier'schen Formel $\gamma = \alpha + \beta p$ Gebrauch. Es ist aber oben (S. 293) hervorgehoben worden, dass auch diese Annahme nach der mechanischen Wärmetheorie nicht erlaubt ist und daher darf wohl gesagt werden, dass es an der Zeit ist, die ältere Theorie der Dampfmaschinen durch eine neue zu ersetzen. Wir werden unten auf diese Frage zurückkommen. Die im Vorstehenden angegebenen Formeln (235) und (236) geben beziehungsweise die Veränderung dU der innern Arbeit und die zuzuleitende Wärmemenge dQ an; was nun die äussere Arbeit dL betrifft, welche unter der Voraussetzung, dass die Dampfmenge x_1 constant bleibt, bei der Compression zu verrichten ist, bei der Expansion gewonnen wird, so findet sich dieselbe aus unserer Grundgleichung

$$dQ = A\,dU + A\,dL$$

wenn wir die angegebenen Formeln benutzen

$$A\,dL = x_1\,[h\,dt - dq - d\varrho] \qquad (240)$$

Die Arbeit, welche hier in Wärmeeinheiten gemessen sich ergiebt, erscheint der vorhandenen Dampfmenge x_1 proportional, wie sich das erwarten liess, da die vorhandene constante Flüssigkeitsmenge an den Volumenänderungen nicht Theil nimmt. Um die Lösung von bestimmten Problemen in der angegebenen Richtung zu erleichtern, habe ich für verschiedenen Druck den Werth des Integrales

$$-\int_0^t h\,dt$$

für Wasserdampf genau berechnet und in Col. 3 der folgenden Hülfstafel (S. 316) aufgeführt; das Integral bestimmte sich leicht mit Hülfe der Gl. (238).

Um den Gebrauch der vorstehenden Formeln näher darzulegen, mag ein spezielles Zahlenbeispiel folgen. Es sei die Gewichtseinheit von reinem gesättigten Wasserdampf von 5 Atmosphären Druck in einem Cylinder eingeschlossen. Dieser Dampf soll sich. ohne dass er sich überhitzt und ohne dass eine theilweise Condensation erfolgt, arbeitsverrichtend ausdehnen, bis der Druck auf 1 Atmosphäre gesunken ist. Hier ist nun in vorstehenden Gleichungen $x = x_1 = 1$ zu setzen und man erhält zunächst aus Gl. (236) die Wärmemenge Q, welche während der Expansion dem Dampfe im vorliegenden Falle mitzutheilen ist, wenn die Anfangstemperatur mit t_1, die Endtemperatur mit t_2 bezeichnet wird:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt = -\int_0^{t_1} h\,dt - \left(-\int_{0^\circ}^{t_2} h\,dt\right)$$

oder die entsprechenden Werthe der Col. 3 der folgenden Hülfstafel benutzt

$$Q = 200{,}457 - 148{,}470 = 51{,}987 \text{ Calorien.}$$

Diese Wärmemenge ist also sehr beträchtlich; wollte man also auch bei der Expansion im Cylinder einer Dampfmaschine die Annahme machen, dass die heissen Cylinderwände dem expandirenden Dampfe eine gewisse Wärmemenge mittheilen, so ist doch sicher diese Wärmemenge nie so gross, als erforderlich ist, die Dampfmenge constant zu erhalten, d. h. eine theilweise Condensation des Dampfes bei der Expansion zu verhindern; die Wärme müsste jedenfalls von einer besondern Wärmequelle hergeleitet werden.

Die Veränderung der innern Arbeit berechnet sich für vorliegenden Fall aus Gl. (235)

$$A\,(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + \varrho_2 - \varrho_1$$

Nun ist aber nach Tab. 10 entsprechend dem Dampfdrucke von 5 Atmosphären:

$$q_1 = 153{,}741 : \quad \varrho_1 = 454{,}994$$

Hülfstabelle für g

1 Druck p in Atmosphären.	2 $\frac{dp}{dt}$ in Kilogr. pro Quadratmeter.	3 $-\int_0^t h\,dt$	4 $\tau = \int_0^t \frac{dq}{T}$	
0.5	207.423	126.747	0.26273	54
1	369.708	148.470	0.31356	53
2	653.927	170.639	0.36814	52
3	909.307	183.778	0.40205	51
4	1146.689	193.163	0.42711	50
5	1371.141	200.457	0.44713	49
6	1585.431	206.394	0.46392	49
7	1791.502	211.481	0.47840	49
8	1990.199	215.862	0.49120	49
9	2183.469	219.726	0.50270	49
10	2371.153	223.178	0.51312	4
11	2554.223	226.292	0.52266	4
12	2732.873	229.134	0.53150	4
13	2907.722	231.752	0.53975	4
14	3079.063	234.165	0.54744	4

und für den Druck von 1 Atmosphäre:

$$q_2 = 100{,}500; \quad \varrho_2 = 496{,}300$$

sonach folgt:

$$A\,(U_2 - U_1) = -\,11{,}935 \text{ Calorien.}$$

Das negative Zeichen deutet auf Abnahme der innern Arbeit hin. Endlich findet sich die äussere Arbeit, die Expansionsarbeit bei unveränderlicher Dampfmenge im vorliegenden Falle

$$A\,L = Q - A\,(U_2 - U_1) = 63{,}922 \text{ Calorien}$$

oder

$$L = 424 \cdot 63{,}922 = 27102{,}9 \text{ Meterkilogr.}$$

*) Die Tabelle enthält neben den angegebenen noch eine Reihe von Werthen, auf die wir bei den weitern Untersuchungen kommen werden und leistet in Gemeinschaft mit Tab. 10 des Anhangs gute Dienste bei Berechnung spezieller Aufgaben in Hinsicht des Verhaltens des gesättigten Wasserdampfes.

ämpfe. *)

7 $\frac{1}{A}\frac{dq}{dp}$	8 $\frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$	9 $\frac{r}{Apu}$	10 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$	1 Druck p in Atmosphären.
2.0631	11.976	14.229	5.859	0.5
1.1618	11.088	13.344	9.668	1
0.6600	10.194	12.453	15.722	2
0.4763	9.675	11.935	20.749	3
0.3788	9.299	11.568	25.149	4
0.3175	9.014	11.284	29.160	5
0.2752	8.774	11.052	32.808	6
0.2440	8.557	10.856	36.155	7
0.2201	8.409	10.684	39.471	8
0.2009	8.264	10.535	42.557	9
0.1853	8.143	10.401	45.533	10
0.1723	8.004	10.280	48.217	11
0.1613	7.896	10.168	50.892	12
0.1518	7.794	10.066	53.450	13
0.1435	7.699	9.971	55.910	14

Hier wird also nicht nur die ganze zugeführte Wärmenenge Q, sondern auch ein Theil der innern Arbeit zu äusserer Arbeit verbraucht.

Der Schluss, dass das Vorzeichen des Werthes der Temperaturfunktion h die Frage entscheidet, ob dem gesättigten Dampfe bei der Expansion Wärme mitzutheilen oder zu entziehen ist, wenn er gesättigt bleiben soll, ohne dass gleichzeitig Condensation stattfindet, hat Clausius zuerst und zwar schon in seiner ersten Abhandlung gezogen. Damals lagen aber nur erst für Wasserdampf die nöthigen Versuchsresultate zu näherer Prüfung

Für die übrigen Dampfarten liessen sich ähnliche Tafeln berechnen, doch ist bis jetzt hierzu kein Bedürfniss vorhanden. Sollte noch eine andre Dampfart grössere technische Verwendung finden, so lässt sich nach den Angaben des Textes leicht die Lücke ausfüllen.

der Frage vor. Jetzt aber. nachdem Regnault auch für andere Dämpfe seine Versuchsresultate veröffentlicht hat, unterliegt es keinen Schwierigkeiten, die Frage zu beantworten, ob die übrigen Dämpfe, die nun eine Untersuchung in gleicher Richtung zulassen sich ebenso wie Wasserdampf verhalten: man hat zu diesem Zwecke eben nur für jeden einzelnen Dampf das Vorzeichen des Werthes der Temperaturfunktion h für verschiedene Temperaturen zu bestimmen. Bei dieser Bestimmung, bei der es einfach nur auf Ermittlung eines Vorzeichens ankommt, kann man als entscheidend auch die Funktion hT ansehen. Aus Gl. (237) findet sich aber

$$hT = (a + t)\frac{d\lambda}{dt} - \lambda + q \qquad (241)$$

und mit Hülfe dieser Formel bestimmt sich für diejenigen Dämpfe, für welche nach den Angaben auf S. 266 nach Regnault für die dort aufgeführten Dämpfe die Gesammtwärme λ als Funktion der Temperatur bekannt und für welche q (S. 262) in gleicher Weise bestimmt ist, leicht der Werth hT. Man findet nach entsprechender Substitution in vorstehende Formel Folgendes:*

Es ist für

Wasserdampf:

$$hT = -523.23 + t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0.000\,0003\,t^3$$

Aetherdampf:

$$hT = +28.85 + 0{,}2257\,t - 0{,}000\,2596\,t^2$$

Acetondampf:

$$hT = -40.473 + 0{,}2247\,t - 0{,}000\,119\,t^2$$

Chloroformdampf:

$$hT = -29.462 + 0{,}2323\,t - 0{,}000\,0507\,t^2$$

Chlorkohlenstoffdampf:

$$hT = -12.087 + 0{,}1041\,t - 0.000\,081\,t^2$$

Schwefelkohlenstoffdampf:

$$hT = -50{,}139 + 0.0101\,t - 0{,}000\,3308\,t^2$$

* Vergl. die Abhandlungen des Verfassers in der Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 1863. S. 68 »Das Verhalten verschiedener Dämpfe bei der Expansion und Compression« und »Tabelle für gesättigte Aetherdämpfe.« S. auch Combes. Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur. Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale. Paris 1863 — 1864.

Diese Formeln geben nun in der vorliegenden Frage Auskunft und führen zu dem merkwürdigen Resultate, dass für alle die hier aufgeführten Dämpfe mit Ausnahme des Aetherdampfes innerhalb der Temperaturgrenzen, für welche die Formeln von Regnault überhaupt gelten, der Werth von hT, also der Werth der Funktion h negativ ausfällt. Diese Dämpfe verhalten sich wie Wasserdampf, d. h. man muss denselben bei der Expansion Wärme mittheilen und ihnen bei der Compression Wärme entziehen, wenn sie gesättigt bleiben sollen und sich auch kein Dampf niederschlagen soll. Hat man Anfangs reinen gesättigten Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit, so wird, wenn eine Mittheilung und Entziehung von Wärme nicht erfolgt, bei der Expansion ein Niederschlagen von Dampf stattfinden und bei der Compression geht der Dampf in den überhitzten Zustand über. Nur der Aetherdampf zeigt das entgegengesetzte Verhalten, er überhitzt sich bei der Expansion und schlägt sich nieder bei der Compression. Auf dieses abweichende Verhalten des Aetherdampfes hat zuerst Hirn* aufmerksam gemacht. Wir sehen aber jetzt, dass nur diese Dampfart unter den Dämpfen, die eine Untersuchung in der angegebenen Richtung zulassen, diese Abweichung zeigt, die übrigen Dämpfe stehen auf der Seite des Wasserdampfes, selbst die Alkohol- und Benzindämpfe, die oben nicht erwähnt sind, weil für diese der Werth hT nicht als Funktion von t hingestellt werden kann; für Alkoholdampf fehlt uns noch die Formel für die Gesammtwärme λ und für Benzindampf die für die Flüssigkeitswärme q; trotzdem lässt sich auch für diese Dämpfe die Frage beantworten.

Man ersieht aus obigen Formeln, dass hinsichtlich des Vorzeichens von hT schon das erste nicht mit t behaftete Glied der rechten Seite, die Frage entscheidet. Dieses erste Glied stellt aber den Werth von hT für $t = 0$ dar: wenn man also nur diesen Werth ermittelt, so ist die Frage schon beantwortet. Setzen wir daher in Gl. (241) $t = 0$ und bezeichnen wir die dieser Temperatur entsprechenden Werthe durch den angehängten Index 0, so folgt weil $q_0 = 0$ ist

---

* Hirn. Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la Théorie mécanique de la chaleur et des équations qui en découlent. Cosmos. XII Année, 22e vol. S. 413.

$$(h\,T)_0 = a\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 - \lambda_0$$

Nach **Regnault** schreibt sich aber die empirische Formel für die Gesammtwärme

$$\lambda = \alpha + \beta t + \delta t^2$$

wo α, β, δ constante Grössen sind, die **Regnault** für die verschiedenen Dämpfe bestimmte.

Hiernach folgt

$$\frac{d\lambda}{dt} = \beta + 2\delta t$$

und daher für $t = 0$

$$\lambda_0 = \alpha \text{ und } \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 = \beta$$

und hieraus der Werth von $h\,T$ für $t = 0^0$

$$(h\,T)_0 = \beta a - \alpha$$

Für Benzindampf giebt **Regnault** (Anmerkung S. 268)

$$\lambda = 109{,}00 + 0{,}24429\, t - 0{,}0001315\, t^2$$

Hiernach ist $\alpha = 109{,}00$; $\beta = 0{,}24429$ und daher wegen $a = 273$ der Werth $(h\,T)_0$ für Benzindampf

$$(h\,T)_0 = -42{,}309$$

Dieser Dampf stellt sich also auf die Seite des Wasserdampfes.

Bei Alkoholdampf ist dieses Verfahren nicht anwendbar, doch lässt sich auch hier mit Hülfe der Tabelle die Frage beantworten.

Die oben für h hingestellte Gleichung

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

schreibt sich auch

$$h\,dt = c\,dt + T d\left(\frac{r}{T}\right)$$

und daher folgt, wenn $dq = c\,dt$ gesetzt wird

$$\int \frac{h\,dt}{T} = \int \frac{dq}{T} + \frac{r}{T}$$

Es ist nun klar, dass der Werth auf der rechten Seite dieser Gleichung mit wachsender Temperatur abnehmen muss, wenn h negativ ist, und eine solche Abnahme zeigt sich wirklich; so erhält man beziehungsweise für die Temperaturen 0°, 40°, 80° für den Werth der rechten Seite vorstehender Formel: 3,1413; 3,1172; 3,0447; wenn man für r die entsprechenden Werthe der Tabelle benutzt und von Gl. (192) S. 262 entsprechenden Gebrauch macht.

Wir haben also gefunden, dass von 8 Dampfarten, die wir untersuchen konnten, nur der Aetherdampf das angegebene abweichende Verhalten zeigt. Eine nähere Erklärung dieser sonderbaren Abweichung lässt sich bis jetzt nicht geben.

Von der adiabatischen Curve der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen.

Die adiabatische Curve giebt an, in welcher Weise sich der Druck einer Dampf- und Flüssigkeitsmischung mit dem Volumen ändert, wenn während der Expansion oder Compression der Masse Wärme weder mitgetheilt, noch entzogen wird.

Da wir auch hier zwischen dem äussern und innern Druck Gleichheit annehmen, so kann man von Gl. (227) S. 300 Gebrauch machen; setzt man dort entsprechend der hier gemachten Voraussetzung $dQ = 0$ so folgt:

$$0 = dq + Td\left(\frac{xr}{T}\right)$$

und diese Gleichung ist integrabel: dividirt man nämlich durch T und führt man die einfachere Bezeichnung

$$\int_0^t \frac{dq}{T} = \tau \tag{242}$$

ein, so findet sich:

$$\frac{xr}{T} + \tau = \text{Const.}$$

Das Integral (242) lässt sich für die verschiedenen Dämpfe für verschiedene Temperaturen berechnen, wenn man von den auf S. 262 für q gegebenen Formeln Gebrauch macht; speziell für Wasserdampf habe ich in Col. 4 der Tabelle auf S. 316 für verschiedenen Druck den Werth angegeben. Setzen wir entsprechend der Anfangstemperatur $t_1 : \tau_1$ und r_1 statt τ und r und ist x_1 die spezifische Dampfmenge im Anfange, so ergiebt vorstehende Formel

$$\frac{xr}{T} + \tau = \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau \tag{243}$$

und diese Gleichung giebt nun das Mittel an die Hand für jede andere Temperatur t und den zugehörigen Druck p die spezifische Dampfmenge x zu berechnen; diese Gleichung ist es, welche zuerst von Clausius und Rankine aufgestellt wurde, und welche ebenfalls auf die merkwürdigen Eigenschaften der gesättigten Dämpfe hindeutet, die wir vorhin bei der Untersuchung der Curve constanter Dampfmenge hervorgehoben haben. Gl. (243) spricht sich nur bestimmter aus; sie zeigt nicht nur, dass bei der Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve die Dampfmenge variirt, also ein Verdampfen oder Niederschlagen von Dampf stattfindet, sondern liefert zugleich das Mittel, für jeden Moment der Zustandsänderung die spezifische Dampfmenge x zu berechnen.

Clausius schreibt die Formel nur in etwas anderer Gestalt: indem in dessen Abhandlungen in dem Ausdrucke $dq = c\,dt$ die spezifische Wärme c der Flüssigkeit näherungsweise constant angenommen wird (für Wasser nimmt Clausius für c den der Temperatur 100^0 entsprechenden Werth von 1,013; während ich in meinen bisher erschienenen Schriften für technische Untersuchungen, bei denen man es gewöhnlich mit höhern Temperaturen zu thun hat, im Mittel $c = 1{,}0224$ angenommen habe).

Man erhält dann nach Gl. (242) näherungsweise

$$\tau = \int_0^t \frac{c\,dt}{T} = c \operatorname{logn.} \frac{T}{a}$$

und daher statt Gl. (243)

$$\frac{x r}{T} = \frac{x_1 r_1}{T_1} + c \text{ logn. } \frac{T_1}{T}$$

und das ist die Form,. in der die Gleichung von Clausius gegeben worden ist.

Ich werde jedoch in der Folge die Temperaturfunktion τ als genau ermittelt voraussetzen, da die genaue Bestimmung keinen Schwierigkeiten unterliegt und uns jetzt bei Lösung numerischer Aufgaben die Hülfstabelle weitere Rechnungen erspart. Es soll daher in der Folge auch nur von Gl. (243) Gebrauch gemacht werden.

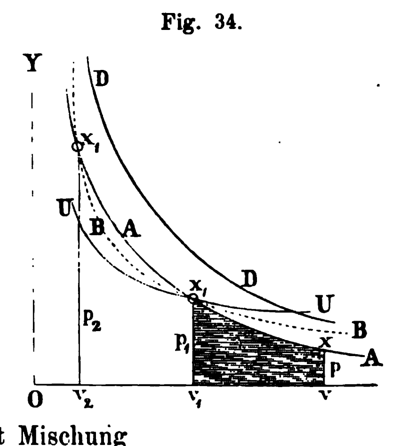


Fig. 34.

Der Verlauf der adiabatischen Curve, die durch einen gewissen Punkt x_1 geht (Fig. 34), welcher dem Anfangszustande (p_1, v_1, x_1) entspricht, lässt sich leicht in folgender Weise ermitteln. Ist die Anfangstemperatur t_1 und die spezifische Dampfmenge x_1 für den Anfang gegeben, so ist auch der Druck p_1 und nach Obigem der zugehörige Werth u_1 bekannt und es bestimmt sich das Anfangsvolumen der Gewichtseinheit Mischung

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

Für irgend einen andern Druck p und die zugehörige Temperatur t bestimmt sich dann mit Hülfe der Gl. (243) die zugehörige spezifische Dampfmenge x. Um solche Rechnungen zu erleichtern, sind für Wasserdampf in der Hülfstabelle S. 316 die Werthe von τ und $r : T$ in den Columnen 4 und 6 berechnet, dabei wurde die Verdampfungswärme auf Grund der Angaben der Tabelle 10 nach der Formel $r = \varrho + Apu$ bestimmt; Col. 5 giebt die entsprechenden Werthe.

Zeigt sich nun $x > x_1$ so hat eine Verdampfung während des Ueberganges stattgefunden, während das Resultat $x < x_1$ auf Condensation hindeutet; sollte sich im erstern Falle $x > 1$ herausstellen, so deutet das an, dass der Dampf in den überhitzten Zustand übergegangen ist, in diesem Falle hört die An-

wendbarkeit der Formeln auf, weil dieselben ausdrücklich nur so lange gelten, als der Dampf im gesättigten Zustand bleibt.

Ist x bestimmt und $x \leqq 1$ gefunden worden, so ist dann das zugehörige Volumen der Mischung:

$$v = xu + \sigma$$

und das Expansions- oder Compressionsverhältniss, das wir in Zukunft mit ε bezeichnen werden

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1}$$

Man kann hiernach von einem gewissen Anfangszustand ausgehend, für jeden andern Druck p das zugehörige spezifische Volumen v berechnen und sonach die adiabatische Curve der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen graphisch darstellen. Die Gleichung dieser Curve lässt sich freilich nicht in der Form $p = f(v)$ auf theoretischem Wege darstellen, vielmehr gewinnt man einzelne Punkte nur auf Umwegen. Hierin liegt der Grund, weswegen die Formeln der mechanischen Wärmetheorie bei Berechnung der Dampfmaschine noch keine allgemeine Anwendung gefunden haben; wir kommen übrigens auf diese Frage zurück; hier mögen zunächst die vorstehenden Angaben durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden.

Angenommen in einem Cylinder befinde sich gerade ein Kilogramm reiner gesättigter Wasserdampf (ohne Beimischung von Wasser) von 4 Atmosphären Druck; so ist hier $x_1 = 1$ Kilogr. und nach der Tabelle S. 316

$$\tau_1 = 0{,}42711; \; r_1 : T_1 = 1{,}21129 \text{ und}$$
$$u_1 = 0{,}4474 \text{ nach Tab. 10.}$$

Es ist sonach das Anfangsvolumen

$$v_1 = u_1 + \sigma = 0{,}4484 \text{ Cubikmeter}$$

und dann nach Gl. (243)

$$\frac{xr}{T} + \tau = 1{,}63840$$

Dehnt sich nun dieser Dampf arbeitsverrichtend unter Ueberwindung eines seinem Drucke gleichen Widerstandes und ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme soweit aus, bis der Druck

auf 1 Atmosphäre gesunken ist, so findet sich, weil diesem Drucke entsprechend (S. 316) $\tau = 0{,}31356$ und $r : T = 1{,}43834$ ist, nach vorstehendem Ausdrucke

$$x = 0{,}9211 \text{ Kilogr.}$$

Es ist sonach $x < x_1$, es hat also bei der Expansion eine theilweise Condensation stattgefunden; ein Resultat, welches nach der Darstellung auf S. 313 zu erwarten war.

Dem Drucke von 1 Atmosphäre entsprechend ist (Tab. 10) $u = 1{,}6494$ und daher jetzt das Volumen der Mischung

$$v = xu + \sigma = 1{,}5203 \text{ Cubikmeter}$$

und das Expansionsverhältniss:

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = 3{,}390$$

Die Dampfmenge, welche sich hierbei niederschlägt, beträgt $1 - x = 0{,}0789$ Kilogr. und erscheint demnach unbedeutend; auf das Endresultat (Endvolumen und Expansionsverhältniss) ist aber das Resultat doch von nicht zu übersehendem Einfluss, denn hätte die Condensation nicht stattgefunden, so wäre das Endvolumen

$$v = u + \sigma = 1{,}6504 \text{ und das Expansionsverhältniss:}$$

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = 3{,}681$$

Wir haben hier bei reinem gesättigten Wasserdampf gefunden, dass mit der Expansion eine theilweise Condensation verbunden; für die Compression hätten wir hingegen $x > 1$ gefunden, ein Zeichen, dass mit der Compression eine Ueberhitzung des Dampfes verbunden ist. immer unter der Voraussetzung, dass im Anfange der Dampf gesättigt und kein Wasser vorhanden ist. mit andern Worten, dass der Punkt x_1 (Fig. 34) in der Grenzcurve DD liegt. Die adiabatische Curve nähert sich sonach rascher der Abscissenaxe, als die Curve DD und tritt rückwärts in den Raum, welcher dem Dampfe im überhitzten Zustande entspricht. Genau das gleiche Resultat geben auch die übrigen Dämpfe der angehängten Tabelle; nur der Aetherdampf macht, wie wir nach Obigem wissen, eine Ausnahme; für diese Dampfart giebt die Gl. (243) für die Expansion $x > 1$, wenn im Anfange $x_1 = 1$ angenommen wird.



Bei den vorstehenden Betrachtungen haben wir, wie erwähnt, zunächst vorausgesetzt, dass im Anfange der Zustandsänderungen nach der adiabatischen Curve keine Flüssigkeit vorhanden sei, eine nähere Untersuchung der Gl. (243) zeigt nun aber, dass die Erscheinungen sich ganz anders gestalten können, wenn man von der genannten speziellen Voraussetzung abgeht.

Wir wollen zunächst den andern Grenzfall behandeln, indem wir voraussetzen, es sei im Anfange kein Dampf, sondern nur Flüssigkeit (1 Kilogr.) von der Temperatur t_1 vorhanden, und dieselbe stehe unter einem äussern Drucke p_1, welcher dem gleich ist, welchen der zugehörige Dampf von der Temperatur t_1 haben würde. Am besten stellt man sich vor, die Flüssigkeit befinde sich in einem Cylinder mit einem Kolben, der auf dem Flüssigkeitsspiegel ruht und von aussen mit p_1 belastet ist. Vermindert man nun den äussern Druck entsprechend, so weicht der Kolben zurück und es bildet sich Dampf, der arbeitsverrichtend sich Raum schafft. Findet bei diesem Vorgange weder Mittheilung noch Entziehung von Wärme statt, so lässt er sich ebenfalls nach den angegebenen Formeln beurtheilen: mit dem Verdampfen der Flüssigkeit ist eine Temperatursenkung und entsprechende Druckabnahme verbunden und der Verlauf der adiabatischen Curve, welche für jeden Moment des Ueberganges die Beziehung zwischen Druck und Volumen angiebt, lässt sich auf demselben Wege, den wir oben angegeben haben, verfolgen; man hat im vorliegenden Falle einfach nur das Anfangsvolumen gleich σ und die spezifische Dampfmenge x_1 für den Anfang Null zu setzen.

Denken wir uns z. B. ein Kilogramm Wasser von der Temperatur $t_1 = 144^0$ unter dem Druck von 4 Atmosphären und nehmen wir an, es habe der äussere Druck nach der adiabatischen Curve bis auf 1 Atmosphäre abgenommen, so ist jetzt die Temperatur $t = 100^0$ und die Dampfmenge, welche sich dabei gebildet hat, berechnet sich nach Gl. (243) durch den Ausdruck:

$$\frac{x r}{T} + \tau = \tau_1$$

und findet sich, wenn wir die Zahlenwerthe des vorhin berechneten Beispieles wieder verwenden

$$x = 0{,}07894 \text{ Kilogr.}$$

Das Volumen der Mischung ist jetzt

$$v = xu + \sigma = 0{,}1312 \text{ Cubikmeter}$$

und das Expansionsverhältniss

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{v}{\sigma} = 131{,}2$$

weil für Wasser das spezifische Volumen $\sigma = 0{,}001$ zu setzen ist.

Aus dem Vorstehenden folgt für solche Dämpfe, die sich wie Wasserdampf verhalten, ein merkwürdiges Resultat. Denken wir an Expansion nach der adiabatischen Curve zwischen zwei fest vorgeschriebenen Grenzpressungen p_1 und p, so findet ein Niederschlagen von Dampf statt, wenn im Anfange nur gesättigter Dampf, ohne Beimischung von Flüssigkeit vorhanden ist; es findet hingegen eine Bildung von Dampf statt, wenn im Anfange kein Dampf sondern nur Flüssigkeit vorhanden ist. Man muss daraus schliessen, dass für die gleichen Grenzpressungen ein Mischungsverhältniss x_1 existirt, für welches die spezifische Dampfmenge x_1 im Anfange und am Ende der Expansion die gleiche ist; und das bestätigt die Rechnung; setzen wir nämlich in Gl. (243) $x = x_1$, so folgt dieses Mischungsverhältniss

$$x_1 = \frac{\tau_1 - \tau}{\frac{r}{T} - \frac{r_1}{T_1}} \tag{244}$$

Nehmen wir z. B. Wasserdampf und die Pressungen 4 und 1 Atmosphäre, so findet sich, wenn wir wieder die Zahlenwerthe der vorigen Beispiele einsetzen, die der Hülfstabelle S. 316 und der Tab. 10 entnommen wurden:

$$x_1 = 0{,}5001 \text{ Kilogr.}$$

also fast genau $x_1 = 0{,}5$, d. h. wenn im Anfange dem Gewichte nach gerade soviel Dampf, wie Wasser vorhanden ist, so ist dasselbe Mischungsverhältniss auch am Ende der Expansion von 4 auf 1 Atmosphäre vorhanden. Es deutet das einfach darauf hin, dass in den beiden Grenzzuständen die adiabatische Curve und die Curve constanter Dampfmenge sich schneiden, wie das in Figur (34) S. 323 angedeutet ist. Die punktirte Curve BB stellt für Wasserdämpfe und die verwandten Dämpfe die Curve constanter Dampfmenge dar, während AA die adiabatische Curve

repräsentirt. Im ersten Theile der Expansion nach der adiabatischen Curve von dem einen Grenzzustande nach dem andern findet erst Verdampfen, im andern Theile ein Niederschlagen statt und zwar der Art, dass eben am Ende wieder die gleiche Dampfmenge, wie im Anfange vorhanden ist. Benutzt man die Werthe von τ und $r:T$ der Hülfstabellen S. 316 so lässt sich das Mischungsverhältniss auch für andre Spannungsgrenzen nach Gl. 244 berechnen: so findet sich z. B. für die Pressungen 10 und 5, 5 und 1, 1 und $^1/_2$ Atmosphären beziehungsweise $x_1 = 0{,}5606$, $0{,}5044$ und 0.4599 also immer in der Nähe $x_1 = 0{,}5$ liegend; die Abweichungen sind aber schon zu bedeutend, als dass man hier auf ein einfaches Gesetz, etwa schliessen dürfte, dass für eine gewisse Dampfart Gl. (244) für beliebige Grenztemperaturen immer auf denselben Werth von x_1 bei Wasserdampf z. B. auf $x_1 = 0{,}5$ führe. Setzen wir das auf einen Augenblick wirklich voraus, bezeichnen wir diesen constanten Werth von x_1 mit k und gehen wir in Gl. (244) zum Differential über, so fände sich:

$$k = -\frac{d\tau}{d\left(\frac{r}{T}\right)}$$

oder die Differentiation ausgeführt und τ durch den Werth (Gl. 242) ersetzt, ergäbe:

$$k = \frac{c}{\frac{r}{T} - \frac{dr}{dt}}$$

Benutzt man hier noch die für die Clausius'sche Temperaturfunktion h gegebene Formel (229), so würde folgen

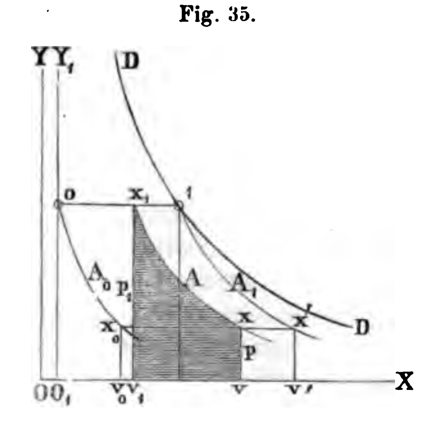
$$h = -\frac{1-k}{k}\cdot c$$

und wenn man auf beiden Seiten mit dt multiplicirt und zwischen 0 und t integrirt, so würde das Integral von $h\,dt$ einfach als ein Vielfaches des Integrales von $c\,dt$ d. h. von q erscheinen. Das wird aber keineswegs von den entsprechenden Werthen der Hülfstafel S. 316 Col. 3 und der Tab. 10 bestätigt; ebensowenig bei andern Dämpfen, als Wasserdampf.

Von Wichtigkeit hingegen ist folgende Betrachtung. Geht

man von einem gewissen Anfangsdruck p_1 aus, denkt man sich die spezifische Dampfmenge sei x_1 ein, zweites Mal 0 und ein drittes Mal 1 und legt man durch die drei den Anfangszuständen 0, x_1 und 1 entsprechenden Punkte die drei adiabatischen Curven A_0, A, A_1 (Fig. 35) so stehen diese in einem eigenthümlichen Zusammenhang. Setzen wir die Expansion (bei Aetherdampf die Compression) so weit fort, bis in allen drei Fällen der Druck auf den Werth p übergegangen ist, und bezeichnen wir die spezifische Dampfmenge in den drei Fällen für den Endzustand mit x_0, x und x', so folgt nach Gl. (243) beziehungsweise:

Fig. 35.



$$\frac{x_0 r}{T} + \tau = \tau_1$$

$$\frac{x r}{T} + \tau = \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1$$

$$\frac{x' r}{T} + \tau = \frac{r_1}{T_1} + \tau_1$$

Hiernach findet sich durch entsprechende Verbindung

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = x_1 \tag{245}$$

Ist das Endvolumen in den drei Fällen v_0, v und v' so folgt:

$$v_0 = x_0 u + \sigma;\ v = x u + \sigma;\ v' = x' u + \sigma$$

und daher durch entsprechende Substitution in den vorigen Ausdruck:

$$\frac{v - v_0}{v' - v_0} = x_1 \tag{246}$$

Wäre hiernach für einen bestimmten Anfangsdruck der Verlauf der adiabatischen Grenzcurven (entsprechend der spezifischen Dampfmenge $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$) bekannt, so liesse sich leicht

der Verlauf der Curve, welche der beliebigen Anfangsdampfmenge x_1 entspricht, ermitteln, man hat einfach auf der Strecke $(x_0\, x')$ Fig. 35 den Punkt x dieser Curve so zu wählen, dass das Verhältniss der Längen $(x x_0)$ und $(x' x_0)$ gleich x_1 ist. Wir haben oben (S. 309) gezeigt, dass in gleicher Weise auch die Curven constanter Dampfmenge zusammenhängen.

Es ist nun ferner noch die Frage aufzuwerfen, welche äussere Arbeit gewonnen wird oder aufzuwenden ist, wenn die Dampf- und Flüssigkeitsmischung nach der adiabatischen Curve, d. h. ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme aus einem Zustand in den andern übergeht. Wir haben hier einfach in der Fundamentalgleichung

$$dQ = A\,(dU + dL)$$

$dQ = 0$ zu setzen und erhalten daher die Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$AdL = -\,AdU$$

oder unter Benutzung von Gl. (220) S. 296

$$AdL = -\,dq - d(x\varrho)$$

und hieraus durch Integration:

$$AL = q_1 - q + x_1\varrho_1 - x\varrho \qquad (247)$$

Da nun für den Endzustand die spezifische Dampfmenge x durch Gl. (243) bestimmbar ist, so lässt sich hiernach die äussere Arbeit L leicht ermitteln.

Kehren wir wieder zu dem vorhin gegebenen Zahlenbeispiel S. 324 zurück, indem wir voraussetzen, es soll eine Mischung von Wasser und Wasserdampf nach der adiabatischen Curve expandiren von 4 Atmosphären auf 1 Atmosphäre Druck, so fand sich, wenn anfänglich nur gesättigter Dampf, ohne Beimischung von Wasser, vorausgesetzt wurde, die spezifische Dampfmenge x am Ende der Expansion $x = 0{,}9211$ Kilogr.: setzt man diesen Werth in Gl. (247) sowie $x_1 = 1$ und nach den Angaben der Tabelle 10 $q_1 = 145{,}310$; $q = 100{,}500$; $\varrho_1 = 461{,}496$; $\varrho = 496{,}300$, so folgt die äussere Arbeit:

$$AL = 49{,}164 \text{ Cal.}$$

und

$$L = 20845{,}5 \text{ Meterkilogr.}$$

Unter der Voraussetzung aber, dass anfangs kein Dampf

vorhanden, also $x_1 = 0$ ist, fand sich (S. 326) die Dampfmenge am Ende: $x = 0{,}07894$, und für diesen Fall giebt Gl. (247) für dieselben Grenzpressungen:

$$A L = 5{,}632 \text{ Cal.}$$

und

$$L = 2388{,}0 \text{ Meterkilogr.}$$

Mit gleicher Leichtigkeit bestimmt sich die äussere Arbeit auch für jeden beliebigen andern zwischen 0 und 1 liegenden Anfangswerth der Dampfmenge x_1; die drei Arbeitswerthe L_0, L und L' entsprechend der Anfangsdampfmenge 0, x_1 und 1 stehen aber bei gleichen Endpressungen in einfacher Beziehung zu einander.

Man hat nämlich nach Gl. (247) in den drei Fällen:

$$\begin{aligned} A L_0 &= q_1 - q - x_0 \varrho \\ A L &= q_1 - q + x_1 \varrho_1 - x \varrho \\ A L' &= q_1 - q + \varrho_1 \quad - x' \varrho \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Verbindung mit gleichzeitiger Berücksichtigung von Gl. (245)

$$A L = x_1 (A L' - A L_0) + A L_0 \tag{248}$$

dieselbe Beziehung, die sich nach Gl. (246) unter den Werthen des Endvolumens herausgestellt hat. In Fig. 35 ist die, die Arbeit L darstellende, Fläche schraffirt. Ist sonach, wie es in dem vorhin berechneten Beispiele geschehen, die Arbeit L_0 und L' bestimmt, so berechnet sich nun leicht die Arbeit L unter Voraussetzung derselben Endpressungen für jeden andern zwischen 0 und 1 liegenden Werth der spezifischen Dampfmenge x_1.

In unserm Beispiele findet sich:

$$A L = 43{,}532\, x_1 + 5{,}632$$

also z. B. für die Dampfmenge $x_1 = 0{,}80$

$$A L = 40{,}458 \text{ Cal.}$$

Die Arbeit nimmt sonach, wenn man immer dieselben Grenzpressungen p_1 und p voraussetzt, um somehr ab, je kleiner die anfängliche spezifische Dampfmenge x_1 ist, was leicht begreiflich ist.

Nachdem wir im Vorstehenden den Verlauf der adiabatischen Curve für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen angegeben

haben, können nun auch die allgemeinen Sätze, die wir im ersten Abschnitte S. 82 u. f. entwickelten, auf die genannten Mischungen anwenden. Wir fanden dort (S. 84), dass für **jeden** Uebergang eines Körpers von einer zu einer zweiten bestimmt vorgeschriebenen adiabatischen Curve das Integral:

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

eine constante Grösse sei, vorausgesetzt, der Uebergang finde auf umkehrbarem Wege statt. Ersetzen wir nun S durch die absolute Temperatur T und benutzen wir für dQ die für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen oben gegebene Gl. (227) S. 300 so folgt:

$$AP = \int \left[\frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T} \right) \right]$$

und hieraus durch Integration, wenn wir die durch Gl. (242) S. 321 angegebene Bezeichnung benutzen und die Werthe, welche dem Anfangszustande entsprechen, mit dem Index 1 bezeichnen:

$$AP = \left(\tau + \frac{xr}{T} \right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1} \right) \tag{249}$$

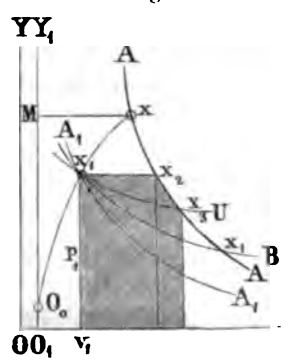


Fig. 36.

Das erste Glied der rechten Seite bedeutet aber nach Darlegung von Gl. (243) die Constante der adiabatischen Curve A (Fig. 36) und das zweite Glied die Constante der adiabatischen Curve A_1, in welcher der Ausgangspunkt x_1 liegt, woraus ebenfalls das Resultat folgt, dass das Wärmegewicht P constant sein muss. Nehmen wir an, beide Curven seien durch ihre Constanten gegeben und die Mischung werde auf irgend einem gegebenen umkehrbaren Wege aus einer Curve in die andere übergeführt, ist weil P bekannt ist, der Endzustand leicht zu ermitteln.

Hätte z. B. die Ueberführung nach der isothermischen Curve ... bei constantem Drucke und constanter Temperatur statt-

gefunden (x_1 x_2 Fig. 36), so wäre, wenn x_2 die Dampfmenge am Ende ist:

$$AP = \frac{r_1}{T_1}(x_2 - x_1) = \frac{r}{T}(x_2 - x_1) \tag{250}$$

Da P nach der Voraussetzung bekannt ist, so bestimmt sich hieraus x_2 und dann leicht das Endvolumen. Wäre anfangs $x_1 = 0$ und am Ende $x_2 = 1$, so fände sich

$$P = \frac{r_1}{AT_1} = \frac{r}{AT} \tag{251}$$

und hieraus folgt eine besondere Bedeutung des Quotienten $r : T$, der in obigen Formeln vielfach erscheint und den wir in der Tabelle S. 316 für Wasserdampf für verschiedene Pressungen angegeben haben. Dividirt man diesen Werth durch A, d. h. multiplicirt man ihn mit 424, so ergiebt sich P, d. h. die Summe der Wärmegewichte, die der Gewichtseinheit Flüssigkeit zugeleitet werden muss, um sie bei constantem Drucke in gesättigten Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln. Aus Col. 6 der Hülfstafel S. 316 ist ersichtlich, dass dieser Werth P bei Wasserdampf langsam mit wachsendem Drucke abnimmt. Für irgend eine andre Dampfmenge $(x_2 - x_1)$ Kilogr. ist das Wärmegewicht P nach Gl. (250) zu bestimmen, und wenn daher gerade die Cubikeinheit Dampf gebildet worden wäre, so hätte man $(x_2 - x)$ durch das Gewicht der Volumeneinheit, d. h. durch die Dichtigkeit γ zu ersetzen. Nun ist aber nach den Angaben auf S. 287 genau genug $\gamma = 1 : u$, daher folgt, dass wir den Werth:

$$\frac{r}{AuT}$$

als das Wärmegewicht ansehen können, welches der Flüssigkeit von der Temperatur t zugeleitet werden muss, um bei constantem Drucke die Volumeneinheit Dampf von der Temperatur t zu erzeugen. Der vorstehende Werth ist aber nach Gl. (212) nicht anders, als der Werth $\frac{dp}{dt}$; es findet sich hiernach eine neue eigenthümliche Bedeutung dieses Differentialquotienten.

Es lässt sich aber die Untersuchung in der angedeuteten Richtung leicht weiter ausdehnen. Es stellt nämlich der Werth:

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{T}$$

ebenfalls ein Wärmegewicht dar, und zwar dasjenige, welches der Gewichtseinheit Flüssigkeit mitgetheilt werden muss, um sie von 0 auf t^0 bei constantem Drucke zu erwärmen, oder allgemeiner gesprochen, da wir die Flüssigkeiten bis auf Weiteres als incompressibel ansehen müssen, um die Flüssigkeit ohne Dampfentwickelung von 0^0 auf die Temperatur t zu bringen. Bezeichnen wir die Constante der adiabatischen Curve mit C, setzen wir also in Gl. 249

$$C = \frac{\tau}{A} + \frac{xr}{AT} \tag{252}$$

so repräsentirt C das Wärmegewicht, welches der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0^0 Temperatur mitgetheilt werden muss, um bei constantem Drucke daraus x Kilogramm Dampf von der entsprechenden Temperatur t zu bilden.

Trägt man in Fig. 36 das Volumen σ der Flüssigkeit als Abscisse auf, d. h. machen wir $OO_1 = \sigma$ und nehmen wir die Ordinate OO_0 des Punktes O_0 gleich dem Dampfdrucke, welcher der Temperatur 0^0 entspricht, so können wir den Uebergang nach der adiabatischen Curve A auf folgende Art bewerkstelligt denken; zunächst wird die Flüssigkeit von 0^0 auf t^0 erwärmt, wobei der Druck gegen die Flüssigkeit in der Art wachsen soll, wie das bei gleicher Temperaturerhöhung mit gesättigtem Dampf der Fall ist. Da hiebei keine Dampfbildung erfolgt und das Volumen der Flüssigkeit als constant betrachtet wird, so findet der Uebergang auf dem Wege O_0M statt und das zugehörige Wärmegewicht ist:

$$\int \frac{dq}{AT} = \frac{\tau}{A}$$

Wird nun im Weitern auf dem Wege Mx (Fig. 36) bei constantem Drucke die Dampfmenge x erzeugt, so entspricht nach Obigem diesem Vorgange das Wärmegewicht:

$$\frac{r x}{A T}$$

Beide Gewichte zusammengefasst ergeben aber nach dem Vorigen die Constante C der adiabatischen Curve A; diese Constante lässt sich daher ansehen als das Wärmegewicht, welches erforderlich ist, um aus der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0^0 und dem zugehörigen Dampfdruck, x Kilogramm Dampf von der Temperatur t zu erzeugen, gleichgültig, ob das auf dem angenommenen Wege $O_0 M x$ oder auf irgend einem andern Wege $O_0 x_1 x$ (Fig. 36) geschieht.

Die Constante der adiabatischen Curve lässt sich auch in anderer Form schreiben; ersetzt man x durch den Werth, der aus der Gleichung $v = x u + \sigma$ sich ergiebt und benutzt man bei der Umformung noch Gl. (212) S. 274, so folgt auch:

$$C = \frac{\tau}{A} - \sigma \frac{dp}{dt} + v \frac{dp}{dt} \tag{253}$$

Liesse sich hier der Werth τ und der Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ einfach als Funktion von p darstellen, so wäre damit die Gleichung der adiabatischen Curve in der Form $p = f(v)$ gegeben; leider ist das bis jetzt nicht gelungen; wir kommen unten auf Versuche dieser Art zurück.

Nehmen wir wie vorhin an, die beiden adiabatischen Curven A und A_1 (Fig. 36) seien dargestellt und durch ihre Constanten bestimmt, so wird, wenn der Uebergang vom Anfangszustand x_1 nach der zweiten adiabatischen Curve auf der Curve B constanter Dampfmenge x_1 erfolgen soll:

$$A C = \tau + \frac{x_1 r}{T}$$

sein und hieraus liesse sich (freilich nur durch Probiren) die Endtemperatur t und dann der entsprechende Druck und das Volumen bestimmen; es wären sonach die Coordinaten des Durchschnittspunktes x_1 der Curve constanter Dampfmenge mit der zweiten adiabatischen Curve A ermittelt.

Hätte hingegen der Uebergang auf der isodynamischen Curve, also bei constantem Werthe von U stattgefunden, so wäre die Dampfmenge x am Ende, die mit x_3 bezeichnet werden mag, aus Gl. (233) S. 305 zu bestimmen, es wäre

$$x_3 = \frac{q_1 + x_1 \varrho_1 - q}{\varrho}$$

und dieser Werth für x in folgende Formel gesetzt:

$$A\,C = \tau + \frac{x\,r}{T}$$

würde wieder eine Formel liefern, aus der die Temperatur t, der Druck p und das Volumen v für den Endzustand sich ermittelt: es ergeben sich also dadurch die Coordinaten des Durchschnittspunktes x_3 (Fig. 36) der isodynamischen und der adiabatischen Curve. Der hier angedeutete Weg zur Bestimmung des Durchschnittspunktes x_3 ist freilich sehr mühsam zu benutzen, da sich die Endtemperatur t nur durch Probiren ermitteln lässt. Weit bequemer ist es in einem solchen Falle, die beiden adiabatischen Curven A und A_1 und ebenso die isothermische und isodynamische Curve, welche dem Anfangszustande x_1 entsprechen, graphisch darzustellen, was nach dem oben Angegebenen leicht ausführbar ist, und auf solche Weise die Durchschnittspunkte x_2 und x_3 zu ermitteln. Dadurch ist nach den Angaben auf S. 83 u. f. auch zugleich für den Uebergang aus einer adiabatischen Curve A_1 zur andern A der Werth P ermittelt, indem man nur den durch Schraffirung in Fig. 36 angedeuteten Flächeninhalt durch T_1 dividirt.

Aus diesen Angaben sowohl, als aus den Angaben, die auf S. 83 und S. 134 gemacht wurden, geht hervor, welch grossen Werth es hätte, den Verlauf der verschiedenen hier in Frage kommenden Curvenarten durch einfache Gleichungen von der Form $p = f(v)$ darstellen zu können, wie es bei permanenten Gasen der Fall ist. Leider ist das bis jetzt nicht möglich. Vor Allem hat man versucht, den Verlauf der adiabatischen Curve durch einfache empirische Formeln darzustellen, weil diese Curven das Gesetz der Druckabnahme bei der Expansion des Dampfes im Dampfmaschinencylinder angeben. Der erste Versuch dieser Art ist von Rankine*) gemacht. Aus den Resultaten numerischer Rechnungen schliesst derselbe, dass die adiabatische Curve des reinen gesättigten Wasserdampfes durch die Näherungsformel

$$p\,v^{\mu} = p_1\,v_1^{\mu} \tag{254}$$

*) Rankine, Manual of Applied Mechanics. — A Manual of the Steam engine, S. 385.

bestimmt ist, wobei p_1 der Anfangsdruck, v_1 das Anfangsvolumen des gesättigten Wasserdampfes und μ eine constante Grösse ist, für welche **Rankine** den Werth $\frac{10}{9} = 1{,}111$ angiebt. **Rankine** sagt nicht, ob man bei Anwendung dieser Formel für den Anfang der Expansion reinen Wasserdampf ohne Beimischung von Wasser voraussetzen soll oder nicht. Diese Frage ist aber, wie ich zeigen werde, nicht ohne Bedeutung. Später hat auch **G. Schmidt***) diese Formel benutzt, macht jedoch kurzweg die Annahme, der gesättigte Wasserdampf verhalte sich in *jeder* Beziehung wie ein permanentes Gas und es seien selbst bei beiden Gasarten die adiabatischen Curven identisch. Er setzt daher, wie beim permanenten Gase: $\mu = 1{,}410$, eine Annahme, die durch nichts gerechtfertigt wird, und die auf sehr unrichtige Resultate führt.

Später ist dann auch **Grashof****) auf diese Frage zurückgekommen und schliesst aus den Resultaten numerischer Rechnungen, dass man $\mu = 1{,}140$ setzen müsse; bei diesen Rechnungen wird aber ausdrücklich vorausgesetzt, dass der Wasserdampf im Anfange der Expansion zwar gesättigt, dass ihm aber kein Wasser beigemischt sei. Ich werde, der Wichtigkeit der Sache wegen, etwas näher auf die Frage eingehen; auf gleichem Wege, wie **Rankine** und **Grashof**, nur mit Zugrundelegung meiner genauen, hier vorliegenden Tabellen, den Werth μ der Gl. (254) bestimmen, einmal unter der Voraussetzung, dass dem gesättigten Dampfe anfangs *kein* Wasser beigemischt ist, dann unter der Annahme, dass man es mit einer Mischung von Wasser und Wasserdampf zu thun hat und endlich soll mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie gezeigt werden, ob die Gl. (254) richtig ist oder nur als Näherungsformel aufgefasst werden darf. In Hinblick auf die Resultate, auf die uns die Untersuchungen der permanenten Gase auf S. 143 geführt haben, ist man leicht zu der Annahme geneigt, dass die Formel (254) auch bei Dämpfen eine hervorragende Rolle spielen dürfte.

Ist, von einem gewissen Anfangszustand (p_1, v_1) ausgehend, in der auf S. 324 angegebenen Weise für einen gegebenen End-

*) **Gustav Schmidt**, Theorie der Dampfmaschinen. 1861.

) **Grashof, Vorwort in »Völker's Indicator«. Berlin 1863. — »Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure«. B. VIII. S. 151.

druck p das Volumen v berechnet und nimmt man für die adiabatische Curve die Gl. (254) als richtig an, so würde sich hieraus leicht die Constante μ ermitteln lassen, man findet

$$\mu = \frac{\log. \frac{p_1}{p}}{\log. \frac{v}{v_1}} \tag{255}$$

So haben wir in dem Beispiele S. 324 für den Anfang gesättigten Dampf von $p_1 = 4$ Atmosphären Druck ohne Beimischung von Wasser angenommen und die Expansion nach der adiabatischen Curve so weit erfolgen lassen, bis der Druck auf $p = 1$ Atmosphäre gesunken war; wir fanden dann das Expansionsverhältniss $\varepsilon = \frac{v}{v_1} = 3{,}390$; setzt man nun die gegebenen Werthe in vorstehende Gleichung, so findet sich für diesen einen Fall

$$\mu = 1{,}1354$$

Auf dem gleichen Wege kann man nun auch für andere Werthe der Anfangs- und Endpressung den Werth μ ermitteln und zusehen, ob sich wirklich dieser Werth als constant herausstellt. Ich habe eine Reihe Beispiele dieser Art berechnet und die Resultate dieser Rechnungen in folgender Tafel zusammengestellt. Als Anfangspressung habe ich den Druck von $p_1 = 8$, 4, 2, 1 Atmosphären angenommen und zunächst ausdrücklich vorausgesetzt, dass im Anfange nur gesättigter Wasserdampf ohne Wasser vorhanden sei. Die Tabelle giebt dann für verschiedene Endpressungen $p = 4$, 2, 1, $\frac{1}{2}$ Atmosphären die spezifische Dampfmenge x am Ende der Expansion; das Expansionsverhältniss ε und den nach Gl. (255) berechneten Werth von μ. Nach dem oben Angegebenen bedarf die Entstehung der Tabelle keiner weitern Erläuterung.

Anfangsdruck p_1 in Atmosphären	Enddruck p in Atmosphären: 0.5	1	2	4
8	$x =$ 0.8541	0.8844	0.9182	0.9564
	$\varepsilon =$ 11.577	6.236	3.375	1.834
	$\mu =$ 1.1321	1.1360	1.1396	1.1431
4	$x =$ 0.8882	0.9211	0.9580	
	$\varepsilon =$ 6.282	3.390	1.837	
	$\mu =$ 1.1315	1.1354	1.1399	
2	$x =$ 0.9241	0.9598		
	$\varepsilon =$ 3.409	1.842		
	$\mu =$ 1.1304	1.1344		
1	$x =$ 0.9614			
	$\varepsilon =$ 1.848			
	$\mu =$ 1.1291			

Ein Blick auf diese Zusammenstellung zeigt, dass der Werth μ bei bestimmter Anfangspressung entschieden abnimmt, je kleiner der Enddruck p ist und dass bei gleicher Endpressung μ um so grösser ist, je grösser der Anfangsdruck genommen wird, immerhin sind aber doch die Aenderungen so unbedeutend, dass man innerhalb der in der Tabelle angenommenen Druckgrenzen, welche alle bei Dampfmaschinen vorkommenden Fälle umschliessen, für μ einen constanten Mittelwerth annehmen darf, und dieser Werth findet sich

$$\mu = 1{,}135$$

also nahe mit dem von Grashof*) übereinstimmend.

Nehmen wir diesen Mittelwerth an, also die empirische For-

*) In einer Besprechung von Völker's »Indicator« (Zeitschrift des öster. Ingenieur-Vereins, Jahrg. XV) nimmt G. Schmidt, genau mit meinem obigen Rechnungsresultate übereinstimmend, $\mu = 1{,}135$ an und stützt sich dabei auf die Resultate der Grashof'schen Rechnungen. Schmidt hat hiernach seine frühere Annahme, dass μ der Rankine'schen Formel mit dem Werthe $x = 1{,}410$ der permanenten Gase identisch sei, aufgegeben.

iel Rankine's als zulässig, so findet sich das Expansions-
erhältniss umgekehrt aus dem Anfangs- und Enddruck:

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (256)$$

und dann wie bei Gasen nach der Gl. (80) S. 133 die Expansionsarbeit L_1 in Wärmeeinheiten gemessen:

$$A L_1 = \frac{A p_1 v_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}}\right] \qquad (257)$$

Es fragt sich nun, wie weit die Resultate dieser Formeln mit denen der genauen Formel (247) S. 330 übereinstimmen; in folgender Tafel sind die Rechnungsresultate für die gleichen Fälle wie in der vorstehenden zusammengestellt. Die Werthe AL sind dabei in der Weise nach Gl. (247) berechnet, wie es oben durch das Beispiel auf S. 330 angegeben wurde; die Werthe ε und AL_1 hingegen nach vorstehenden Näherungsformeln.

Anfangsdruck p_1 in Atmosphären	Enddruck p in Atmosphären:				
		0.5	1	2	4
8	ε =	11.505	6.247	3.392	1.842
	AL_1 =	94.90	74.02	51.35	26.73
	AL =	94.93	73.75	51.01	27.57
4	ε =	6.247	3.392	1.842	
	AL_1 =	70.95	49.22	25.63	
	AL =	71.14	49.17	25.53	
2	ε =	3.392	1.842		
	AL_1 =	47.19	24.57		
	AL =	47.40	24.59		
1	ε =	1.842			
	AL_1 =	23.58			
	AL =	23.70			

Man erkennt aus dem Vergleich der beiden Werthe
Expansionsarbeit, wie sie sich nach der Näherungsgleich

und der genauen Formel (247) ergeben, eine recht befriedigende **Uebereinstimmung**; ebenso auch zwischen den Werthen des Expansionsverhältnisses ε nach dieser und der vorhergehenden Zusammenstellung und kann daher gewiss bei Dampfmaschinen von den gegebenen Näherungsformeln Gebrauch machen, die Expansionsarbeit nach der Gleichung:

$$L_1 = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\mu - 1}\right] \qquad (258)$$

berechnen und dabei $\mu = 1{,}135$ annehmen. Die Zulässigkeit der zuletzt erwähnten Annahme ist jedoch zunächst nur unter der Voraussetzung erwiesen, dass der Wasserdampf bei Beginn der Expansion nach der adiabatischen Curve gesättigt ist und dass er kein Wasser beigemischt enthält. Es ist daher noch zu untersuchen, ob die vorstehenden Näherungsformeln auch benutzt werden dürfen und $\mu = 1{,}135$ gesetzt werden darf, wenn die spezifische Dampfmenge x_1 im Anfange von Eins verschieden ist. Um diese Frage zu entscheiden, habe ich auf gleiche Weise wie oben noch eine Reihe von Beispielen berechnet und die Resultate in folgender Tafel zusammengestellt, indem ich annahm, die Dampfmenge sei im Anfange $x_1 = 0{,}90$, $0{,}80$ und $0{,}70$. Die folgende Tafel enthält nur die Werthe des Exponenten μ, berechnet nach Gl. (255).

Anfangsdruck p_1 in Atmosphären.	Spezifische Dampfmenge im Anfang x_1	Enddruck in Atmosphären. 0.5	1	2
4	$x_1 = 0.90$	$\mu = 1.1236$	1.1268	1.1302
	0.80	$= 1.1140$	1.1164	1.1190
	0.70	$= 1.1019$	1.1036	1.1047
2	$x_1 = 0.90$	$\mu = 1.1231$	1.1264	
	0.80	$= 1.1141$	1.1166	
	0.70	$= 1.1028$	1.1044	
1	$x_1 = 0.90$	$\mu = 1.1223$		
	0.80	$= 1.1138$		
	0.70	$= 1.1032$		

Diese Uebersicht zeigt, dass der Exponent μ der empirischen Formel (254) mit der anfänglichen Dampfmenge x_1 variirt, dass er aber bei gleicher Anfangsdampfmenge wieder nahezu constant ist. Nimmt man aus den, gleichen Werthen von x_1 entsprechenden Werthen von μ das Mittel, so findet sich für die anfängliche spezifische Dampfmenge:

$$
\begin{array}{rr}
x_1 = 1 & \mu = 1{,}135 \\
0{,}90 & 1{,}125 \\
0{,}80 & 1{,}115 \\
0{,}70 & 1{,}103
\end{array}
$$

und diese Werthe lassen sich recht wohl durch die empirische Formel:

$$\mu = 1{,}035 + 0{,}100 \cdot x_1 \tag{259}$$

zusammenfassen, welche Formel freilich nur für die hier vorliegenden Grenzen 0,7 und 1 für x_1 benutzt werden darf; dadurch werden aber die bei Dampfmaschinen vorkommenden Fälle umschlossen, denn man nimmt an, dass dem nach dem Dampfcylinder strömenden Dampf bis zu 25% und 30% Wasser mechanisch beigemengt sein kann, wie das besonders bei Locomotivmaschinen der Fall ist.

Obgleich die vorstehenden Angaben nur als angenäherte zu betrachten sind, so führen sie doch zu einem sehr wichtigen Resultat und klären eine Frage auf, die in neuerer Zeit vielfach behandelt wurde. Die an Dampfmaschinen abgenommenen Indicatorcurven zeigen nämlich, dass die Druckabnahme bei der Expansion nahezu durch den Verlauf einer gleichseitigen Hyperbel dargestellt wird. Man hat daraus geschlossen, dass sich der Wasserdampf folglich nahezu wie ein permanentes Gas verhalte, das bei constanter Temperatur expandirt und hat im Weitern den Schluss gezogen, dass die Formeln der mechanischen Wärmetheorie auf Resultate führen, die sehr beträchtlich von den beobachteten abweichen. Man hat versucht, die Abweichungen durch den Umstand zu erklären, dass die Cylinderwände (selbst wenn sie nicht mit einem Mantel versehen sind) Wärme an den expandirenden Dampf abgeben und dass dadurch das Gesetz der Druckabnahme während der Expansion wesentlich geändert werden müsse; man hat ferner hervorgehoben, dass der Dampf in Folge seiner Berührung mit dem Schmiermaterial neue Eigen-

schaften annehmen müsse, und dass in Folge dessen die Abweichungen eine weitere Erklärung finden. Dass die genannten Einflüsse auf die Erscheinung existiren, ist nicht abzuleugnen, ich glaube jedoch, dass man dieselben sehr überschätzt; nach meinen oben angeführten Rechnungen erklärt sich die Erscheinung jetzt wenigstens theilweise dadurch, dass wir es bei Dampfmaschinen mit nassem Dampfe zu thun haben, mit Dampf, dem beim Beginne der Expansion eine gewisse Quantität Wasser beigemischt ist. Je grösser diese Wassermenge, je kleiner also die anfängliche spezifische Dampfmenge x_1 ist, um so mehr nähert sich der Werth μ der Einheit, d. h. um so näher rückt die adiabatische Curve in ihrem Verlauf einer gleichseitigen Hyperbel; ja die weitere Verfolgung zeigt sogar, dass bei einem Mischungsverhältniss von ungefähr $x_1 \doteq 0,32$ beide Curven nahezu zusammenfallen. Ich darf daher wohl behaupten, dass die Beobachtungen über den Verlauf der Indicatorcurven nicht nur nicht gegen die Ergebnisse der mechanischen Wärmetheorie sprechen, sondern dass sie vielmehr eine neue Bestätigung der Richtigkeit der Anschauungen bilden, die unsern Darstellungen zu Grunde liegen. Wir kommen übrigens auf die Betrachtung der Vorgänge und des Verhaltens der Dämpfe im Dampfcylinder unserer Dampfmaschinen zurück.

Für die gewöhnlichen Fälle der Praxis darf man bei Wasserdampf nach Allem wohl ohne Bedenken von der empirischen Formel Rankine's

$$p v^{\mu} = p_1 v_1^{\mu}$$

bei Bestimmung des Verlaufes der adiabatischen Curve Gebrauch machen und für die Constante μ den Werth benutzen, der sich aus unserer empirischen Formel (259) ergiebt. Der von Rankine vorgeschlagene Werth $\mu = \frac{10}{9} = 1,111$ gilt nach dieser Formel nur für die anfängliche spezifische Dampfmenge $x_1 = 0,76$, d. h. wenn dem arbeitenden Dampfe dem Gewichte naeh ungefähr 25 % Wasser mechanisch beigemengt ist. Ob Rankine bei Bestimmung seines Werthes von μ wirklich von diesem Mischungsverhältniss ausgegangen ist, ist mir nicht bekannt. Eine genaue Betrachtung der vorhin gegebenen Tabellen führt zu dem Gedanken, dass möglicher Weise die zuletzt betrachtete

Gleichung der adiabatischen Curve genau richtig ist und dass die Abweichungen mit unsern genauen Formeln mehr in einer gewissen Unzuverlässigkeit der verschiedenen Temperaturfunktionen, die in diesen Formeln auftreten, zu suchen ist. Das ist jedoch nicht der Fall, denn berechnet man den Exponenten μ unter der Voraussetzung für verschiedene Druckgrenzen, dass die anfängliche Dampfmenge x_1 wenig von Null verschieden ist, so zeigen sich grosse Abweichungen und man überzeugt sich, dass die empirische Formel von Rankine nur bei Wasserdampf anwendbar ist, wenn demselben anfänglich kein oder nur wenig Wasser mechanisch beigemengt ist. Man kann übrigens leicht eine Beziehung zwischen dem Werthe μ und den früher gegebenen Temperaturfunktionen aufstellen und auch auf diese Weise die Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung beweisen.

Die allgemeine Gleichung III, S. 77, nämlich

$$dQ = A(Xdp + Ydv)$$

schreibt sich auch in folgender Art:

$$dQ = AXp\left(\frac{dp}{p} + \frac{Yv}{Xp} \cdot \frac{dv}{v}\right)$$

Für die adiabatische Curve ist nun $dQ = 0$; setzt man überdies:

$$\frac{Yv}{Xp} = \mu$$

so fände sich:

$$0 = \frac{dp}{p} + \mu \frac{dv}{v}$$

und daraus würde sich unter der Voraussetzung, dass μ constant ist, durch Integration die Formel (254) von Rankine finden. Sollte also diese Formel genau richtig sein, so müsste der Werth

$$\frac{Yv}{Xp}$$

bei Dampf- und Flüssigkeitsmischung sich constant ergeben. Zu näherer Prüfung dieser Frage setzen wir in diesen Ausdruck die Werthe ein, welche für X und Y in Gl. (224) und (225) S. 298 angegeben wurden; man erhält:

$$\mu = \frac{\frac{r}{pu} \cdot r}{\frac{dq}{dp} - \sigma \frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right) + r \frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right)}$$

oder wenn man $r = xu + \sigma$ einsetzt und den Werth σ im Zähler vernachlässigt:

$$\mu = \frac{\frac{r}{Apu} \cdot xu}{\frac{1}{A}\frac{dq}{dp} + \frac{xu}{A} \cdot \frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right)} \qquad 260$$

Zur näheren Prüfung dieser Formel dienen die Werthe der Columnen 7, 8 und 9 der Hülfstabelle für Wasserdämpfe S. 316. Die Grösse $\frac{r}{Apu}$ ist nach Gl. (215) S. 280 berechnet; ferner ist:

$$\frac{1}{A}\frac{dq}{dp} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dp}{dt}}$$

in welcher Formel der Werth $\frac{dq}{dt}$ nach Gl. (190) S. 262 bestimmbar ist, während $\frac{dp}{dt}$ auf früher angegebene Art ermittelt und in Col. 2 der gleichen Tabelle aufgeführt wurde. Der Werth $\frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$ ist aus den Differenzen der Werthe $\frac{\varrho}{u}$ der Tabelle 10 ermittelt worden.

Geht man von einem gewissen Zustand (x_1, t_1) aus, und setzt man den aus Gl. (243) S. 322 ermittelten Werth von x in Gl. (260) ein, so zeigt sich, dass μ sich sehr langsam mit der Temperatur ändert, so langsam, dass man allerdings innerhalb gewisser Grenzen μ constant setzen kann: die Aenderungen von μ finden in gleicher Richtung statt, wie es obige Zusammenstellung der Resultate unserer numerischen Rechnungen zeigen und auch Gl. (260) zeigt, dass vorwaltend die anfängliche Dampfmenge x_1 auf μ von Einfluss ist. Da diese Gleichung nicht zu neuen Resultaten führt, so begnügen wir uns mit diesen Andeutungen und mit dem Re-

sultate, dass Rankine's Formel nur innerhalb gewisser Grenzen den Verlauf der adiabatischen Curven genau genug darlegt.

Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen, wenn die Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege erfolgen.

Die Zustandsänderungen eines Körpers erfolgen auf umkehrbarem Wege, wenn in jedem Momente des Ueberganges der äussere Druck dem Körperdrucke gleich ist; diese Voraussetzung haben wir aber schon bei den bisherigen Untersuchungen über den Verlauf der isothermischen, isodynamischen und adiabatischen Curven, sowie der Curve constanter Dampfmenge gemacht und haben damit schon die wichtigsten der hierher gehörigen Probleme erledigt. Es ist jedoch zweckmässig, im Folgenden noch einige Probleme dieser Art zu behandeln, von denen besonders dasjenige, welches wir zuerst lösen werden, von technischer Wichtigkeit ist.

Problem 1. Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen, wenn die Mittheilung oder Entziehung von Wärme bei constantem Volumen stattfindet.

Denken wir uns, in einem Gefässe sei gerade die Gewichtseinheit Mischung eingeschlossen: die spezifische Dampfmenge sei x_1; die Temperatur und der Druck t_1 und p_1, so findet sich das Volumen v_1 der Masse nach Gl. (208) S. 272

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

Geht nun durch Mittheilung oder Entziehung von Wärme die Temperatur in den Werth t über, und ist am Ende die spezifische Dampfmenge x, so ist das Volumen

$$v = xu + \sigma$$

und da wir das Volumen constant voraussetzen ($v = v_1$) und überdies auch den Werth σ als unveränderlich ansehen, so folgt durch Gleichsetzen:

$$x = \frac{u_1}{u} x_1 \tag{261}$$

sonach lässt sich für jeden andern Druck p die vorhandene Dampfmenge x oder, wenn diese gegeben wird, aus dem Werthe u der neue Druck p berechnen.

Da das Volumen constant ist, so ist die äussere Arbeit $dL = 0$ und daher geben hier die beiden Gln. (220) und (221) S. 296

$$dQ = AdU = dq + d(x\varrho)$$

und hieraus folgt durch Integration die mitzutheilende Wärmemenge

$$Q = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1$$

oder den Werth von x nach voriger Gleichung benutzt

$$Q = q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right) \tag{262}$$

Endlich findet sich noch das Wärmegewicht, welches diesem Uebergange entspricht, nach Gl. (227)

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \int \frac{1}{A}\left[\frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right)\right]$$

$$P = \frac{1}{A}\left(\tau - \tau_1 + \frac{xr}{T} - \frac{x_1 r_1}{T_1}\right) \tag{263}$$

in welcher Formel ebenfalls x durch Gl. (261) eliminirt werden kann, so dass sich das Wärmegewicht für diesen Uebergang leicht aus der Anfangs- und Endtemperatur ermittelt, wenn überdies noch für den Anfang die spezifische Dampfmenge x_1 gegeben ist.

Denken wir an Wärmemittheilung, also an Temperatur- und Druckerhöhung und Verdampfen, so wird in einem gewissen Augenblicke alle Flüssigkeit in Dampf übergegangen, also $x = 1$ geworden sein. Ist in diesem Momente die Temperatur t_2, der Druck p_2 u. s. w., so bestimmen sich diese Werthe nach Gl. (261) aus

$$u_2 = x_1 u_1 \tag{264}$$

und die Wärmemenge, welche bis dahin zuzuleiten ist, wäre nach Gl. (262):

$$Q_2 = q_2 - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right) \tag{265}$$

Eine weitere Wärmezuführung würde zwar Spannung und Temperatur noch weiter erhöhen, die Veränderungen würden aber dann nach anderen Gesetzen erfolgen, weil von jetzt an der Dampf in den überhitzten Zustand übergeht.

Die vorstehenden Formeln. die wir dann durch einige numerische Beispiele erläutern werden, lassen sich noch in etwas veränderter Gestalt hinstellen.

Die Gl. (223) S. 298, welche für jede Zustandsänderung der Mischung gilt, nämlich:

$$dQ = \frac{d}{dp}\left[q - \sigma\frac{\varrho}{u} + v\cdot\frac{\varrho}{u}\right]dp + \frac{r}{u}\,dv$$

schreibt sich auch, da der Druck p nur eine Funktion der Temperatur t ist, in folgender Art, wenn man zugleich nach Gl. (189) S. 262 die spezifische Wärme c der Flüssigkeit substituirt:

$$dQ = \left[c - \sigma\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right)\right]dt + \frac{r}{u}\,dv \qquad (266)$$

Findet nun, wie wir voraussetzten, die Wärmemittheilung bei constantem Volumen statt, so ist $dv = 0$ und $v = v_1$, daher

$$\frac{dQ_v}{dt} = c - \sigma\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right) + v_1\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right) \qquad (267)$$

Dieser Werth stellt aber einfach **die spezifische Wärme der Dampf- und Flüssigkeitsmischung bei constantem Volumen** dar und tritt hier als eine Funktion des Volumens und der Temperatur auf; erscheint sonach keineswegs constant, wie das bei permanenten Gasen der Fall ist. Der Werth c bestimmt sich leicht mit Hülfe der Gln. (190) bis (196) auf S. 262.

Speziell für Wasserdampf ist der Werth

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$$

in Col. 10 der Hülfstafel auf S. 316 für Pressungen von 1 zu 1 Atmosphäre angegeben; ich hatte einfach das Produkt der gleichem Drucke entsprechenden Werthe der Columnen 2 und 8 mit $A = 1:424$ zu multipliciren. Hiernach hat es keine Schwierigkeit, den Werth der spezifischen Wärme bei constantem Vo-

lumen für eine Mischung von Wasser und Wasserdampf für eine bestimmte Temperatur und ein vorgeschriebenes Volumen zu berechnen. So ist z. B. für Wasser:

$$c = \frac{dq}{dt} = 1 + 0{,}000\,04\, t + 0{,}000\,000\,9\, t^2$$

also für einen Druck von 5 Atmosphären, d. h. für $t = 152{,}22^0$

$$c = 1{,}0269$$

Ferner nach der Hülfstabelle:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right) = 29{,}160$$

und weil $\sigma = 0{,}001$ ist:

$$\frac{d\,Q_v}{dt} = 0{,}9977 + 29{,}160\, v_1$$

Wäre diesem gesättigten Dampfe kein Wasser beigemischt, so wäre nach Tab. 10

$$v_1 = u_1 + \sigma = 0{,}3636$$

und daher

$$\frac{d\,Q_v}{dt} = 11{,}595$$

welcher Werth freilich nur für Wärmeentziehung gilt, da bei dessen Bestimmung nur trockner gesättigter Dampf vorausgesetzt wurde und daher eine Mittheilung von Wärme den Dampf in den überhitzten Zustand, für den die Formeln nicht mehr gelten, überführen würde. Für Mischungen von Flüssigkeit und Dampf stellt sich der Werth, den wir im gewöhnlichen Sprachgebrauch als spezifische Wärme bei constantem Volumen bezeichnen würden, jederzeit grösser, als die spezifische Wärme der Flüssigkeit heraus; also bei Wasser und Wasserdampf grösser als Eins heraus. Es ist das begreiflich, da wir es hier mit einer Aenderung des Aggregatzustandes zu thun haben.

Bemerkenswerth ist noch, dass man bei Wasserdampf den Werth

$$c - \sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right)$$

in Gl. (267) unbedenklich Eins setzen kann, weil die Berechnung

dieses Ausdruckes immer auf Werthe führt, die von Eins kaum verschieden sind.

Für unsere weitern Betrachtungen hat übrigens vorstehende Betrachtung keine grosse Bedeutung, bei der Lösung spezieller Aufgaben ist es vortheilhafter, von den zuerst entwickelten Gleichungen (261) und (262) Gebrauch zu machen, in einer Weise, die wir denn auch durch numerische Beispiele näher darlegen wollen.

In einem Gefässe befinde sich eine Mischung von M Kilogr. Wasser und Wasserdampf; davon seien 0,763 M Kilogr. dampfförmig, der Rest 0,237 M Kilogr. im tropfbar flüssigen Zustande: der Druck sei $1^1/_2$ Atmosphären und es soll nun durch Wärmeentziehung bei constantem Volumen der Druck auf $^1/_{10}$ Atmosphäre sinken.

Hier ist zunächst nach Tab. 10 für den Druck von

$$1^1/_2 \text{ Atmosphäre: } u_1 = 1{,}1258; \quad q_1 = 112{,}408; \quad \frac{\varrho_1}{u_1} = 432{,}58$$

$$^1/_{10} \text{ Atmosphäre: } u = 14{,}5508; \quad q = 46{,}282; \quad \frac{\varrho}{u} = 37{,}03$$

sonach findet sich, weil $x_1 = 0{,}763$ ist, nach Gl. (261) die spezifische Dampfmenge am Ende:

$$x = \frac{u_1}{u}\, x_1 = \frac{0{,}8589}{14{,}5508} = 0{,}0590$$

daher die ganze Dampfmenge am Ende $Mx = 0{,}059\ M$
und die ganze Wassermenge $M\,(1 - x) = 0{,}941\ M.$

Die Wärmemenge, die der Masse dabei zu entziehen ist, findet sich dann für die Gewichtseinheit Mischung nach Gl. (262), wenn man dort vorstehende Werthe benutzt:

$$q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right) = 405{,}86 \text{ Cal.}$$

oder für die M Kilogr. Mischung:

$$Q = 405{,}86 \cdot M \text{ Calorien.}$$

Würde hierbei die Wärmeentziehung dadurch bewerkstelligt, dass man an den äussern Wandungen des Gefässes kaltes Wasser hinführt, das sich dabei von t_0 auf t' erwärmt, und nehmen wir an, dass die M Kilogr. Mischung zu ihrer Condensation W Kilogr.

Wasser erfordern, so ist die Wärmemenge, welche das Wasser aufnimmt

$$Q = W(q' - q_0)$$

und daher bestimmt sich allgemein die Menge des Kühlwassers, die zur Condensation der M Kilogr. Dampf- und Flüssigkeitsmischung nothwendig ist

$$\frac{W}{M} = \frac{q_1 - q + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right)}{q' - q_0} \tag{268}$$

Nehmen wir in unserm Beispiele an, das Wasser erwärme sich dabei von $t_0 = 15^0$ auf $t' = 35^0$, so ist nach Tab. 1b $q_0 = 15{,}005$, $q' = 35{,}037$ und daher

$$\frac{W}{M} = \frac{405{,}86}{20{,}03} = 20{,}26$$

Jedes Kilogr. Mischung erfordert also hier 20,26 Kil. Kühlwasser.

Nehmen wir, um das vorgelegte Beispiel weiter zu verfolgen, wieder die anfängliche spezifische Dampfmenge $x_1 = 0{,}763$ Kilogr. und den Druck zu $1^1/_2$ Atmosphäre, so lässt sich noch die Frage aufwerfen, welche Wärmemenge der Masse bei constantem Volumen mitzutheilen ist, um das vorhandene Wasser vollständig noch in Dampf überzuführen und welchen Druck dann der Dampf hat, vorausgesetzt, dass er eben noch gesättigt ist.

Hier giebt Gl. (264) für den Endzustand:

$$u_2 = x_1 u_1 = 0{,}763 . 1{,}1258 = 0{,}8589$$

und diesem Werthe entspricht nach Tab. 10 der Enddruck von $p_2 = 2$ Atmosphären und die Temperatur $t_2 = 120{,}60$.

Ferner ist nach der gleichen Tabelle $q_2 = 121{,}417$, $\varrho_2 : u_2 = 558{,}94$ und daher giebt Gl. (265) die Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit Mischung mitzutheilen ist, wenn wir für q_1, u_1 und $\varrho_1 : u_1$ die vorhin angegebenen Werthe benutzen:

$$Q_2 = 117{,}53 \text{ Calorien.}$$

Bei M Kilogr. Mischung wäre dieser Werth mit M zu multipliciren. Würde die Wärmemittheilung weiter fortgesetzt, so hört die Anwendbarkeit unserer Formeln auf, weil jetzt der Dampf in den überhitzten Zustand übergeht.

Die Formeln, auf die uns das vorgelegte Problem geführt hat, geben uns das Mittel an die Hand, noch eine weitere, technisch wichtige Aufgabe*) zu lösen.

Es soll zum Schluss noch die Frage beantwortet werden, nach welchem Gesetze in einem Dampfkessel die Dampfspannung bei fortgesetztem Heizen mit der Zeit wächst, wenn von einem gewissen Zeitpunkte an die Dampfableitung unterbrochen wird und die Ventile im geschlossenen Zustande erhalten werden.

Es sei im Augenblicke des Absperrens das Gewicht von Wasser und Dampf im Kessel M, davon seien $x_1\,M$ Kilogr. dampfförmig. Die Temperatur sei t_1 und die Spannung p_1 und durch fortgesetztes Heizen sei die Dampfmenge in der Zeit θ in den grössern Werth xM, die Temperatur in t und der Druck in den Werth p übergegangen.

Die während dieser Zeit in den Dampfkessel eingeführte Wärmemenge Q ist dann nach Gl. (262)

$$Q = M\left[q - q_1 + x_1 u_1\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right)\right] .$$

Wird nun die Heizung in der Art auch nach dem Schliessen des Dampfrohres und der Ventile fortgesetzt, dass in jeder Minute die Wärmemenge Q_0 in den Kessel tritt, so findet sich die Zeit θ (in Minuten) innerhalb welcher die Temperatur von t_1 auf t und der Druck von p_1 auf p steigt:

$$\theta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{M}{Q_0}\left[q - q_1 + x_1 u_1\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right)\right] \tag{269}$$

Diese Gleichung giebt nun schon über die vorgelegte Frage vollständigen Aufschluss; sie lässt sich jedoch zum Zwecke leichterer Discussion einfacher schreiben. Bei den gewöhnlichen Dampfkesseln ist das Gewicht des Dampfes gegen das des vorhandenen Wassers so klein, dass wir vorübergehend das mit x_1 behaftete Glied der Klammer vernachlässigen können; ferner können wir näherungsweise für die spezifische Wärme c des Wassers den constanten Mittelwerth 1,0224 setzen und erhält dann mit grosser Annäherung:

---

*) Vergl. die Abhandlung des Verfassers: »Neue Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe« in der Schweiz. polytechnischen Zeitschrift. Jahrg. 1863. B. VIII.

$$\theta = \frac{Mc\,(t - t_1)}{Q_0} \tag{270}$$

Aus dieser Gleichung ist zu entnehmen, dass die Zeit θ, innerhalb welcher der Druck von p_1 auf p in einem Dampfkessel zunimmt, wenn die Dampfableitung unterbrochen wird 1) der Temperaturerhöhung $t - t_1$ direct proportional ist; 2) direct proportional ist dem Gesammtgewicht M von Wasser und Dampf oder was nahezu das Gleiche ist, weil das Dampfgewicht sehr klein ist, proportional dem Wassergewicht und endlich ist 3) diese Zeit der Wärmemenge Q_0, die in der Zeiteinheit dem Kessel zugeleitet wird, umgekehrt proportional.

Dass bei ein- und demselben Kessel bei gleicher Füllung gleichen Zeiten nahezu gleiche Temperaturintervalle entsprechen, ist schon aus den Resultaten von besondern, zu diesem Zwecke angestellten Versuchen von Fairbairn (1853) geschlossen worden*); meine Formeln erklären aber nun den Vorgang vollständig und deuten auch noch auf den grossen Einfluss hin, welchen das Gewicht der vorhandenen Wassermenge, sowie (hinsichtlich des Werthes Q_0) die Grösse der Heizfläche des Kessels übt. So erklärt sich leicht, dass in Locomotivkesseln, welche eine grosse Heizfläche und kleinen Rauminhalt haben, eine weit raschere Steigerung des Dampfdruckes stattfindet, wenn der Dampfabfluss unterbrochen wird, als in Kesseln stationärer Maschinen; denn aus obigen Formeln lässt sich leicht der weitere Schluss ziehen, dass die Zeit, welche eine bestimmte Druckerhöhung fordert, nahezu dem Volumen des Dampfkessels direct und der Grösse der Heizfläche umgekehrt proportional ist; für einen bestimmten Kessel geben übrigens die Werthe p der Col. 3 der Tab. 1a nahezu das Gesetz an, nach welchem in gleichen Zeitintervallen der Dampfdruck zunimmt.

Die Temperaturzunahme dt erfordert nach Gl. (270) die Zeit

$$d\theta = \frac{Mc}{Q_0}\,dt \tag{271}$$

Man kann nun offenbar den Werth $\frac{dp}{d\theta}$ die Geschwindig-

* Vergl. v. Burg. »Ueber die Wirksamkeit der Sicherheitsventile.« Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. XLV. S. 312.

keit nennen, mit welcher in einem abgeschlossenen Dampfkessel bei fortgesetztem Heizen der Druck wächst; diese Geschwindigkeit w findet sich daher nach Vorstehenden:

$$w = \frac{dp}{d\theta} = \frac{Q_0}{Mc} \cdot \frac{dp}{dt} \qquad (272)$$

ist also dem Differentialquotienten des Druckes p nach der Temperatur t proportional.

Die Werthe der Col. 4 der Tab. 1 a ebenso die der Col. 2 der Hülfstafel S. 316 geben sonach ein Maass für diese Geschwindigkeit und es zeigt sich, dass dieselbe rasch mit dem Drucke wächst.

Legen wir der Berechnung der Geschwindigkeit w die genauere Formel unter, so findet sich:

$$w = \frac{Q_0}{Mc} \frac{dp}{dt} \left[\frac{c}{c + x_1 u_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{u}\right)} \right] \qquad (273)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nun so wenig von Eins verschieden, dass wir ohne Bedenken zur Berechnung der Geschwindigkeit der Druckzunahme bei Dampfkesseln die einfachere Gl. (272) verwenden dürfen.

Bei normalem Betriebe einer Dampfkesselheizung soll die Geschwindigkeit w der Druckänderung klein sein und sollen Unregelmässigkeiten in der Heizung, d. h. Variationen im Werthe der Wärmemenge Q_0, die in der Zeiteinheit in den Kessel tritt, geringen Einfluss auf w haben: das ist nach Gl. (272) der Fall, wenn das Gewicht von Wasser und Dampf im Kessel sehr gross und der Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ klein ist. Hiernach ist es weit leichter einen grossen Tiefdruckkessel zu bedienen, als einen kleinen Hochdruckkessel, besonders wenn Letzterer, wie ein Locomotivkessel, mit einer grossen Heizfläche versehen ist.

Nehmen wir an, um noch ein Zahlenbeispiel zu geben, ein gewöhnlicher cylindrischer Dampfkessel habe 18 Quadratmeter Heizfläche und 11 Cubikmeter Inhalt (der Kessel entspricht ohngefähr einer Maschine von 15 Pferdestärken) und erzeuge bei normalem Gange pro Quadratmeter Heizfläche stündlich 25 Kilogr. Dampf von 5 Atmosphären Pressung, also von der Temperatur

$t_1 = 152{,}22$; der Kessel sei ferner auf 0,6 seines Inhaltes mit Wasser gefüllt und werde mit Wasser von 15° Temperatur gespeist; so findet sich zunächst die Dampfmenge, welche bei regelmässiger Dampfableitung in der Minute erzeugt wird:

$$\frac{18 \cdot 25}{60} = 7{,}5 \text{ Kilogr.}$$

Wird der Dampf aus Wasser von 0° Temperatur unter constantem Drucke von 5 Atmosphären erzeugt, so erfordert ein Kilogr. die Gesammtwärme $\lambda = q + r = q + \varrho + Apu = 652{,}93$ (Tab. 10); da aber das Speisewasser schon die Temperatur von $t_0 = 15^0$ besitzt, so ist von λ der entsprechende Werth $q_0 = 15{,}005$ abzuziehen; man erhält $\lambda - q_0 = 637{,}93$ und die Wärmemenge Q_0, die in der Minute bei normalem Gange der Maschine in den Kessel tritt: $Q_0 = 7{,}5 \times 637{,}93 = 4784{,}5$ Cal. Das Wasservolumen im Kessel beträgt $0{,}6 \cdot 11$ und das Dampfvolumen $0{,}4 \cdot 11$ Cubikmeter; da ein Cubikmeter Wasser 1000 Kilogr. und ein Cubikmeter Dampf von 5 Atmosphären Pressung (Tab. 10) 2,75 Kilogr. wiegt, so ist das Wassergewicht 6600 Kilogr. und das Dampfgewicht 12,10 Kilogr., also das Gesammtgewicht $M = 6612{,}1$ Kilogr. und die spezifische Dampfmenge

$$x_1 = \frac{12{,}10}{6612{,}1} = 0{,}00183$$

Es soll nun plötzlich die Dampfableitung unterbrochen, die Wärmemittheilung an den Kessel aber unverändert fortgeführt werden; in welcher Zeit wird dann der Druck auf 10 Atmosphären wachsen?

Dem Anfangsdrucke von 5 Atmosphären entsprechen nach Tab. 10 die Werthe $q_1 = 153{,}74$; $u_1 = 0{,}3626$; $\varrho_1 : u_1 = 1254{,}68$ und dem Enddrucke von 10 Atmosphären die Werthe: $q = 182{,}72$; $\varrho : u = 2292{,}96$ und daher ergiebt Gl. (270) die Zeit

$$\theta = 41{,}00 \text{ Minuten.}$$

Die Näherungsformel (271) giebt, wenn wir im Mittel $c = 1{,}0224$ und dann die entsprechenden Temperaturwerthe einführen:

$$\theta = 1{,}413\,(t - t_1) = 39{,}69 \text{ Minuten}$$

also genau genug übereinstimmend.

Für dasselbe Beispiel berechnet sich nach Gl. (272) die Geschwindigkeit der Druckzunahme

$$w = 0{,}708 \cdot \frac{dp}{dt}$$

und daher für den Anfangs- und Enddruck, wenn wir für den vorstehenden Differentialquotienten die entsprechenden Werthe der Hülfstabelle S. 316 nehmen, dieselbe aber, um w in Atmosphären zu erhalten, vorher durch 10334 dividiren:

$w = 0{,}094$ für 5 Atmosphären,
$w = 0{,}162$ für 10 Atmosphären.

Diese Werthe geben für diesen Kessel und für die entsprechenden Spannungen die Druckzunahme in der Minute in Atmosphären gemessen, wenn von dem betreffenden Momente an die Druckzunahme der Zeit proportional würde.

Die oben erwähnten Versuche von Fairbairn, die, wie hervorgehoben wurde, die Richtigkeit der hier gegebenen Formeln bestätigen, wurden an einem Locomotivkessel angestellt und führten Fairbairn auf die Beziehung

$$\theta = \frac{1}{4{,}44}\,(t - t_1)$$

wo die Temperaturen nach Fahrenheit gemessen waren.

Rechnet man nach Celsius, so findet sich für Fairbairn's Kessel die Zeit:

$$\theta = 0{,}405\,(t - t_1)$$

und die Geschwindigkeit der Druckzunahme

$$w = 2{,}466\,\frac{dp}{dt}$$

also wesentlich grösser, als bei dem von uns angenommenen stationären Kessel, wie das nach dem oben Gegebenen erklärlich ist.

Die Bedeutung des Faktors

$$0{,}405 = \frac{Mc}{Q_0}$$

hat Fairbairn nicht erkannt; wenn daher derselbe unter Zugrundelegung des numerischen Werthes 0,405 die Frage beant-

wortet, nach welcher Zeit die Explosion eines Kessels eintreten müsse, d. h. die Spannung einen angenommenen Maximalwerth erreicht, so kann das Resultat nur für den Kessel gelten, an welchem die Versuche ausgeführt wurden. Die oben gegebenen Formeln lösen aber nun dieses Problem für jeden vorgelegten Fall.

Problem 2. Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischung, wenn die zugeleitete Wärmemenge der Temperaturänderung proportional ist.

Wir haben hier einfach zu setzen, wenn wir unter λ irgend eine constante Grösse*) verstehen:

$$dQ = \lambda dt = \lambda dT$$

Bei Gasen führte diese Annahme, wie ich auf S. 145 gezeigt habe, auf merkwürdige Sätze; es trat λ als spezifische Wärme für das Aenderungsgesetz

$$p^m v^n = \text{Const.}$$

hervor, und innere und äussere Arbeit stellten sich dann auch als der Temperaturänderung proportional heraus. Die dort angegebenen Gleichungen gaben den Schlüssel zur Lösung gerade der wichtigsten Probleme, die hinsichtlich des Verhaltens der Gase gestellt werden. Bei der Theorie der calorischen Maschinen haben wir dann von den erhaltenen Sätzen ausgedehnten Gebrauch gemacht.

Unter solchen Umständen liegt der Gedanke nahe, auch die Flüssigkeits- und Dampfmischungen unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die mitgetheilte Wärmemenge der Temperaturänderung proportional ist.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir nach Gl. (227) S. 300

$$\lambda dT = dq + Td\left(\frac{rx}{T}\right) \tag{274}$$

---

*) Wir haben zwar früher mit λ die Gesammtwärme des gesättigten Dampfes bezeichnet, wie sie aus Regnault's Versuchen sich ergiebt, da wir aber in allen unsern Entwicklungen von dem Werthe der Gesammtwärme keinen Gebrauch machen, so darf ich wohl vorübergehend, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, den Buchstaben λ in der neuen, im Texte angegebenen Bedeutung verwenden.

Dividirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit T und integrirt man, indem man die dem Anfangszustande entsprechenden Werthe mit dem Index 1 versieht und die einfachere Bezeichnung Gl. (242) S. 321 benutzt, so folgt

$$\lambda \text{ logn. } \frac{T}{T_1} = \left(\tau + \frac{xr}{T}\right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right) \tag{275}$$

und die ganze erforderliche Wärmemenge

$$Q = \lambda \; (T - T_1) \tag{276}$$

Ist die Mischung durch ihren Anfangszustand (x_1, p_1, t_1) gegeben, und die Constante λ bekannt, so berechnet sich für jede andere Temperatur t nach Gl. (275) die spezifische Dampfmenge x und dann folgt das spezifische Volumen

$$v = xu + \sigma$$

Da nun auch der, der Temperatur t entsprechende Druck p bekannt ist, so lässt sich das Gesetz der Druckänderungen für den vorliegenden Fall graphisch darstellen, wenn man, wie es in allen bisher behandelten Problemen geschah, das Volumen v als Abscisse, den Druck p als Ordinate aufträgt. Die Gleichung dieser Curve in der gewöhnlichen Form $p = F(v)$ darzustellen. ist aber hier ebenso wenig möglich, wie in den frühern Fällen.

Die Wärmemenge, die während des Ueberganges mitzutheilen oder zu entziehen ist, berechnet sich nach Gl. (276) und die Veränderung der innern Arbeit findet sich in Wärmeeinheiten gemessen, durch Integration der Gl. (220) nämlich

$$A\,dU = dq + d\,(x\varrho)$$

$$A\,(U - U_1) = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1 \tag{277}$$

wenn man hier den aus Gl. (275) hervorgehenden Werth von x substituirt. Endlich findet sich dann die äussere Arbeit L, die zu verrichten ist oder gewonnen wird, wie leicht zu übersehen durch die Formel:

$$L = \frac{Q}{A} - (U - U_1) \tag{278}$$

Das Wärmegewicht für den angenommenen Uebergang ist einfach:

$$P = \lambda \text{ logn. } \frac{T}{T_1}$$

und damit sind alle Fragen beantwortet, die hier überhaupt zu stellen sind.

Wollten wir mit der Mischung einen Kreisprozess ausführen, wie er auf S. 206 (Theorie der calorischen Maschinen) angenommen wurde, so würden wir finden, dass alle Formeln von S. 206 bis S. 212 auch hier ihre Gültigkeit behalten. Da wir aber unten bei der Theorie der Dampfmaschinen auf solche Untersuchungen ausführlich zurückkommen, so unterlassen wir es. hier schon näher auf diese Frage einzugehen.

Problem 3. Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischung, wenn die innere latente Wärme der vorhandenen Dampfmenge constant erhalten wird.

Die innere latente Wärme der Gewichtseinheit Dampf wurde oben mit ϱ bezeichnet und lässt sich nach den auf S. 282 gegebenen Formeln für verschiedene Dämpfe und für verschiedene Temperaturen berechnen. Sind x Kilogr. Dampf vorhanden, so beträgt für diese die innere latente Wärme $x\varrho$; soll dieser Werth während der Zustandsänderungen der Mischung constant erhalten bleiben, so hat man hier die beiden Gleichungen

$$d(x\varrho) = 0 \tag{279}$$

und

$$x\varrho = x_1 \varrho_1 \tag{280}$$

und daher lässt sich von einem gewissen Anfangszustand (x_1, p_1, t_1) ausgehend, für jeden andern Druck p und die zugehörige Temperatur t die spezifische Dampfmenge x berechnen, sowie dann im Weitern das neue Volumen v der Gewichtseinheit Mischung nach der bekannten Gleichung

$$v = xu + \sigma$$

bestimmen, während das Anfangsvolumen:

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

beträgt; die Verbindung vorstehender Gleichungen ergiebt übrigens auch das Volumen v direct:

$$v = \sigma + (v_1 - \sigma) \frac{\frac{\varrho_1}{u_1}}{\frac{\varrho}{u}}$$

in welcher Gleichung meist σ noch vernachlässigt werden könnte.

Durch das Vorstehende ist nun auch der Verlauf der Curve, welche die Druckänderung nach dem Volumen angiebt, gegeben und durch Zeichnung darzustellen.

Die Wärmemenge, welche der Masse bei den Zustandsänderungen nach dieser Curve mitzutheilen ist, findet sich durch die allgemeine Formel (227) S. 300, wenn man x durch Gl. (280) bestimmt und dort substituirt:

$$dQ = dq + x_1 \varrho_1 \, T d\left(\frac{r}{\varrho T}\right)$$

Die Veränderung der innern Arbeit, in Wärmeeinheiten gemessen, ist hier, nach Gl. (220) wegen $d(x\varrho) = 0$

$$A dU = dq$$

und dann die äussere Arbeit, ebenfalls in Wärmeeinheiten gemessen,

$$A dL = dQ - A dU$$

oder

$$A dL = x_1 \varrho_1 \, T d\left(\frac{r}{\varrho T}\right)$$

Der Werth $\frac{r}{\varrho T}$ liesse sich für verschiedene Dämpfe als eine einfache Temperaturfunktion (empirische Formel) darstellen und dann könnte man vorstehende Formel leicht integriren. Wir unterlassen die weitere Verfolgung des Problemes in der angezeigten Richtung und wollen hier nur noch hervorheben, dass wenigstens bei Wasserdämpfen die Druckcurve, welche dem vorgelegten Probleme entspricht, sehr nahe mit der adiabatischen Curve zusammenfällt, wenn die anfängliche Dampfmenge x_1 gleich Eins oder nahezu Eins ist.

Nehmen wir z. B. reinen gesättigten Wasserdampf ($x_1 = 1$) von 8 Atmosphären, und lassen wir ihn nach der hier angenommenen Curve expandiren, so findet sich für die Endpressungen $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 Atmosphären, beziehungsweise, wenn man die entsprechenden Werthe von ϱ_1 und ϱ der Tabelle 10 entnimmt, nach Gl. (280) die spezifische Dampfmenge x:

$$x = 0{,}8620, \quad 0{,}8874, \quad 0{,}9172 \text{ und } 0{,}9540$$

während sich nach der Zusammenstellung auf S. 339 für die adiabatische Curve unter den gleichen Verhältnissen ergab:

$$x = 0{,}8541\,,\quad 0{,}8844\,,\quad 0{,}9182 \text{ und } 0{,}9564$$

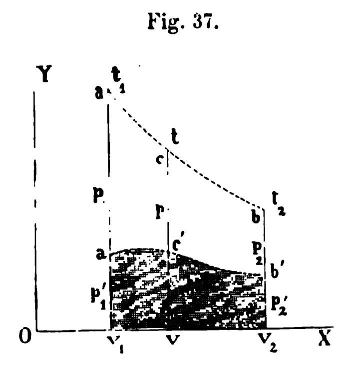
Die Uebereinstimmung ist überraschend und erstreckt sich selbst auf die in der Tabelle S. 341 angenommenen Fälle für $x_1 = 0{,}90$; $0{,}80$; $0{,}70$. Trotzdem zeigt die nähere Untersuchung, dass die Uebereinstimmung zwischen dem Verlaufe der dem vorgelegten Problem entsprechenden Curve mit der adiabatischen Curve bei Wasserdämpfen wohl nur zufällig ist; man überzeugt sich davon sogleich, wenn man zum andern Grenzfall übergeht, nämlich anfänglich nur Wasser ohne Dampf, also $x_1 = 0$ voraussetzt. Dann giebt vorliegendes Problem auch $x = 0$, d. h. die Curve geht in eine gerade Linie parallel der Ordinatenaxe über; (es folgt $v = v_1 = \sigma$) während das mit der adiabatischen Curve keineswegs der Fall ist. Immerhin ist, wenn anfänglich reiner gesättigter Wasserdampf vorhanden ist, die Uebereinstimmung so gross, dass man bei Untersuchungen der adiabatischen Curve wohl hier und da näherungsweise bei Bestimmung der spezifischen Dampfmenge x am Ende der Expansion oder Compression von der einfachen Formel (280), statt von Gl. (243) S. 322 Gebrauch machen kann.

Die im Vorstehenden behandelten Probleme, durch welche der Gang der Rechnungen dargelegt und der Gebrauch der allgemeinen Gleichungen gezeigt werden sollte, wenn die Zustandsänderungen der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen auf umkehrbarem Wege erfolgen, liessen sich leicht vermehren; so könnten wir noch die Aenderungen untersuchen, wenn der Werth xr oder $\frac{xr}{T}$ constant erhalten werden soll und weitere Annahmen solcher Art machen. Das Angegebene wird aber genügen; jedenfalls sind durch dasselbe alle technisch wichtigen Fälle als erledigt zu betrachten.

Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen, wenn die Zustandsänderungen auf nicht umkehrbarem Wege erfolgen.

Bei den obigen Untersuchungen haben wir die ganz specielle Voraussetzung gemacht, dass in jedem Augenblicke der Zustandsänderungen der Mischung Gleichgewicht zwischen dem äussern Drucke und dem Dampfdrucke stattfindet. In dieser Annahme liegt aber eine gewisse Beschränkung und die Sätze der mechanischen Wärmetheorie nehmen eine weit allgemeinere Bedeutung an, und die obigen Sätze über Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege erscheinen nur als besondere Fälle allgemeinerer Sätze, wenn man diese spezielle Annahme der Druckgleichheit verlässt. Ich habe schon im ersten Abschnitte S. 85—96 und bei der Betrachtung der Gase S. 146—158 die Resultate meiner Untersuchungen in dieser Richtung in ganz allgemeiner Form, gültig für Körper irgend welcher Art, gegeben und kann daher an das dort Gegebene anschliessend, sogleich zu spezieller Betrachtung des Verhaltens der Flüssigkeits- und Dampfmischungen übergehen. Ich werde jedoch hier näher auf die Frage eingehen, als es bei der Untersuchung der permanenten Gase geschehen ist, weil sich hier Gelegenheit bietet, eine Reihe von Problemen zum ersten Male zu behandeln, die von hoher technischer Wichtigkeit sind.

Fig. 37.



Es sei die Gewichtseinheit Dampf- und Flüssigkeitsmischung in ihrem Anfangszustande a (p_1, v_1) Fig. 37 gegeben, die Temperatur sei t_1, die spezifische Dampfmenge x_1 und die Masse denken wir uns hinter einem Kolben in einem Cylinder eingeschlossen. Es soll nun plötzlich der äussere Druck gegen den Kolben, der erst zur Erhaltung des Gleichgewichtes dem Dampfdruck p_1 gleich war, auf den kleinern Werth p'_1 (v_1 a' Fig. 37) gebracht werden. In Folge dessen wird sich die Masse ausdehnen und den Kolben, den wir uns gewichtslos vorstellen, zurückschieben und eine gewisse äussere Arbeit verrich-

ten, die man bestimmen kann, wenn das Gesetz der Aenderungen des äussern Druckes p' (vc' Fig. 37) durch die Curven $a'c'b'$ gegeben ist. Ist das Volumen v_2 geworden, so soll nun der Kolben plötzlich festgehalten werden; von diesem Momente an gerechnet, geht die Masse, die in heftiger, offener Bewegung begriffen ist, rasch in den Gleichgewichtszustand über, der Druck des Dampfes wächst dabei von p'_2 auf p_2, die Temperatur im neuen Gleichgewichtszustand b sei t_2 und die spezifische Dampfmenge x_2. Hier haben wir es mit einer Zustandsänderung auf nicht umkehrbarem Wege zu thun, denn es ist offenbar unmöglich, die Masse auf demselben Wege durch Compression wieder in den Anfangszustand zurückzuführen; wir können daher bei Beurtheilung dieser Art des Ueberganges von den Formeln (222) bis (228) S. 297 keinen Gebrauch machen, sondern müssen zu den allgemeinen Gleichungen (220) und (221) nämlich:

$$A\,dU = dq + d\,(x\varrho)$$
$$dQ = A\,(dU + dL)$$

zurückgehen.

Die Integration beider Gleichungen giebt dann die Veränderung der innern Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen, beim Uebergang aus einem Gleichgewichtszustand (a) in den andern (b)

$$A\,(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1$$

sowie

$$Q = A\,(U_2 - U_1 + L)$$

wobei L die äussere Arbeit darstellt, welche die Mischung bei ihrer Ausdehnung verrichtet hat.

Die Verbindung beider Gleichungen ergiebt, wenn wir überdies die Annahme machen, es sei der äussere Druck p' als Funktion von v gegeben, also die Arbeit L durch die Gleichung

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p'dv \tag{281}$$

bestimmbar:

$$Q = q_2 - q_1 + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2 + A\int_{v_1}^{v_2} p'dv \tag{282}$$

wobei auch noch, da wir eine Gewichtseinheit Mischung annehmen, das Anfangs- und Endvolumen durch die folgenden bekannten Formeln gegeben ist:

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma \text{ und } v_2 = x_2 u_2 + \sigma \qquad (283)$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass man auf dieselbe Gl. (282) für die Wärmemenge Q gelangt, wenn man sich vorstellt, der Uebergang der Masse geschehe auf dem umkehrbaren Wege $a a' c' b' b$; man entziehe also erst der Masse bei constantem Volumen v_1 die Wärmemenge Q_1 bis der Druck von p_1 auf p'_1 herabgegangen, die innere Arbeit von U_1 auf U'_1 geändert ist. Dann führe man den Körper auf dem umkehrbaren Wege $a' c' b'$ nach b', das erfordert die Wärmemenge Q_2, die innere Arbeit geht dabei aus U'_1 in U'_2 über; endlich erwärme die Masse wieder bei constantem Volumen v_2, bis der Zustand b erreicht ist, die erforderliche Wärmemenge sei Q_3; nach dem bisherigen finden sich die drei Wärmemengen:

$$Q_1 = A\,(U'_1 - U_1)$$
$$Q_2 = A\,(U'_2 - U'_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p' dv$$
$$Q_3 = A\,(U_2 - U'_2)$$

woraus die ganze erforderliche Wärmemenge sich durch Addition findet:

$$Q = A\,(U_2 - U_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p' dv$$

welche Gleichung sich dann für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen in die Form (282) bringen lässt. In einzelnen Fällen der Anwendung ist es bequemer und übersichtlicher, bei Bestimmung der Wärmemenge, die bei einem nicht umkehrbaren Uebergang dem Körper mitzutheilen ist, auf die hier angegebene Weise zu verfahren.

Die Gleichungen (282) und (283) geben nun das Mittel an die Hand, eine grosse Menge verschiedener Aufgaben zu lösen. Ist z. B. die ganze Wärmemenge Q und die äussere Arbeit L, sowie der Anfangszustand gegeben, so bestimmt sich der Endzustand der Masse, d. h. der Zustand im neuen Gleichgewichtszustand b. Wären hingegen die beiden Grenzzustände a und b bekannt, so liesse sich die Wärmemenge Q berechnen, wenn die äussere Arbeit L gegeben ist und umgekehrt lässt sich auf die Arbeit schliessen, wenn die Wärmemenge Q bekannt voraus-

gesetzt ist. Das Bemerkenswerthe hierbei ist, dass es bei Lösung derartiger Probleme im Allgemeinen gar nicht darauf ankommt, in welcher Art die Wärmemittheilung während des Ueberganges aus einem Gleichgewichtszustande in den andern stattfindet; man hat nur die gesammte Wärmemenge Q, die während des Prozesses zuzuleiten ist, zu kennen oder zu bestimmen. Immerhin ist es aber zweckmässig, gleich von vorn herein auch die Art und Weise der Wärmemittheilung mit in Betracht zu ziehen, weil dadurch erst die Gleichungen eine allgemeinere Bedeutung und Anwendbarkeit erhalten. Hierzu bietet sich nun ein einfaches Mittel, auf das ich schon bei der Untersuchung der Gase S. 152 hingewiesen habe.

Hätten wir (Fig. 37) die Ausdehnung der Masse nur bis zum Volumen v stattfinden lassen und hier den Prozess abgebrochen, so würde der Druck p' während des Ueberganges in den Gleichgewichtszustand c, in den Werth p (Ordinate vc) übergegangen sein; die Temperatur würde sich auf den Werth t und die spezifische Dampfmenge auf den Werth x eingestellt haben. War bis dahin die Wärmemenge Q zuzuführen, so findet sich nach Gl. (282) für diesen Uebergang

$$Q = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1 + A\int_{v_1}^{v} p'dv \tag{284}$$

Das Integral stellt die äussere Arbeit dar, welche bis dahin gewonnen wurde und deren Werth durch den Theil $v_1 v c' a'$ der schraffirten Fläche der Fig. 37 dargestellt wird.

Gehen wir zum Differential über, so folgt

$$dQ = dq + d(x\varrho) + Ap'dv \tag{285}$$

und das ist die Fundamentalgleichung für Uebergänge auf nicht umkehrbarem Wege. Der äussere Druck ist p'; der Gleichgewichtsdruck für den gleichen Moment ist p; beide Werthe sind als Funktion des Volumens v anzusehen und wir erhalten daher zwei Curven; von denen die eine $(a'c'b')$ dem Gesetze $p' = F'(v)$ unterworfen ist und das Gesetz der Veränderung des äussern Druckes angiebt, die andere hingegen (acb) das Gesetz $p = F(v)$ der Aenderung des Gleichgewichtsdruckes ergiebt.

Man hat bei Benutzung der Gl. (285) nur im Auge zu behalten, dass x die spezifische Dampfmenge fürs Gleichgewicht oder wie wir uns jetzt noch vorstellen wollen, für den Ruhezustand bedeutet und dass die Werthe q und ϱ als Funktionen der Gleichgewichtstemperatur t anzusehen sind. Ich werde der Einfachheit der Darstellung wegen, wenn ich von Temperatur, Druck, spezifischer Dampfmenge während des Ueberganges spreche, darunter immer diejenigen Werthe verstehen, welche sich auf den Zustand beziehen, in welchen der Körper übergehen würde, wenn die weitere Volumenänderung in dem betreffenden Momente unterbrochen gedacht wird und werde nur ausnahmsweise die Benennungen Gleichgewichtstemperatur, Gleichgewichtsdruck, Gleichgewichtsdampfmenge benutzen.

Die allgemeine Gl. (285) lässt sich in sehr verschiedene Formen bringen. Addirt und subtrahirt man rechts den Werth $A p d v$, so folgt:

$$dQ = dq + d(x\varrho) + A p d v - A(p - p')\, dv \tag{286}$$

Die ersten drei Glieder der rechten Seite dieser Gleichung geben aber die Wärmemenge an, die der Masse mitgetheilt werden müsste, wenn die Zustandsänderungen auf dem umkehrbaren Wege acb stattfinden würden.

Ersetzen wir diese drei Glieder durch den Werth, den die Gl. (227) S. 300 dafür giebt, so folgt

$$dQ = dq + T d\left(\frac{x r}{T}\right) - A(p - p')\, dv$$

Dividirt man diese Gleichung auf beiden Seiten durch AT und integrirt man, so folgt für einen solchen Uebergang auf nicht umkehrbarem Wege das Wärmegewicht, wenn wir die aus früheren Untersuchungen bekannte Bezeichnung einführen:

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \frac{1}{A}\left[\left(\tau + \frac{x r}{T}\right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right)\right] - \int \frac{(p - p')}{T}\, dv \tag{287}$$

Finden die Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege statt, so ist fortwährend $p = p'$; es fallen dann die beiden Curven acb und $a'c'b'$ zusammen. Ist der Uebergang nicht umkehrbar, so ist das Wärmegewicht jederzeit kleiner und in

der Gl. (286) tritt noch das Glied $A(p - p')\,dv$ auf; man erkennt sogleich, dass das Integral von $(p - p')\,dv$ durch den Flächeninhalt zwischen den beiden Curven acb und $a'c'b'$ Fig. 37 dargestellt wird.

Wegen des Nähern über die Bedeutung des Wärmegewichtes ist auf das zu verweisen, was ich auf S. 153 und 154 bei Behandlung der Gase hervorgehoben habe; die dort aufgeführten Sätze gelten auch hier.

Es soll nun im Folgenden an einer Reihe spezieller Untersuchungen gezeigt werden, in welcher Weise solche Probleme behandelt werden müssen, bei denen die Zustandsänderungen der Flüssigkeits- und Dampfmischungen auf nicht umkehrbarem Wege stattfinden.

Problem 1. Verhalten der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen, wenn die Ausdehnung der Masse unter Ueberwindung eines äussern **constanten** Druckes erfolgt.

Wir denken uns hier, der äussere Druck p', der kleiner als der anfängliche Gleichgewichtsdruck p_1 ist, werde constant erhalten; die Curve $a'c'b'$ Fig. 37 sei demnach eine der Abscissenaxe OX parallele Gerade: ist dann, wie wir im Weitern voraussetzen wollen, das Anfangs- und Endvolumen v_1 und v_2 der Gewichtseinheit Mischung gegeben, so findet sich die ganze Wärmemenge, die während des Ueberganges aus einem in den andern Gleichgewichtszustand zugeführt wird und die mit Q_2 bezeichnet werden mag, durch Integration der Gl. (285)

$$Q_2 = q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_1 \varrho_1 + A p' (v_2 - v_1) \tag{288}$$

wobei

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma \text{ und } v_2 = x_2 u_2 + \sigma \tag{289}$$

Wäre hiernach die Gleichgewichtstemperatur und Gleichgewichtsdampfmenge für den Anfang und das Ende noch gegeben, so liesse sich die gesammte Wärmemenge Q_2, die zu- oder abzuleiten ist, berechnen und umgekehrt liesse sich der Endzustand bestimmen, wenn der Anfangszustand und die Wärmemenge Q_2 als bekannt vorausgesetzt wird.

Man erkennt daraus, dass vorstehende Formeln und das vorgelegte Problem unendlich viele Fälle umfasst und dass die

Aufgabe erst durch eine weitere Angabe eine bestimmte wird. Diese weitere Angabe kann nun in der Art erfolgen, wie es eben angedeutet wurde oder man kann, was einen klaren Einblick in den Vorgang ermöglicht, voraussetzen, dass neben dem Verlaufe der Curve $a'c'b'$ Fig. 37 des äussern Druckes zugleich der Verlauf der Gleichgewichts-Druckcurve acb oder die Art und Weise der Wärmemittheilung gegeben ist. Denken wir uns die Wärmemittheilung und Ausdehnung in einem beliebigen Zwischenmomente, wenn das Volumen von v_1 auf v zugenommen hat, unterbrochen und bezeichnet t die Gleichgewichtstemperatur und x die Gleichgewichtsdampfmenge daselbst, so folgt die Wärmemenge Q, die bis dahin zuzuleiten war, nach Gl. (288)

$$Q = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1 + Ap'(v - v_1) \tag{290}$$

sowie:

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma \text{ und } v = xu + \sigma \tag{291}$$

Die Behandlung einiger spezieller Fälle mag zur nähern Erläuterung dienen.

Erster Fall. Die Wärmemittheilung erfolge bei constanter Gleichgewichtstemperatur.

Ist die Temperatur constant, so ist dasselbe auch mit dem Gleichgewichtsdruck p der Fall; die Gleichgewichts-Druckcurve acb Fig. 37 ist demnach ebenfalls eine gerade Linie parallel der Abscissenaxe, freilich immer unter der Voraussetzung, dass der Dampf am Ende nach dem Uebergange in den Gleichgewichtszustand noch gesättigt ist, eine Annahme, die wir auch in der Folge durchgängig aufrecht erhalten wollen.

Es ist hier $q_1 = q_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$, $u_1 = u_2$ und dann berechnet sich für eine gewisse Ausdehnung $v_2 - v_1$ nach Gl. (289)

$$v_2 - v_1 = (x_2 - x_1)\, u_1 \tag{292}$$

woraus die spezifische Dampfmenge x_2 am Ende folgt.

Die äussere Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen ist:

$$Ap'(v_2 - v_1) = Ap'u_1(x_2 - x_1) \tag{293}$$

Die Veränderung der innern Arbeit:

$$A(U_2 - U_1) = (x_2 - x_1)\,\varrho_1 \tag{294}$$

und die ganze Wärmemenge, welche mitzutheilen ist nach (288):

$$Q_2 = (\varrho_1 + Ap'u_1)(x_2 - x_1) \tag{295}$$

Für irgend einen Moment während des Ueberganges ergeben die vorstehenden Formeln die äussere und innere Arbeit, sowie die Wärmemenge Q, die während der Ausdehnung von v_1 auf v zuzuführen war, sehr leicht, wenn man die spezifische Dampfmenge x, welche aus der Gleichung

$$v = x u_1 + \sigma$$

sich ergiebt, in die Gleichungen statt x_2 substituirt. Wäre ausnahmsweise $p' = p_1$, so fallen, wie erwähnt, beide Curven zusammen und ergeben diejenige Curve, die wir früher die isothermische Curve genannt haben und die vorstehenden Formeln gehen dann in diejenigen über, die wir früher auf S. 304 entwickelt haben.

Nehmen wir hingegen den äussern constanten Druck $p' = 0$ an, so ist nach Gl. (293) die äussere Arbeit Null und wir erhalten:

$$Q_2 = A(U_2 - U_1) = \varrho_1 (x_2 - x_1)$$

oder unter Benutzung von Gl. (292)

$$Q_2 = \frac{\varrho_1}{u_1}(v_2 - v_1)$$

Diese Formel giebt die Wärmemenge, welche der Masse mitzutheilen ist, wenn man das Gefäss, welches die Masse umschliesst, mit einem luftleeren Gefässe vom Volumen $v_2 - v_1$ in Verbindung setzt und verlangt, dass, nachdem die Masse wieder in den Gleichgewichtszustand übergegangen ist, die Temperatur wieder die anfängliche sei. Bei einem solchen Uebergange geht die Flüssigkeitsmasse $x_2 - x_1$, die sich nach Gl. (292) leicht bestimmt, in Dampf über.

Nehmen wir für p' wieder einen zwischen p_1 und Null liegenden Werth an, so findet sich das Wärmegewicht im vorliegenden Fall nach Gl. (287), weil p und p' sowie die Temperatur T constant ist.

$$P = \frac{r_1}{AT_1}(x_2 - x_1) - \frac{(p_1 - p')(v_2 - v_1)}{T_1}$$

oder mit Benutzung von Gl. (292)

$$P = \frac{r_1 - A(p_1 - p')u_1}{AT_1} \cdot (x_2 - x_1) \qquad (296)$$

welche Formel sich wieder für die beiden Grenzfälle $p_1 = p'$ oder $p' = 0$ wesentlich vereinfacht, man erhält für beide Fälle beziehungsweise:

$$P = \frac{r_1}{AT_1}(x_2 - x_1) \text{ und } P = \frac{\varrho_1}{AT_1}(x_2 - x_1).$$

Man erkennt schon aus dem hier Gegebenen, welche Menge der verschiedenartigsten Probleme sich aufstellen und mit Leichtigkeit lösen lassen, selbst nur unter der speziellen Voraussetzung, dass der äussere Druck p' constant ist; man kann hinsichtlich der Gleichgewichts-Druckcurve die verschiedensten Voraussetzungen machen und auf diese Weise auch alle Probleme, die ich bei Betrachtung der Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege behandelt habe, nochmals unter der vorliegenden, allgemeinern Annahme $p' =$ Const. erneuerter Untersuchung unterwerfen. So könnten wir voraussetzen, dass während der Ausdehnung die Gleichgewichts-Dampfmenge x constant erhalten wird; die Druckcurve acb Fig. 37), deren Verlauf sich leicht ermitteln liess, wäre dann eine »Curve constanter Dampfmenge« besonderer Art.

Wir könnten ferner die Annahme machen, dass die innere Arbeit constant, also

$$dq + d(x\varrho) = 0$$

wäre; die Gleichgewichtscurve würde dann eine besondere Art von isodynamischer Curve sein, deren Verlauf sich bestimmen lässt u. s. w. Alle solche Untersuchungen sind mit Hülfe der von mir gegebenen Formeln so leicht ausführbar, dass es mir unnöthig erscheint, das vorgelegte Problem durch Beispiele weiter zu verfolgen, bei denen bestimmte Voraussetzungen in Betreff des Verlaufes der beiden Druckcurven gemacht werden.

Es mag hingegen noch ein Beispiel folgen, bei dem hinsichtlich der Wärmemittheilung eine besondere Bedingung gestellt wird.

Zweiter Fall. Es werde der Mischung während ihrer Ausdehnung unter Ueberwindung des constanten äussern Druckes p' Wärme weder mitgetheilt noch entzogen.

Hier ist in Gl. (290) für den entsprechenden Moment des Ueberganges $Q = 0$ zu setzen und man erhält daher:

$$0 = q - q_1 + x\varrho - x_1\varrho_1 + Ap'(v - v_1)$$

Bestimmt man ferner mit Hülfe der Gl. (291)

$$v - v_1 = xu - x_1 u_1$$

so folgt durch Substitution in die vorige Formel:

$$q + x(\varrho + Ap'u) = q_1 + x_1(\varrho_1 + Ap'u_1) \qquad (297)$$

Nehmen wir nun den Anfangszustand $(t_1 p_1 x_1)$ als gegeben an, ebenso den äussern constanten Druck p', so lässt sich mit Hülfe dieser Gleichung die Gleichgewichtsdampfmenge x für einen beliebigen Werth der Gleichgewichtstemperatur t oder des zugehörigen Druckes p berechnen und dann bestimmt sich das zugehörige Volumen

$$v = xu + \sigma$$

Trägt man die, verschiedenen Pressungen p entsprechenden Werthe des Volumens v als Abscissen, den zugehörigen Druck als Ordinaten auf, so ergiebt sich der Verlauf der Gleichgewichts-Druckcurve acb (Fig. 37), die also als eine eigenthümliche Art adiabatischer Curve anzusehen ist.

Ist umgekehrt v und v_1 gegeben, so bestimmt man nach den Gleichungen (291)

$$x_1 = \frac{v_1 - \sigma}{u_1} \text{ und } x = \frac{v - \sigma}{u}$$

substituirt diese Werthe in Gl. (297) und berechnet dann die Gleichgewichtstemperatur t, was freilich nur auf dem Wege des Probirens möglich ist, da die Temperaturfunktionen q, ϱ und u nicht in einfacher Beziehung zur Temperatur stehen.

Bei Lösung dieses Problems wird es sich gewöhnlich nur um die Bestimmung des Endzustandes der Masse handeln.

Hätte man die Ausdehnung der Masse soweit fortgesetzt, bis der Gleichgewichtsenddruck p_2 dem äussern Drucke p' gleich geworden wäre, so fände sich nach Gl. (297)

$$q_2 + x_2(\varrho_2 + Ap_2 u_2) = q_1 + x_1(\varrho_1 + Ap_2 u_1)$$

oder unter Benutzung der bekannten Beziehung $r = \varrho + Apu$

$$q_2 + x_2 r_2 = q_1 + x_1(\varrho_1 + Ap_2 u_1) \qquad (298)$$

woraus sich die Dampfmenge x_2 am Ende und dann das Endvolumen v_2 ermitteln liesse.

Ob bei den hier angenommenen Zustandsänderungen ein Niederschlagen von Dampf oder ein Verdampfen von Flüssigkeit erfolgt, entscheidet leicht die Gl. (297), je nachdem $x < x_1$ oder $> x_1$ ausfällt. Bei gegebenen Grenzpressungen p_1 und p_2 und gegebenem Werth des äussern Druckes p' entscheidet hierüber die anfängliche spezifische Dampfmenge x_1.

Nehmen wir an, in einem Cylinder sei die Gewichtseinheit Mischung von Wasser und Wasserdampf vom Drucke von 5 Atmosphären eingeschlossen und die Mischung sollte unter Ueberwindung eines äussern constanten Druckes von 1 Atmosphäre sich so weit ausdehnen, bis der Gleichgewichtsdruck am Ende 2 Atmosphären betrage, so folgt hier aus Gl. (297), wenn wir nach Tab. 10 einsetzen, entsprechend dem Drucke von 5 Atmosphären:

$$q_1 = 153{,}74 \quad \varrho_1 = 454{,}99 \quad u_1 = 0{,}3626$$

und entsprechend dem Drucke von 2 Atmosphären:

$$q = 121{,}42 \quad \varrho = 480{,}00 \quad u = 0{,}8588$$

und nach der Aufgabe $p' = 1.10334$ substituiren

$$x = 0{,}0645 + 0{,}9259\, x_1$$

Das Anfangs- und Endvolumen ist dann nach der Gl. (289):

$$v_1 = 0{,}3626\, x_1 + 0{,}0010 \text{ und } v = 0{,}7952\, x_1 + 0{,}0554$$

Nehmen wir nun an, es sei anfänglich nur Dampf vorhanden, also $x_1 = 1$, so folgt

$$x = 0{,}9904$$

und das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v}{v_1} = 2{,}338$$

Da hier $x < x_1$ ausfällt, so findet bei diesem Vorgang ein Niederschlagen von Dampf statt; wäre hingegen anfänglich das Gewicht der Dampf- und Flüssigkeitsmasse gleich gross, also $x_1 = 0{,}5$, so fände sich:

$$x = 0{,}5274$$

und das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v}{v_1} = 2{,}470$$

Hier ist $x > x_1$, also verdampft ein Theil Wasser und zwar dem Gewichte nach 0,0274 Kilogramm.

Würde man im vorliegenden Fall die Expansion so weit fortsetzen, bis der Gleichgewichtsdruck auf den Werth des äussern Druckes, d. h. auf eine Atmosphäre gesunken ist, so wären die Veränderungen nach Gl. (298) zu beurtheilen: es wäre nach Tabelle 10 entsprechend dem Drucke von einer Atmosphäre zu setzen:

$$q_2 = 100{,}50 \text{ und } r_2 = \varrho_2 + Ap_2 u_2 = 536{,}50$$

Sollte die Dampfmenge am Ende $x_2 = 1$, also schliesslich nur gesättigter Dampf von einer Atmosphäre Druck vorhanden sein, so fände sich die anfängliche Dampfmenge x_1 aus Gl. (298), wenn man die gegebenen Werthe substituirt:

$$x_1 = 1{,}042$$

eine Bedingung, die natürlich nicht erfüllt werden kann, da x_1 nie grösser als Eins sein kann. Das Resultat spricht aber aus, dass hier anfänglich der Dampf überhitzt sein müsste.

Die vorliegende spezielle Untersuchung führt noch auf die Lösung eines Problems, das von besonderem Interesse ist, weil es recht deutlich den Unterschied des Verhaltens der permanenten Gase und der gesättigten Dämpfe vor Augen führt.

Es soll nämlich vorausgesetzt werden, dass der äussere Druck, welchen die Masse während ihrer Expansion zu überwinden hat, Null sei.

Mit diesem Falle hat man es offenbar zu thun, wenn das Gefäss, welches die Dampf- und Flüssigkeitsmasse enthält, mit einem luftleeren Raum in Verbindung gesetzt wird. Die Mischung breitet sich hier, ohne äussere Arbeit zu verrichten, aus und es fragt sich nun, welches der Zustand der Mischung am Ende, nach Eintritt des neuen Gleichgewichtszustandes ist. Bei einem permanenten Gase fanden wir auf S. 151, dass die Temperatur bei diesem Uebergange aus einem Gleichgewichtszustand in den andern keine Aenderung erleidet. Anders gestaltet sich aber das Resultat bei Dampf- und Flüssigkeitsmischungen *).

*) Vergl. die Abhandlung des Verfassers »Beiträge zur Theorie der Dämpfe« in Poggendorffs Annalen. 1860.

Hier haben wir einfach in Gl. (297) $p' = 0$ zu setzen und erhalten dann

$$q + x\varrho = q_1 + x_1 \varrho_1 \tag{299}$$

Diese Gleichung löst nun schon in Verbindung mit den Gleichungen für das spezifische Volumen:

$$v = xu + \sigma \text{ und } v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

das Problem. Diese drei Gleichungen sind aber dieselben, die wir auf S. 305 bei Untersuchung des Verlaufes der isodynamischen Curve benutzt haben, daher folgt, dass hier die Gleichgewichts-Druckcurve acb (Fig. 37 S. 362) mit der isodynamischen Curve der Dämpfe identisch ist. Die Untersuchung der letztern Curve hat uns aber ergeben, dass mit der Ausdehnung der Mischung eine Temperatur- und Druckabnahme und ein Verdampfen eines Theiles der Flüssigkeit verbunden ist und zwar galt das für alle Dampfarten, die bis jetzt eine Untersuchung in dieser Richtung zulassen. Damit also der Dampf nach der Expansion in den luftleeren Raum nicht überhitzt sei, muss er anfänglich eine gewisse Quantität Flüssigkeit beigemengt erhalten, es muss $x_1 < 1$ sein.

Die Verbindung vorstehender Gleichungen führt, wenn man x eliminirt, auf die Formel:

$$\frac{\varrho}{u}(v - v_1) = q_1 - q + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right)$$

worin $v - v_1$ die Volumenvergrösserung, d. h. den Inhalt des anfänglich luftleeren Gefässes darstellt. Die Dampfmenge nach der Ausbreitung findet sich dann

$$x = \frac{v - \sigma}{u}$$

Nehmen wir an, in einem Gefässe befinde sich die Gewichtseinheit Wasserdampf und Wasser von 5 Atmosphären Druck; die spezifische Dampfmenge sei $x_1 = 0{,}974$. Welches müsste das Volumen des luftleeren Gefässes sein, wenn nach der Verbindung beider Räume der Druck auf 2 Atmosphären gesunken sein soll und welches ist das Gesammtvolumen v und die spezifische Dampfmenge x am Ende?

Benutzen wir die Zahlenwerthe des vorigen Beispieles, so findet sich aus Gl. (299) die spezifische Dampfmenge am Ende:

$$x = 0{,}990$$

Das Anfangsvolumen und Endvolumen ist nach obigen Formeln

$$v_1 = 0{,}3541 \text{ und } v = 0{,}8515 \text{ Cubikmeter,}$$

also müsste das Volumen des luftleeren Gefässes

$$v - v_1 = 0{,}4974 \text{ Cubikmeter sein.}$$

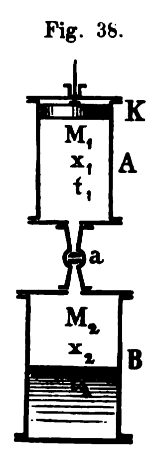
Da $x > x_1$ ausfällt, so findet, wie behauptet wurde, ein Verdampfen statt.

Hätten wir im gleichen Falle das Volumen des luftleeren Gefässes so gewählt, dass der Enddruck auf eine Atmosphäre übergeht, so hätte sich auf dem gleichen Wege die spezifische Dampfmenge am Ende $x = 1$ ergeben und das Volumen dieses Gefässes hätte sein müssen: $v - v_1 = 1{,}2963$ Cubikmeter; bei diesem Uebergange ist alles anfänglich vorhandene Wasser noch in Dampf übergegangen und der Dampf würde sich im überhitzten Zustand befinden, wenn das Volumen des luftleeren Raumes grösser als 1,2963 Cubikmeter angenommen worden wäre..

Problem 2. Zwei mit Dampf- und Flüssigkeitsmischungen gleicher Art gefüllte Gefässe werden mit einander in Verbindung gebracht. Welches ist der Zustand der ganzen Masse am Ende, wenn anfänglich in beiden Räumen die spezifische Dampfmenge und der Druck verschieden sind und wenn während der Mischung Wärme weder zu- noch abgeleitet wird?

Das eine Gefäss A (Fig. 38) enthält M_1 Kilogramm Mischung, davon sei $M_1 x_1$ dampfförmig und $M_1(1 - x_1)$ im tropfbarflüssigen Zustand vorhanden. Das Gefässvolumen sei V_1, Druck und Temperatur der darin befindlichen Mischung sei p_1 und t_1. (Den in der Figur im Cylinder A angedeuteten Kolben K denken wir uns bis auf Weiteres festgehalten.) Im Gefäss B, das zunächst durch den Hahn a vom Gefässe A abgeschlossen gedacht wird, befinden sich $M_2 x_2$ Kilogramm Dampf und $M_2(1 - x_2)$ Kilogramm Flüssigkeit vom Drucke p_2 und der Temperatur t_2; das Gefässvolumen sei V_2. Wir nehmen aber ausdrücklich an, dass beide Gefässe Dampf und Flüssigkeit von gleicher Art enthalten,

Fig. 38.



weil nur unter dieser Voraussetzung nach den bis jetzt vorhandenen experimentellen Grundlagen die Aufgabe lösbar ist.

Oeffnet man nun den Hahn a, so findet eine Mischung statt, in Folge deren die Temperatur und der Druck sich in beiden Gefässen auf den gleichen Werth einstellen wird; die spezifische Dampfmenge wird, wenn wir jetzt beide Räume als einen auffassen, von x_1 und x_2 verschieden sein: schliesslich findet sich, wenn die spezifische Dampfmenge am Ende x ist, im ganzen Raume $(M_1 + M_2)$ x Kilogramm Dampf und $(M_1 + M_2)$ $(1 - x)$ Kilogramm Flüssigkeit von der Temperatur t und dem Drucke p. Die Werthe x, t und p sind es, die wir zu ermitteln haben.

Das Volumen des Gefässes A ist unter Benutzung der obigen Bezeichnung

$$V_1 = M_1 \, (x_1 u_1 + \sigma)$$

Das Volumen des Gefässes B

$$V_2 = M_2 \, (x_2 u_2 + \sigma)$$

Nach der Mischung ist das Volumen der ganzen Masse:

$$V = (M_1 + M_2) \, (x u + \sigma)$$

Da nun eine Veränderung des Gesammtvolumens nicht stattfand, so ist:

$$V = V_1 + V_2$$

und daher unter Benutzung vorstehender Formeln nach leichter Reduction:

$$(M_1 + M_2) \, x u = M_1 x_1 u_1 + M_2 x_2 u_2 \qquad (300)$$

Neben dieser Gleichung, welche als Unbekannte die spezifische Dampfmenge x und die Temperaturfunktion u enthält, lässt sich noch eine zweite Gleichung aufstellen.

Bezeichnen wir die innere Arbeit in der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0^0 Temperatur mit U_0, so findet sich der Mehrbetrag U_1 der innern Arbeit der Masse M_1 im Gefässe A vor der Mischung in Wärmeeinheiten gemessen nach Gl. (220) S. 296

$$A U_1 = M_1 \left[A U_0 + q_1 + x_1 \varrho_1\right]$$

und durch Analogie ebenso die in Wärmeeinheiten gemessene innere Arbeit U_2 im andern Gefässe B

$$A U_2 = M_2 \left[A U_0 + q_2 + x_2 \varrho_2\right]$$

und nach der Mischung die innere Arbeit U der ganzen Masse in beiden Gefässen:

$$AU = (M_1 + M_2)\left[AU_0 + q + x\varrho\right]$$

Nun ist aber während der Mischung Wärme weder zu- noch abgeführt worden und ferner wurde äussere Arbeit von der ganzen Masse weder verrichtet noch aufgenommen, daher muss die innere Arbeit der ganzen Masse vor und nach der Mischung dieselbe sein; wir haben sonach

$$U = U_1 + U_2$$

oder unter Benutzung vorstehender Formeln nach einfacher Reduction:

$$(M_1 + M_2)\ (q + x\varrho) = M_1\ (q_1 + x_1\varrho_1) + M_2\ (q_2 + x_2\varrho_2) \qquad (301)$$

Diese Gleichung löst in Verbindung mit Gl. (300) das vorgelegte Problem; man erkennt übrigens, dass nur das Verhältniss $M_2 : M_1$ der beiden Gewichtsmengen gegeben zu sein braucht; bezeichnet man dieses Verhältniss mit k, so folgt durch Elimination von x aus den Gl. (300) und (301)

$$(1 + k)\ q + (x_1 u_1 + k x_2 u_2)\frac{\varrho}{u} = (q_1 + x_1\varrho_1) + k\ (q_2 + x_2\varrho_2) \qquad (302)$$

aus welcher Gleichung sich die Temperatur t und daher der Enddruck p ermitteln lässt; die spezifische Dampfmenge x am Ende findet sich schliesslich nach Gl. (300) durch die Formel:

$$(1 + k)\ xu = x_1 u_1 + k x_2 u_2 \qquad (303)$$

Nehmen wir an, im Gefässe A befinden sich M_1 Kilogramm reiner gesättigter Wasserdampf von 1,5 Atmosphären Spannung (ohne Beimischung von Wasser), hingegen im Gefäss B vor der Mischung $M_2 = 24{,}380\ M_1$ Kilogramm Wasserdampf und Wasser vom Drucke von $^1/_{10}$ Atmosphären, die spezifische Dampfmenge daselbst sei $x_2 = 0{,}0095$, so ergeben, weil $k = 24{,}380$ sein soll, die Gleichungen (302) und (303), wenn man nach Angabe von Tab. 10 dort substituirt, entsprechend dem Druck von 1,5 Atmosphären:

$$q_1 = 112{,}41 \qquad \varrho_1 = 487{,}01 \qquad u_1 = 1{,}1258$$

und für den Druck von 0,1 Atmosphären:

$$q_2 = 46{,}28 \qquad \varrho_2 = 538{,}85 \qquad u_2 = 14{,}5508$$

$$q + 0{,}1771 \frac{\varrho}{u} = 72{,}99 \text{ und}$$

$$x u = 0{,}1771$$

Die erstere Gleichung führt nach einigem Probiren unter Zuziehung von Tabelle 10 auf den Enddruck $p = 0{,}2$ Atmosphären und auf die Endtemperatur $t = 60{,}45^0$ C, denn setzt man die diesem Drucke entsprechenden Werthe $q = 60{,}59$ und $\varrho : u = 69{,}95$ in diese Gleichung, so findet sich die Summe links 72,98 also genau genug übereinstimmend. Da nun für diese Temperatur $u = 7{,}5421$ ist, so folgt die spezifische Dampfmenge am Ende im ganzen Raume $x = 0{,}0235$.

Anfänglich war das Gewicht des Dampfes im Raume A: $M_1 x_1 = M_1$ und das im Raume B: $M_2 x_2 = 24{,}380 \cdot M_1 x_2$ oder $0{,}2316\, M_1$, sonach in beiden Gefässen zusammen das Dampfgewicht $1{,}2316\ M_1$.

Nach der Mischung hingegen beträgt das Dampfgewicht in beiden Gefässen $(M_1 + M_2)\, x = 0{,}5964\, M_1$.

Uebrigens ist das Volumen des Gefässes A nach den oben gegebenen Formeln:

$$V_1 = M_1\, (x_1 u_1 + \sigma) = 1{,}1268\, M_1 \text{ Cubikmeter}$$

hingegen das Volumen des zweiten Gefässes B

$$V_2 = M_2\, (x_2 u_2 + \sigma) = 3{,}3945\, M_1$$

hiernach das Verhältniss $V_2 : V_1 = 3$.

Das im Vorstehenden berechnete Beispiel entspricht dem Vorgange im Condensator einer Dampfmaschine. Das Gefäss A ist der Dampfcylinder, in welchem der Druck von 1,5 Atmosphären herrscht; das Gefäss B stellt den Condensator vor, dessen Inhalt gewöhnlich das dreifache des Cylinderinhaltes ist und in welchem wir Dampf und Wasser unter dem Drucke von 0,1 Atmosphären angenommen haben. In dem Augenblicke, in welchem nun die Verbindung zwischen Cylinder und Condensator hergestellt wird, steigt plötzlich der Condensatordruck oder richtiger der Druck in beiden Räumen stellt sich auf 0,2 Atmosphären, vorausgesetzt, die Mischungsverhältnisse seien bei dieser Dampfmaschine von der Art, wie wir sie hier angenommen haben. Eine solch plötzliche Spannungszunahme beobachten wir auch wirklich

am Vacuummeter der Condensatoren der Dampfmaschinen im Augenblicke der Verbindung des Cylinders mit dem Condensator. Da aber der Condensator durch Zuführung von kaltem Wasser abgekühlt wird, so erhält sich dieser Druck nicht auf dieser Höhe, er geht vielmehr sofort wieder auf einen kleinern Werth zurück, wie man leicht an den Schwankungen des Vacuummeters eines Condensators beobachten kann. Wir kommen unten auf diese wichtige technische Frage zurück.

Das vorgelegte Problem soll hier zunächst in anderer Richtung weiter verfolgt werden.

Wir wollen nämlich annehmen, es werde, nachdem die Verbindung beider Räume und die Mischung der Massen erfolgt ist, beiden Gefässen von aussen Wärme mitgetheilt und zwar so weit, bis in beiden Gefässen der Druck vom Werthe p auf den anfänglichen Druck p_1 im Gefässe A gestiegen ist. (Wir setzen voraus, dass A dasjenige Gefäss sei, in welchem anfänglich der höhere Druck herrschte.)

Da hier die Wärmemittheilung bei constantem Volumen $V_1 + V_2$ von der Temperatur t auf t_1 stattfindet und die spezifische Dampfmenge x nach der Mischung jetzt als bekannt anzusehen ist, so findet sich sofort die nöthige Wärmemenge Q nach Gl. (262) S. 347

$$Q = (M_1 + M_2)\left[q_1 - q + xu\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right)\right]$$

oder

$$Q = (M_1 + M_2)\left[q_1 - q + xu\,\frac{\varrho_1}{u_1} - x\varrho\right]$$

Ersetzt man hier den Werth xu durch den Ausdruck, der sich aus Gl. (300) dafür ableiten lässt, und bestimmt man $x\varrho$ aus Gl. (301), so findet sich durch Substitution in vorstehende Formel nach leichter Reduction:

$$Q = M_2\left[q_1 - q_2 + x_2 u_2\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho_2}{u_2}\right)\right] \tag{304}$$

Diese Wärmemenge ist aber von der Masse M_1 im Gefässe A ganz unabhängig und ist identisch mit der Wärmemenge, die man dem Gefässe B hätte vor der Mischung zuführen müssen, um daselbst zunächst den Druck von p_2 und p_1 zu erhöhen. Das Re-

sultat liess sich übrigens erwarten, denn hätten wir vor der Mischung im Gefäss B durch Wärmemittheilung den Druck p_2 auf den Werth des Druckes p_1 im Gefässe A gebracht und dann erst gemischt, so wäre offenbar der Endzustand in beiden Gefässen zusammengenommen derselbe wie vorhin, wo zuerst gemischt und dann erst die Wärmemenge Q zugeleitet wurde.

Ich habe aber absichtlich das Problem unter der letztern Voraussetzung vorgeführt, um zu zeigen, dass es gleichgültig ist, welchem der beiden Gefässe die im Vorstehenden berechnete Wärmemenge Q mitgetheilt werden muss, wenn man will, dass schliesslich in beiden Räumen der höhere Druck p_1 des Gefässes A herrscht; und dass es selbst gleichgültig ist, ob die Wärmemittheilung vor oder nach der Mischung erfolgt.

Diese Resultate sind von grosser technischer Wichtigkeit, sie werden mir unten unter Anderm das Mittel an die Hand geben, den Einfluss des sogenannten schädlichen Raumes im Dampfcylinder der Dampfmaschinen auf die Wirkungsweise desselben näher zu untersuchen. Ich kann schon jetzt darauf hinweisen, dass dort der Dampfkessel mit dem Gefässe A und der schädliche Raum im Cylinder mit dem Gefässe B identisch ist; beide Räume sind dort mit Dampf von verschiedenem Drucke gefüllt: im Augenblicke der Eröffnung des Dampfkanales, in welchem also die Verbindung beider Räume erfolgt, steht der Dampfkolben fast still, denn er befindet sich am Ende des Hubes oder nahe dabei. Ist sonach M_2 die Dampf- und Flüssigkeitsmasse im schädlichen Raume im Augenblicke der Eröffnung, t_2 die Temperatur daselbst und t_1 die Kesseltemperatur, so bestimmt die Formel (304) die Wärmemenge, welche dem Dampfkessel mitzutheilen ist, um beim Beginne des Hubes den schädlichen Raum mit Kesseldampf zu füllen; ja es lässt sich, wie ich später zeigen werde, mit Hülfe derselben Formel selbst die Dampfmenge berechnen, die zur Füllung des schädlichen Raumes verwendet wird.

Unser Problem bietet aber auch nach anderer Seite hin technisches Interesse.

Nehmen wir nämlich umgekehrt an, es soll nach der Mischung und nach Herstellung des Gleichgewichts in beiden Gefässen A und B der ganzen Masse so viel Wärme entzogen werden, dass schliesslich der Druck von p auf p_2 gesunken ist, d. h. auf den kleinern Druck p_2, der vorher im Gefässe B herrschte, so findet

sich auf gleichem Wege, wie vorhin, die abzuleitende Wärmemenge:

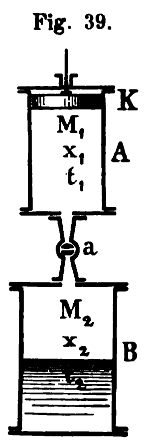
$$Q = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho_2}{u_2} \right) \right] \tag{304a}$$

Man kann sich eben denken, es sei zunächst dem Gefässe A diese Wärme entzogen, dadurch der Druck von p_1 auf p_2 gebracht und dann erst die Mischung bewerkstelligt worden.

Von dieser Formel werden wir bei dem folgenden Problem Gebrauch machen.

Problem 3. Es ist die Theorie der Oberflächen-Condensatoren der Dampfmaschinen zu entwickeln.

Fig. 39.



Es sei A (Fig. 39) der Dampfcylinder, in welchem der Kolben K eben am Ende des Hubes steht; der Cylinder ist durch ein mit einem Hahne a versehenes Rohr mit dem Condensator B verbunden. Der Hahn a sei zunächst geschlossen; der Cylinder enthalte M_1 Kilogr. Wasser und Dampf vom Drucke p_1; der Condensator M_2 Kilogr. Wasser und Dampf unter dem Drucke p_2; dort sei die spezifische Dampfmenge x_1, hier x_2. In Wirklichkeit ist hier der Prozess folgender: man kühlt den Condensator ab durch kaltes Wasser, welches an der Oberfläche desselben hinströmt; öffnet den Hahn a und mischt zunächst. Durch die Wärmeentziehung wird dann die Pressung auf die Condensatorpressung zurückgeführt und constant erhalten, während der Dampfkolben ans andre Ende des Hubes geht, also dabei die im Cylinder zurückgebliebene Dampf- und Flüssigkeitsmasse unter constantem Druck p_2 vollends in den Condensator schiebt.

Wir wollen nun die Frage beantworten, welche Wärmemenge dem Condensator im Ganzen pro Kolbenschub zu entziehen ist, damit im ganzen Raume die Condensatorpressung constant bleibt und ferner, welche Dampf- und Flüssigkeitsmasse schliesslich im Condensator vorhanden ist. Im Augenblicke der Eröffnung des Verbindungsrohres stellt sich in beiden Räumen der Druck auf den mittlern Werth p ein und die spezifische Dampfmenge ist x. Der Kolben steht fast still; es geschieht daher zuerst die Wärme-

entziehung nahezu bei constantem Volumen. Die Wärmemenge Q_1, die dabei abzuleiten ist, um die Pressung p in **beiden** Räumen auf die Condensatorpressung p_2 zurückzuführen, ist nach Gl. (304a)

$$Q_1 = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho_2}{u_2} \right) \right] \tag{305}$$

und die spezifische Dampfmenge, in beiden Räumen zusammen genommen nach Entziehung dieser Wärmemenge, welche Dampfmenge mit x'_2 bezeichnet werden mag, nach Gl. (261) S. 347

$$x'_2 = \frac{x u}{u_2} \tag{306}$$

Jetzt geht nun der Dampfkolben K ans andere Ende des Hubes und dabei wird die ganze Masse $M_1 + M_2$, die wir mit M bezeichnen wollen, **bei constantem Drucke** p_2 comprimirt und ihre Volumen von $V_1 + V_2$ auf V_2 gebracht. Ist die spezifische Dampfmenge am Ende x''_2, so ist die Wärmemenge Q_2, welche bei constantem Drucke p_2 und der angegebenen Volumenverminderung abzuführen ist

$$Q_2 = M r_2 (x'_2 - x''_2)$$

ferner das Volumen im Anfange

$$V_1 + V_2 = M (x'_2 u_2 + \sigma)$$

am Ende

$$V_2 = M (x''_2 + \sigma)$$

und daher die Differenz, d. h. die Volumenverminderung:

$$V_1 = M u_2 (x'_2 - x''_2) \tag{307}$$

Die Verbindung mit der Gleichung für Q_2 giebt dann:

$$Q_2 = V_1 \cdot \frac{r_2}{u_2}$$

oder wenn wir hier das Cylindervolumen $V_1 = M_1 (x_1 u_1 + \sigma)$ einsetzen und dabei, was jederzeit erlaubt ist, den Werth σ als sehr klein vernachlässigen

$$Q_2 = M_1 x_1 u_1 \cdot \frac{r_2}{u_2} = M_1 x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_2}{u_2} + A p_2 \right)$$

Hiernach folgt dann die ganze Wärmemenge Q, welche dem Condensator per Kolbenschub zu entziehen ist

$$Q = Q_1 + Q_2$$

oder

$$Q = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_1}{u_1} + A p_2 \right) \right]$$

oder nach weiterer Vereinfachung:

$$Q = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 (\varrho_1 + A p_2 u_1) \right] \qquad (308)$$

In Wirklichkeit geschieht bei Oberflächen-Condensatoren die Wärmeentziehung dadurch, dass man kaltes Wasser an der Oberfläche hinleitet, das sich dabei Wärme aufnehmend von einer gewissen Temperatur t_0 auf die Temperatur t'_0 erwärmt. Ist das Gewicht der Kühlwassermenge pro Kolbenschub M_0, so ist die Wärmemenge, die der Temperaturerhöhung $t'_0 - t_0$ entspricht, nach der eingeführten Bezeichnung auch $Q = M_0 (q'_0 - q_0)$ und durch Einsetzen in Gl. (308) findet sich dann das Gewicht des Kühlwassers:

$$M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1 (\varrho_1 + A p_2 u_1)}{q'_0 - q_0} M_1 \qquad (309)$$

Was den Zustand der Masse im Condensator betrifft, wenn der Dampfkolben am Ende seines Laufes angelangt ist, so bestimmt sich die spezifische Dampfmenge x''_2 nach Gl. (307), wenn dort, wie vorhin $V_1 = M_1 x_1 u_1$ substituirt und zur Bestimmung von x'_2 Gl. (306) benutzt wird:

$$M u_2 x''_2 = M x u - M_1 x_1 u_1$$

Ersetzt man hier wieder M durch $M_1 + M_2$ und benutzt man für den Werth Mxu die Gl. (300), so folgt

$$(M_1 + M_2) x''_2 = M_2 x_2 \qquad (310)$$

Diese Gleichung lehrt, dass am Ende die spezifische Dampfmenge im Condensator eine andere ist, dass aber das ganze Gewicht des Dampfes im Condensator $(M_1 + M_2) x''_2$ am Ende gerade so gross ist, wie anfangs vor der Verbindung mit dem Dampfcylinder, wo das Gewicht des Dampfes im Condensator $M_2 x_2$ betrug, dass also die ganze Masse M_1, die vorher den Dampfcylinder als Flüssigkeits- und Dampfmischung vom Drucke p_1 füllte, jetzt im Condensator sich vollständig als Wasser von der Temperatur t_2 vorfindet. Die sogenannte Luft- und Warmwasser-

pumpe der Dampfmaschinen hat also bei einem Oberflächencondensator nur die Aufgabe, pro Kolbenschub im Dampfcylinder die M_1 Kilogr. Wasser aus dem Condensator zu entfernen und die Speisepumpe hätte dann diese Wassermenge wieder in den Kessel zurückzuführen. Fänden sonach bei einer Dampfmaschine mit Oberflächencondensator keine Dampf- und Wasserverluste statt, so wäre eine solche Maschine eine vollkommen geschlossene calorische Maschine. Bei Anwendung der Gl. (309) in der Praxis kann man bei Wasser die Flüssigkeitswärme recht wohl $q = ct$ setzen und dabei $c = 1$ annehmen. Würden wir dann noch die Voraussetzung machen, dass der Dampf im Cylinder kein Wasser führt, also $x_1 = 1$ gesetzt werden dürfe und beachten wir noch, dass sich die Gesammtwärme λ_1 nach den Angaben auf S. 253 durch die Formel

$$\lambda_1 = q_1 + \varrho_1 + A p_1 u_1$$

ersetzen lässt, so findet sich die Kühlwassermenge

$$M_0 = \frac{\lambda_1 - t_2 - A u_1 (p_1 - p_2)}{t'_0 - t_0} M_1 \tag{311}$$

Würden wir hier auch noch den Werth $A u_1 (p_1 - p_2)$ als klein genug vernachlässigen, so erhielten wir

$$M_0 = \frac{\lambda_1 - t_2}{t'_0 - t_0} M_1 \tag{312}$$

und das ist die Gleichung, wie sie bis jetzt bei Berechnung der Dampfmaschinen in Anwendung gekommen ist, indem man auch noch nach Watt die Annahme festgehalten hat, es sei die Gesammtwärme λ_1 constant und zwar $\lambda_1 = 640$ zu setzen.

Die Art und Weise, wie man bis jetzt diese letzte Formel abgeleitet hat, ist nach der mechanichen Wärmetheorie ganz unstatthaft; immerhin zeigt aber meine Entwicklung, dass sie als eine Näherungsformel aufgefasst werden kann. Es kommt hier auf eine genaue Bestimmung nicht viel an, man will eigentlich bei der Berechnung einer Dampfmaschine nur den Minimalwerth der Kühlwassermenge wissen; in Wirklichkeit wird man Condensations-Dampfmaschinen doch nur erstellen, wenn mehr Kühlwasser vorhanden ist, als die Rechnung giebt.

Angenommen im Condensator einer Dampfmaschine soll ein mittlerer Druck p_2 von 0,1 Atmosphäre herrschen; das Kühlwasser

komme mit der Temperatur $t_0 = 15^0$ herbei und verlasse die Oberfläche des Condensators mit der Temperatur $t'_0 = 35^0$.

Im Augenblicke der Herstellung der Verbindung von Condensator und Dampfcylinder enthalte der Letztere Dampf und Flüssigkeit unter dem Drucke von 1,5 Atmosphären. Ich wähle diesen Enddruck im Cylinder absichtlich hoch, um den Unterschied der Resultate der vorstehenden Formeln mehr hervortreten zu lassen.

Hier ist nun nach Tab. 10

$$q_1 = 112{,}41 \qquad \varrho_1 = 487{,}01 \qquad u_1 = 1{,}1258 \qquad q_2 = 46{,}28$$

zu setzen und nach Tab. 1b

$$q_0 = 15{,}005 \qquad q'_0 = 35{,}037$$

Gl. (309) ergiebt daher:

$$M_0 = (3{,}301 + 24{,}439\, x_1)\, M_1$$

Ist die spezifische Dampfmenge im Cylinder $x_1 = 0{,}80$, so folgt:

$$M_0 = 22{,}852\, M_1$$

Ist hingegen $x_1 = 1$, ist also im Cylinder nur Dampf vorhanden, so folgt:

$$M_0 = 27{,}740\, M_1$$

Für den letztern Fall giebt die Näherungsformel (311), weil die Temperatur im Condensator $t_2 = 46{,}21^0$ beträgt

$$M_0 = 27{,}79 \cdot M_1$$

und die gebräuchliche Formel (312) giebt, wenn man nach Watt $\lambda_1 = 640$ setzt:

$$M_0 = 29{,}69\, M_1$$

Man sieht, dass dieser Werth von dem richtigen schon ziemlich stark abweicht; es hat das seinen Grund darin, dass das Glied $Au_1(p_1 - p_2)$ in Gl. (311) keineswegs so klein ist, dass es ohne Weiteres vernachlässigt werden dürfte; wohl aber kann immer das Glied $Au_1 p_2$ weggelassen werden, dann giebt die genauere Formel (311), wenn man bei der Annahme $x_1 = 1$ bleiben will:

$$M_0 = \frac{t_1 + \varrho_1 - t_2}{t'_0 - t_0} M_1 \tag{313}$$

Für vorstehendes Beispiel giebt diese Formel $M_0 = 27{,}66\, M_1$, also weit bessere Uebereinstimmung.

Die letzte Näherungsformel ist ebenso einfach, wie diejenige, die man bisher angewandt hat, ist aber offenbar besser begründet.

Problem 4. Es ist die Theorie der Einspritz-Condensatoren der Dampfmaschinen zu entwickeln.

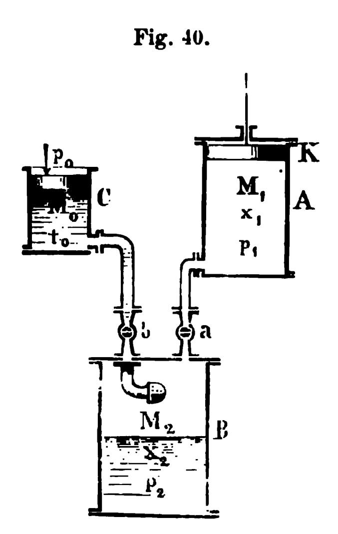


Fig. 40.

Es stelle, wie vorhin A (Fig. 40) den Dampfcylinder vor und B den Condensator; beide Räume seien zunächst durch den Hahn a von einander getrennt; die Cylinder enthalten M_1 Kilogr. und der Condensator M_2 Kilogr. Dampf und Wasser.

Mit dem Condensator B steht nun durch ein Rohr, das mit dem Hahne b versehen ist, der cylindrische Raum C in Verbindung, der M_0 Kilogr. kaltes Wasser von der Temperatur t_0 enthalte; auf dem Wasserspiegel ruhe ein Kolben, der unter dem Atmosphärendruck p_0 steht.

Jetzt wo alle drei Räume noch getrennt sind, beträgt, die Bezeichnungen und Angaben des vorigen Problems beibehalten, die innere Arbeit der Massen im Cylinder, im Condensator und im Cylinder C in Wärmeeinheiten gemessen beziehungsweise:

$$(A U_0 + q_1 + x_1 \varrho_1) M_1$$
$$(A U_0 + q_2 + x_2 \varrho_2) M_2$$
$$(A U_0 + q_0) M_0$$

und daraus folgt durch Addition die gesammte innere Arbeit U in den drei getrennten Massen, in Wärmeeinheiten gemessen, wenn wir der Einfachheit wegen die Summe der Gewichte $M_1 + M_2 + M_0$ mit M bezeichnen:

$$A U = M A U_0 + M_0 q_0 + M_1 (q_1 + x_1 \varrho_1) + M_2 (q_2 + x_2 \varrho_2) \quad (314)$$

Wir wollen nun die beiden Hähne a und b geöffnet denken: dann werden sich zunächst die Mengen M_1 und M_2 mischen und

der Druck wird in beiden Räumen auf einen mittleren Werth p sich einstellen. Der Dampfkolben K beginnt sehr langsam vorwärts zu gehen, unterdessen tritt aber aus dem Gefässe C kaltes Wasser ein, und zwar wollen wir uns die Regulirung so bewerkstelligt denken, dass im ganzen Raum der Druck rasch auf den Condensatordruck p_2 gebracht und constant erhalten wird, während beide Kolben in den Cylindern A und C abwärts gehen. Sind beide Kolben unten angelangt, so sind die Mengen M_1 und M_0 in den Condensator gedrückt, das ganze Gewicht der jetzt daselbst befindlichen Dampf- und Flüssigkeitsmasse ist $M = M_1 + M_2 + M_0$. Da wir uns nun im Fernern das Gewicht M_0 der Einspritzwassermenge so gewählt denken, dass schliesslich nach der Vereinigung im Condensator daselbst wieder der Druck p_2 herrscht, so ist jetzt offenbar, wenn für diesen Endzustand die spezifische Dampfmenge x'_2 ist, die innere Arbeit in der ganzen Masse in Wärmeeinheiten gemessen:

$$AU' = M\,(AU_0 + q_2 + x'_2\,\varrho_2)$$

Der Werth U' ist nicht identisch mit dem Werth U der Gl. (314), d. h. der innern Arbeit vor der Vereinigung, denn die ganze Masse hat während des Ueberganges äussere Arbeit aufgenommen, die in Wärmeeinheiten ausgedrückt von dem Werthe AU' abgezogen werden muss, um wieder auf den Werth AU zu gelangen. Diese Arbeit lässt sich aber leicht ermitteln. Zunächst hat der Dampfkolben K unter constantem Drucke p_2 den Cylinderraum $M_1\,(x_1 u_1 + \sigma)$ zurückgelegt; diesem entspricht eine Arbeit, in Wärmeeinheiten gemessen, die bestimmt ist durch die Formel

$$AM_1 p_2\,(x_1 u_1 + \sigma)$$

Ferner hat der Kolben im Gefässe C unter dem äussern Atmosphärendrucke p_0 den Raum $M_0\,\sigma$ zurückgelegt und dies entspricht der in Wärmeeinheiten gemessenen Arbeit:

$$AM_0 p_0\,\sigma$$

Diese beiden Arbeitswerthe zusammengefasst und von obigem Werth AU' subtrahirt, muss, wie erwähnt, wieder auf den anfänglichen Werth der innern Arbeit U führen, wir erhalten also auch:

$$AU = M\left[AU_0 + q_2 + x'_2\,\varrho_2\right] - AM_1\,p_2(x_1 u_1 + \sigma) - AM_0 p_0\,\sigma$$

Setzen wir diesen Werth gleich dem durch Gl. (314), so findet sich nach entsprechender Reduction, wenn wir beachten, dass $M = M_1 + M_2 + M_0$ ist, die erforderliche Einspritzwassermenge:

$$M_0 = \frac{[q_1 - q_2 + r_1\varrho_1 + Ap_2(x_1u_1 + \sigma)]M_1 + [M_2x_2 - Mx'_2]\varrho_2}{q_2 - q_0 - Ap_0\sigma}$$

Diese Formel vereinfacht sich aber ausserordentlich. Das Volumen V_2 des Condensators bestimmt sich aus der Füllung vor dem Einspritzen

$$V_2 = M_2(x_2u_2 + \sigma)$$

hingegen aus der Füllung am Ende des Vorganges:

$$V_2 = M(x'_2u_2 + \sigma)$$

Wir können nun den Werth σ, das spezifische Volumen des Wassers in allen vorstehenden Formeln, als von sehr untergeordnetem Einfluss vernachlässigen und erhalten zunächst durch Gleichsetzen der letzten beiden Formeln

$$Mx'_2 = M_2x_2$$

Der Werth links ist aber das Gewicht der Dampfmenge im Condensator am Ende der Operation, während der Werth M_2x_2 auf der rechten Seite das Gewicht der Dampfmenge im Condensator im Anfange darstellt. Wir finden sonach das Resultat, dass das Dampfgewicht im Condensator im Anfange und am Ende dasselbe ist, dass also die ganze in den Condensator gedrückte Masse $M_0 + M_1$ im flüssigen Zustand vorhanden ist und in solchem Zustande von der Luft- und Warmwasserpumpe bei Dampfmaschinen aus dem Condensator zu entfernen ist. In Wirklichkeit wird allerdings diese Pumpe auch Luft dem Condensator zu entziehen haben, da das Einspritzwasser jederzeit eine gewisse Luftmenge enthält, die es im Condensatorraum, wo es eine höhere Temperatur erhält und unter sehr geringem Druck steht, zum grössten Theil entlässt. Auf unsern ganzen Vorgang ist die im Condensator vorhandene Luft nur insofern von Einfluss, als dieselbe den angenommenen Druck p_2 um ein Geringes erhöht. Bei der Berechnung einer Dampfmaschine hat man auf das Vorhandensein dieser Luftmenge nur bei der Bestimmung der Dimensionen der Luft- und Warmwasserpumpe Rücksicht zu nehmen.

Diese Pumpe hat nach Vorstehendem nur die Aufgabe, diese Luft, sowie das Einspritzwasser und den in Wasser verwandelten Dampf dem Condensator bei normalem Gange der Condensation zu entziehen, nicht aber, wie man bis jetzt bei Berechnung der Condensationsapparate vorausgesetzt hat, auch Dampf aus dem Condensatorraume zu entfernen.

Benutzen wir nun die zuletzt gegebene Beziehung $Mx'_2 = M_2 x_2$ in der Gleichung, die vorhin für das Gewicht M_0 der Einspritzwassermenge hingestellt wurde, und vernachlässigt man die Glieder, welche den Werth σ enthalten, so folgt endlich die einfache Gleichung

$$M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1 (\varrho_1 + Ap_2 u_1)}{q_2 - q_0} M_1 \qquad (315)$$

und diese Gleichung ist genau dieselbe, die wir auch für die Kühlwassermenge beim Oberflächencondensator Gl. (309) gefunden haben, nur mit dem Unterschiede, dass dort im Nenner q'_2 statt q_2 vorkommt, weil das Wasser bei der Oberflächenabkühlung im Allgemeinen nicht gerade mit der Condensator-Temperatur t_2 abfliessen wird, sondern meist mit einer niedrigern Temperatur t'_2, wie oben angenommen wurde.

So einfach vorstehende Formel ist, so lässt sie sich doch für praktische Zwecke noch weiter vereinfachen. Setzen wir die spezifische Wärme des Wassers $c = 1$, so ist allgemein die Flüssigkeitswärme $q = t$; vernachlässigen wir überdies noch das Glied $Ap_2 u_1$, welches immer von untergeordnetem Einfluss ist, so schreibt sich auch:

$$M_0 = \frac{t_1 - t_2 + x_1 \varrho_1}{t_2 - t_0} M_1 \qquad (316)$$

Gewöhnlich wird man auch noch die spezifische Dampfmenge im Dampfcylinder $x_1 = 1$ setzen, dort also bei Beginn der Condensation reinen Dampf voraussetzen. Die beiden Glieder $q_1 + \varrho_1$ repräsentiren übrigens nach den Angaben auf S. 271 die Dampfwärme J_1.

Was den Vergleich dieser Formeln mit denjenigen betrifft, die man bis jetzt in den Werken über Maschinenlehre für M_0 hinstellt, so gilt auch hier das, was schon bei Betrachtung der Wirkung der Oberflächencondensatoren hierüber gesagt wurde.

Setzt man $x_1 = 1$ voraus und ersetzt man ϱ durch die em-

pirische Formel, die für Wasserdampf auf S. 282 hingestellt wurde, so findet sich annähernd:

$$M_0 = \frac{575,40 + 0,209\, t_1 - t_2}{t_2 - t_0} M_1$$

Bei Dampfmaschinen mit Condensation liegt der Werth t_1 etwa zwischen den Grenzen 80^0 und 110^0; nehmen wir daher noch den mittlern Werth $t_1 = 95$, so findet sich als letzte Näherung:

$$M_0 = \frac{595 - t_2}{t_2 - t_0} M_1 \tag{317}$$

In der bisher gebräuchlichen Formel hat man die hier gegebene Constante 595 durch den Werth 640 ersetzt.

Setzen wir, wie in dem Beispiele des vorigen Problems, den anfänglichen Dampfdruck im Cylinder $p_1 = 1,5$ Atmosphären, den Condensatordruck $p_2 = 0,1$ Atmosphären und die anfängliche Temperatur des Einspritzwassers $t_0 = 15^0$, so ergiebt die genauere Formel (315)

$$M_0 = (2,114 + 15,657\, x_1)\, M_1$$

Für $x_1 = 0,80$ würde folgen $M_0 = 14,64\, M_1$
und für $x_1 = 1$ $M_0 = 17,77\, M_1$

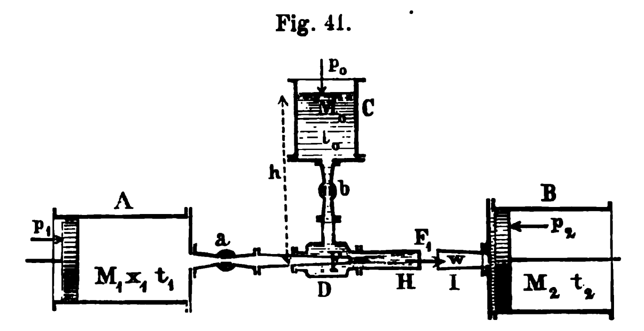
Für den gleichen Fall geben die beiden Näherungsformeln (316) und (317) resp. $M_0 = 17,70\, M_1$ und $17,58\, M_1$, während die alte Formel (312) auf den abweichenden Werth $M_0 = 19,02\, M_1$ führt; man sollte daher diese Formel verlassen.

Problem 5. Es sind die Vorgänge an der Giffard-schen Dampfstrahlpumpe (Injector) der Untersuchung zu unterwerfen.

Wir denken uns zunächst den Giffard'schen Injector durch nebenstehenden Apparat (Fig. 41) ersetzt. A sei ein mit einem Kolben versehener Cylinder, in welchem sich Dampf und Wasser vom Drucke p_1 und der Temperatur t_1 befindet; die Dampfmenge in der Gewichtseinheit Mischung sei x_1. Der Cylinder A ist mit einem conischen Abflussrohr versehen, dessen Ausflussöffnung F im Innern des Gehäuses D liegt, das mit einem weitern Rohre H versehen ist, welches bei F_1 in's Freie mündet.

Das Gehäuse D steht durch ein Rohr mit einem Gefässe C in Verbindung, in welchem kaltes Wasser von der Temperatur t_0

Fig. 41.



unter dem atmosphärischen Drucke p_0 enthalten ist. Beide Räume A und C denke man sich zunächst durch die Hähne a und b abgesperrt. Würden jetzt beide Hähne geöffnet, so würde aus der Mündung F Dampf ausströmen, der aber sofort durch das aus dem Gefässe C herbeikommende kalte Wasser condensirt wird, so dass dann durch das Rohr H aus der Mündung F_1 die nur aus Wasser bestehende Mischung ausströmt. Wir denken uns in der Folge, das Ausströmen des Dampfes aus dem Cylinder A geschehe unter constantem Drucke p_1, indem wir uns vorstellen, es werde der Kolben dieses Cylinders mit constantem Drucke p_1 mit entsprechender Geschwindigkeit vorwärts geschoben. Ebenso denken wir uns, dass das Gefäss C durch zuströmendes Wasser in der Art gefüllt erhalten bleibe, dass der Wasserspiegel während des ganzen Vorganges um h über der Axe des Austrittsrohres H liegt.

Es soll nun ferner der Wasserstrahl, der aus der Mischung des kalten Wassers und des condensirten Dampfes besteht und der bei F_1 das Rohr H verlässt, durch ein zweites Rohr I aufgefangen werden, welches das Wasser in einen zweiten cylindrischen Raum B führt, wo es sich durch Zurückschieben eines Kolbens unter Ueberwindung eines constanten Druckes p_2 Raum machen muss.

Es soll zunächst die Wirkung des hier angenommenen Apparates untersucht, und dann erst gezeigt werden, wie von ihm aus auf die Vorgänge an Giffard's Injector geschlossen werden kann.

Wir wollen uns den ganzen Vorgang an unserm Apparate in zwei Theile zerlegt denken, indem wir uns zuerst die Vorlage B mit dem Rohre I beseitigt denken und den Wasserstrahl aus der

Mündung F_1 direct in's Freie strömen lassen. Das Wasser verlasse diese Mündung mit der Temperatur t'_2 und mit der Geschwindigkeit w.

Angenommen, das Gewicht von Flüssigkeit und Dampf, das den Cylinder A in einer gewissen Zeit z. B. in der Sekunde verlässt, sei M_1 und in der gleichen Zeit ströme aus dem Gefässe C eine Wassermenge M_0 Kilogramm zu, so wird in gleicher Zeit durch die Mündung F_1 die Wassermenge $(M_1 + M_0)$ Kilogramm zum Abfluss gelangen.

Bezeichnet wie früher U_0 die innere Arbeit in der Gewichtseinheit Wasser von 0^0 Temperatur, so ist die innere Arbeit in den M_1 Kilogramm Dampf und Wasser vor dem Ausströmen nach Gl. (220) S. 296

$$M_1 \left[U_0 + \frac{1}{A} (q_1 + x_1 \varrho_1) \right]$$

und in dem Wassergewicht M_0

$$M_0 \left[U_0 + \frac{1}{A} q_1 \right]$$

also die innere Arbeit in beiden Gewichtsmengen vor der Mischung

$$U = (M_1 + M_0) U_0 + \frac{M_1}{A} (q_1 + x_1 \varrho_1) + \frac{M_0}{A} q_0 \qquad (318)$$

Beim Verlassen der Mündung F_1 hat die ganze Wassermenge $(M_1 + M_0)$ Kilogr. die Temperatur t'_2, daher beträgt ihre innere Arbeit:

$$(M_1 + M_0) \left[U_0 + \frac{q'_2}{A} \right]$$

da sie aber gleichzeitig die Geschwindigkeit w hat, so wohnt ihr in Form von lebendiger Kraft noch die Arbeit

$$(M_1 + M_0) \frac{w^2}{2g}$$

inne, die wir als Mehrbetrag der innern Arbeit auffassen können.

Fassen wir nun die beiden letzten Glieder zusammen und subtrahiren wir davon den Werth U nach Gl. (318), so erhalten wir den Ueberschuss der innern A

Mischung beim Verlassen des Ausflussrohres über diejenige vor der Vereinigung der Massen, welchen Ueberschuss wir mit $\ddot{U}$ bezeichnen wollen:

$$A\,\ddot{U} = (M_1 + M_0)\left(A\frac{w^2}{2g} + q'_2\right) - M_1\,(q_1 + x_1\,\varrho_1) - M_0\,q_0 \qquad (319)$$

Da nun auf dem Wege der Zustandsänderungen der Gesammtmasse Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wurde, so kann der gefundene Arbeitsüberschuss nur herrühren von einer Aufnahme von äusserer Arbeit. Diese Arbeit lässt sich aber ebenfalls leicht ermitteln.

Zunächst hat die Masse im Cylinder A, weil dort der Kolben unter constantem Druck p_1 durch den Raum $M_1\,(x_1\,u_1 + \sigma)$ vorwärts geschoben wurde, die Arbeit

$$L_1 = M_1\,p_1\,(x_1\,u_1 + \sigma)$$

aufgenommen.

Ferner steht die Masse M_0 im Gefässe C unter atmosphärischem Drucke und sinkt überdies um die Höhe h herab; das entspricht einer Arbeit

$$L_2 = M_0\,(h + p_0\,\sigma)$$

Endlich hat die ganze Masse $M_1 + M_0$, deren Volumen beim Austritt aus dem Rohre H: $(M_1 + M_0)\,\sigma$ ist, den äussern Atmosphärendruck zu überwinden, das entspricht einer zu verrichtenden hier also negativ in Rechnung zu bringenden Arbeit:

$$L_3 = -\,(M_1 + M_0)\,p_0\,\sigma$$

Fassen wir die drei Arbeitsmengen zusammen, so ergiebt sich die ganze äussere Arbeit, welche von der Masse aufgenommen wurde:

$$M_1\,p_1\,x_1\,u_1 + M_1\,\sigma\,(p_1 - p_0) + M_0\,h$$

und dieser Werth muss dem Arbeitsüberschuss $\ddot{U}$ gleich sein, der durch Gl. (319) bestimmt ist. Setzen wir also dort für $\ddot{U}$ vorstehenden Werth ein, so findet sich nach einfacher Reduction, wenn wir dabei die bekannte Beziehung $r_1 = \varrho_1 + A\,p_1\,u_1$ beachten:

$$(M_1 + M_0)\left(A\frac{w^2}{2g} + q'_2\right) = \qquad (320)$$

$$+ A\sigma\,(p_1 - p_0)] + M_0\,[A\,h + q_0]$$

Bei Giffard's Injector liegt gewöhnlich das Niveau des Wasserspiegels im Gefässe C unter dem Apparate; für diesen Fall hätte man, wenn mit dem Injector der hier angegebene Versuch ausgeführt werden, d. h. der Wasserstrahl bei F_1 Fig. 41 direct ins Freie strömen sollte, in vorstehender Formel den Werth h einfach negativ zu setzen, es würde dann h die Höhe darstellen, auf welche der Apparat das Wasser heraufsaugt.

Die vorstehende Hauptformel giebt zu einer interessanten Betrachtung Anlass und zeigt, dass man Giffard's Injector benutzen könnte, auf neue Art die Gesammtwärme λ_1 des Dampfes, welche dem Drucke p_1 und der Temperatur t_1 entspricht, zu bestimmen.

Denken wir uns, das aus der Mündung F_1 kommende Wasser werde in einem Gefässe aufgefangen, in welchem es zur Ruhe kommt, so verwandelt sich die Arbeit $\frac{w^2}{2g}$ der Gewichtseinheit noch in Wärme. Ist schliesslich die Temperatur in diesem Gefässe t_3 und die zugehörige Flüssigkeitswärme q_3, so gilt offenbar die Beziehung

$$q'_2 + A \frac{w_2}{2g} = q_3$$

Setzen wir diesen Werth in Gl. (320) und nehmen wir an, aus dem Gefässe A komme reiner gesättigter Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit, es sei also $x_1 = 1$, so lässt sich $q_1 + r_1$ durch die Gesammtwärme λ_1 ersetzen, und wir erhalten:

$$(M_1 + M_0)\, q_3 = M_1 \left(\lambda_1 + A\sigma\,(p_1 - p_0)\right) + M_0\,(A h + q_0) \qquad (321)$$

in welcher Formel auch noch h negativ zu setzen ist, wenn ein Ansaugen durch die Höhe h erfolgt. In vorstehender Gleichung kommen nun mit Ausnahme des Werthes λ_1 nur Grössen vor, die sich leicht durch Beobachtung ermitteln lassen.

Denken wir uns nämlich den Cylinder A durch einen Dampfkessel ersetzt, in welchem eine sehr ruhige und gleichmässige Verdampfung unter dem bekannten Drucke p_1 erfolgt, so lässt sich erwarten, dass reiner Dampf zum Ausfluss gelangt. Lässt man nun den Apparat eine Zeit lang in Thätigkeit und misst man das Gewicht M_0 und Temperatur t_0 des Wassers, welches der Apparat an sich zieht und ebenso das Gewicht $M_1 + M_0$ und

die Temperatur t_3 des Wassers, welches aus der Mündung F_1 strömt und in einem Gefässe aufgefangen wird, so kann man, weil $M_1 = (M_1 + M_0) - M_0$ ist, mit Hülfe vorstehender Formel die Gesammtwärme λ_1 leicht berechnen, da die den Temperaturen t_0 und t_3 entsprechenden Flüssigkeitswärmen q_0 und q_3 nach Regnault's Formel (190) S. 262 sich bestimmen lassen.

Wir wollen nun behufs weiterer Verfolgung des Problems, den Apparat dadurch wieder vervollständigen, das wir den Cylinder B mit dem Rohre I (Fig. 41) uns angebracht denken. Der aus der Mündung F_1 kommende Wasserstrahl tritt dann mit der Geschwindigkeit w in das Rohr I; er hat beim Eintritt die Temperatur t'_2 und geht im Innern des Cylinders zur Ruhe über; die Temperatur daselbst sei t_2, dann folgt sogleich die Veränderung, die Abnahme der innern Arbeit der Gewichtseinheit Wasser:

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{1}{A}(q'_2 - q_2).$$

Da auch während dieses Ueberganges Wärme weder mitgetheilt noch abgeleitet wird, so wird diese Arbeit in äussere Arbeit verwandelt. Beim Eindringen in den Cylinder B macht sich die Gewichtseinheit Wasser unter Ueberwindung des constanten Druckes p_2 Raum und verrichtet die Arbeit $p_2\sigma$; da es aber ausserhalb des Rohres I unter dem athmosphärischen Druck p_0 steht, so nimmt es hier die Arbeit $p_0\sigma$ auf; die ganze abgegebene äussere Arbeit ist daher für die Gewichtseinheit Wasser $(p_2 - p_0)\sigma$ und dieser Werth ist dem vorstehenden Ausdrucke gleich: wir erhalten daher durch Gleichsetzen und geringe Reduction:

$$A\frac{w^2}{2g} + q'_2 = q_2 + A\sigma(p_2 - p_0) \tag{322}$$

als zweite Hauptgleichung für vorliegendes Problem.

Benutzt man diese Gleichung in Gl. (320), so findet sich als Hauptgleichung für Giffard's Injector, wenn ich dort noch h negativ setze, weil an diesem Apparate gewöhnlich ein Ansaugen des kalten Speisewassers erfolgt:

$$\begin{gathered}(M_1 + M_0)\left[q_2 + A\sigma(p_2 - p_0)\right] = \\ M_1\left[q_1 + x_1 r_1 + A\sigma(p_1 - p_0)\right] + M_0(q_0 - Ah)\end{gathered} \tag{323}$$

Speist der Injector den gleichen Dampfkessel, aus dem er den Dampf bezieht, so ist auch noch $p_2 = p_1$ und man erhält aus vorstehender Formel das Verhältniss der Speisewassermenge M_0 zu dem Gewichte von Wasser und Dampf, welches zur Einführung des Speisewassers in den Kessel in der gleichen Zeit erfordert wird

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{q_1 - q_2 + x_1 r_1}{q_2 - q_0 + A\left(h + \sigma (p_1 - p_0)\right)} \tag{324}$$

Diese neue Gleichung, nach welcher wir jetzt die Wirkungsweise eines Injector beurtheilen können, führt zu sehr merkwürdigen und praktisch wichtigen Resultaten. Sie erlaubt uns zwar nicht, Formeln und Regeln zu entwickeln, nach denen die Dimensionen der einzelnen Theile eines Injectors berechnet werden könnten, wenn derselbe eine gegebene Leistung entwickeln soll, die Formel erlaubt uns aber dafür andere Fragen zu lösen, deren Beantwortung bis jetzt nicht möglich war.

Zunächst ist zu bemerken, dass das Glied $A\left(h + \sigma (p_1 - p_0)\right)$ in der letzten Formel als sehr klein vernachlässigt werden kann, daraus folgt, dass die Saughöhe h von verschwindendem Einfluss auf das Verhältniss $M_0 : M_1$ ist. Damit ist aber nicht gesagt, dass diese Saughöhe nicht von grossem Einfluss auf die Thätigkeit des Apparates, besonders bei der Ingangsetzung, wäre. Die zulässige Saughöhe wird besonders von dem Drucke abhängig sein, der im Gehäuse D herrscht; über diesen Druck, überhaupt über die Vorgänge in diesem Gehäuse, giebt uns unsere Formel gar keinen Aufschluss; unsere Formel sagt nur aus, dass, wenn der Apparat im normalen Gange ist, die Saughöhe h von ganz untergeordnetem Einfluss auf das Verhältniss $M_0 : M_1$ ist. Lassen wir in Gl. 324 das angezeigte Glied weg, so findet sich:

$$M_0 (q_2 - q_0) = M_1 (q_1 - q_2 + x_1 r_1)$$

Das Glied links ist die Wärmemenge, welche dem Speisewasser mitzutheilen ist, um es von seiner anfänglichen Temperatur t_0 auf die Temperatur t_2 zu bringen, mit der es in den Kessel tritt und diese Wärmemenge ist, wie die vorstehende Formel zeigt, gleich derjenigen, welche eine Dampf- und Flüssigkeitsmasse M_1, wovon $M_1 x_1$ dampfförmig ist, abgiebt, wenn sie unter constantem Druck p_1 durch Abkühlung in Wasser

von der Temperatur t_2 verwandelt wird. Addirt man auf beiden Seiten vorstehender Gleichung $M_1\,(q_2 - q_0)$, so ergiebt sich auch folgende Formel:

$$(M_1 + M_0)\,(q_2 - q_0) = M_1\,(q_1 - q_0 + x_1 r_1)$$

Nun ist aber der Werth $q_2 - q_0$ nahezu der Temperaturerhöhung $t_2 - t_0$ proportional, und da beide Temperaturwerthe nicht hoch sind, so lässt sich die spezifische Wärme des Wassers 1 setzen, also annehmen $q_2 - q_0 = t_2 - t_0$, man erhält dann:

$$(M_1 + M_0)\,(t_2 - t_0) = M_1\,(q_1 - q_0 + x_1 r_1)$$

und hieraus lässt sich die Temperaturerhöhung des Speisewassers ermitteln und dann auch die Temperatur t_2, mit der das Speisewasser mit dem condensirten Dampf vom Injector in den Kessel geliefert wird. Bei den Versuchen, die bis jetzt mit dem Injector angestellt wurden, hat man auch sein Augenmerk auf diese Temperaturerhöhung $t_2 - t_0$ des Speisewassers gerichtet, und daher bin ich in den Stand gesetzt, mit Hülfe solcher Versuchsresultate die vorstehenden Formeln zu prüfen. So giebt z. B. Villiers*) folgende Resultate eines seiner Versuche. Die Höhe, auf welche der Injector das Wasser ansaugen musste, betrug 4 Meter und der Dampfdruck im Kessel $4^1/_4$ Atmosphären; für diesen Druck ist die entsprechende Temperatur $t_1 = 146{,}19^0$ und dann die Flüssigkeitswärme $q_1 = 147.55$ und die Verdampfungswärme $r_1 = 503{,}54$.

Die anfängliche Temperatur des Speisewassers war $t_0 = 23.5^0$ und die Temperatur des Strahles der Mischung $t_2 = 60{,}5^0$, daher die Temperaturerhöhung $t_2 - t_0 = 37^0$. Rechnet man nach der genauen Formel (324), so wäre dort entsprechend den Temperaturen t_2 und t_0 zu setzen $q_2 = 60{,}64$, $q_0 = 23{,}51$ und das kleine Glied, das wir bei den letzten Betrachtungen vernachlässigt haben, hier aber in Rechnung bringen wollen, findet sich $A\,[h + \sigma\,(p_1 - p_0)] = 0{,}089$, wo p_0 dem Atmosphärendrucke entspricht.

*) Bulletin de la Société de l'industrie Minérale. t. V. 1859. — S. auch Civilingenieur. B. 6, S. 315. 1860. Am letztern Orte, S. 311, habe ich auch schon in ähnlicher Weise, wie oben im Text, die Vorgänge an Giffard's Injector der Untersuchung unterworfen; allerdings nicht mit der Ausführlichkeit, wie es hier geschehen ist und unter einigen beschränkenden Annahmen, die ich hier fallen lassen konnte.

Die Formel (324) ergiebt dann:

$$\frac{M_0}{M_1} = 2{,}335 + 13{,}529 \, . \, x_1$$

Um nun die Wassermenge zu bestimmen, welche der Dampf aus dem Kessel mit sich brachte, liess man den Strahl in ein Gefäss mit einer genau gewogenen Wassermenge von bekannter Temperatur eintreten und schloss auf die dem Dampfe beigemischte Wassermenge aus der Temperaturerhöhung und der Vermehrung des Wassergewichtes im Gefässe. Man fand so aus dem Ergebnisse dieser Beobachtung, dass dem Dampfe 3,5 Procent Wasser beigemengt war: das würde geben $x_1 = 0{,}965$.

Der vorstehende Ausdruck ergiebt daher

$$\frac{M_0}{M_1} = 15{,}390$$

Die direkte Beobachtung ergab die angesaugte Speisewassermenge $M_0 = 850$ Kilogr. und die Dampf- und Wassermenge $M_1 = 57$ Kilogr., was auf das Verhältniss $M_0 : M_1 = 14{,}912$ führt also wenig von der Rechnung abweichend. Eine gewisse Unsicherheit liegt jedenfalls in der Art der Ermittlung des Werthes x_1. Nehmen wir die beobachteten Werthe von M_0 und M_1 als sicher an, so führt die vorstehende Formel für vorliegenden Fall auf den Werth $x_1 = 0{,}930$, was 7 % Wasser giebt, das dem Dampfe mechanisch beigemengt war. Jedenfalls liegt die Differenz ganz innerhalb des Beobachtungsfehlers und zugleich geht aus Allem hervor, dass das Mischungsverhältniss x_1 des aus dem Kessel kommenden Dampfes einen starken Einfluss auf Rechnung und Beobachtung hat. Die Formel zeigt auch, dass unter sonst gleichen Verhältnissen die angesaugte Wassermenge um so kleiner wird, je mehr der Dampf Wasser mit sich führt.

Die Gl. (324) kann als eine der Grundformeln für Beurtheilung des Injectors angesehen werden: freilich genügt sie allein noch nicht, wie schon erwähnt wurde; eine vollständige Theorie des Injectors, welche zugleich auch den Einfluss der einzelnen Dimensionen des Apparates auf die Leistung desselben darstellt. verlangt noch andere Gleichungen, deren Entwickelung aber eine genauere Erkenntniss der Vorgänge in dem Gehäuse D (Fig. 41) voraussetzt. Vor allen Dingen müsste eine Gleichung abgeleitet

7

werden, welche auf die Grösse des Druckes schliessen lässt, der in dem Gehäuse D herrscht, in ähnlicher Weise, wie ich das a. a. O. bei der Thomson'schen Wasserstrahlpumpe und ähnlichen Apparaten *) gethan habe.

Erst wenn dieser Druck bekannt ist, lässt sich auf die Dampf- und Wassermenge M_1 schliessen, welche durch die Mündung F ausströmt, nach den Formeln, die ich unten noch geben werde; dann lässt sich ferner schliessen auf die Speisewassermenge M_0, die bei gegebenen Dimensionen des Speiserohres herbeikommt und auf die Höhe, auf die ein Ansaugen überhaupt noch möglich ist.

Trotz dieser Lücken, die noch auszufüllen bleiben (denn die bis jetzt veröffentlichten Darstellungen der Vorgänge am Injector führen nur auf mehr oder weniger brauchbare Näherungsformeln), habe ich die vorstehenden Untersuchungen hier niedergelegt, weil sie noch eine sehr wichtige praktische Frage beantworten lassen, über die schon viel verhandelt worden ist; ich meine die Frage, wie sich der Injector hinsichtlich seines Effectes gegenüber andern Speisevorrichtungen, z. B. den Speisepumpen, verhält.

Ich kann schon hier, da es fast als selbstverständlich erscheint, hervorheben, dass die disponible Arbeit einer Dampfmaschine der Wärmemenge proportional ist, die in der Zeiteinheit in den Kessel tritt. Bei Beurtheilung der Thätigkeit der Speiseapparate überhaupt wird daher die Wärmemenge, die dieselben absorbiren, schon ein Anhalten geben. Für den Giffard'schen Injector lässt sich nun leicht diese Wärmemenge bestimmen.

Nehmen wir an, M_1 sei die Dampf- und Flüssigkeitsmenge, welche der Injector pro Sekunde braucht, und M_0 die Speisewassermenge, die er in gleicher Zeit dem Kessel liefert, so wird bei regelmässigem Betrieb einer Dampfmaschine mit ihrem Kessel M_0 auch das Gewicht der Dampf- und Wassermenge sein, welche vom Kessel nach der Maschine geführt wird.

Da die spezifische Dampfmenge für die dem Injector gelieferte Mischung M_1 mit x_1 bezeichnet wurde, so ist die Dampfmenge $M_1 x_1$ und diese erfordert zu ihrer Erzeugung unter constantem Druck p_1 im Kessel die Wärmemenge $M_1 x_1 r_1$; in der gleichen Zeit, also der Sekunde, liefert aber der Injector eine

*) Das Locomotivenblasrohr. Zürich 1863.

Wassermenge $M_0 + M_1$ von der Temperatur t_2 in den Kessel, wo diese Wassermasse, um den Kreislauf zu vollenden, wieder auf die Kesseltemperatur t_1 zu erwärmen ist; das erfordert eine Wärmemenge $(M_1 + M_0)(q_1 - q_2)$ und daher folgt die gesammte Wärmemenge, welche wegen der Speisung allein bei Anwendung eines Injectors pro Sekunde in den Kessel geführt werden muss, oder richtiger derjenige Theil der ganzen in den Kessel tretenden Wärme, welcher auf Speisung verwendet wird:

$$Q_1 = M_1 x_1 r_1 + (M_1 + M_0)(q_1 - q_2) \qquad (325)$$

Diese Formel lässt sich aber leicht in andere Form bringen. Nach der Grundgleichung (321), die wir für den Injector fanden, ergiebt sich:

$$M_1 (q_1 - q_2 + x_1 r_1) = M_0 \left[q_2 - q_0 + A \left(h + \sigma (p_1 - p_0)\right)\right]$$

Addire ich auf beiden Seiten $M_0 q_1$ und nehme ich das Glied $M_0 q_2$ nach links, so folgt

$$M_1 x_1 r_1 + (M_1 + M_0)(q_1 - q_2) = M_0 \left[q_1 - q_0 + A \left(h + \sigma (p_1 - p_0)\right)\right]$$

Der Werth links ist aber, wie wir soeben gefunden haben, Q_1, wir erhalten daher auch für die Wärmemenge, welche die Speisung durch den Injector pro Sekunde erfordert:

$$Q_1 = M_0 \left[q_1 - q_0 + A \left(h + \sigma (p_1 - p_0)\right)\right] \qquad (326)$$

und diese Formel führt auf das höchst merkwürdige Resultat, dass die Wärmemenge, welche auf Speisung verwendet wird, gar nicht von der Art der Thätigkeit des Injectors abhängt, sondern nur von der Speisewassermenge M_0, d. h. vom Dampfverbrauch der Dampfmaschine, vom Druck und der Temperatur im Kessel, von der anfänglichen Temperatur t_0 des Speisewassers und der Höhe h, auf welche dasselbe gehoben wird. Der Werth Q_1 ist aber nicht abhängig von der Dampfmenge, welche der Injector braucht; eben so wenig von der Temperatur t_2, mit welcher der Injector das Wasser in den Kessel liefert, und auch nicht von den einzelnen Dimensionen des Injectors. Von einem Injector ist hiernach nichts weiter zu verlangen, als dass er ohne Dampfverlust die verlangte Speisewassermenge M_0 in den

Kessel führt. Geschieht das von ihm, so ist er ein vollkommener Apparat, welche Dampfmenge er auch braucht und mit welcher Temperatur er auch dem Kessel das Wasser zuführt.

Man kann nun aber in Gl. (326) ohne Bedenken das Glied $A\left(h + \sigma\,(p_1 - p_0)\right)$ als sehr klein gegen $q_1 - q_0$ vernachlässigen und erhält dann einfacher für die Wärmemenge, die der Injector in der Sekunde fordert:

$$Q_1 = M_0\,(q_1 - q_0) \tag{327}$$

Ehe wir in unsern Schlüssen weiter gehen, wollen wir nun auch die Wirkung einer gewöhnlichen Speisepumpe der Untersuchung unterwerfen, um Vergleiche anstellen zu können. Von den Widerständen, der Kolbenreibung u. s. w. sehen wir dabei vorläufig ab. Man denke sich die Pumpe einfach wirkend (was übrigens gleichgültig ist) und die Cylinderaxe horizontal liegend, die Axe zusammenfallend mit der des Injectorrohres *HI* Fig. 41. Die Pumpe soll das Wasser aber auch erst um die Höhe h heraufheben aus dem gleichen Reservoir, wie vorhin der Injector. Es mag die Pumpe in jeder Sekunde ein Spiel machen, so wird sie beim Hingang, beim Saugen, die Wassermenge M_0 auf die Höhe h heben; da aber hierbei der Atmosphärendruck p_0 oder die zugehörige Wassersäule σp_0 fördernd thätig ist, so ist die aufzuwendende Arbeit $M_0\,(h - p_0\,\sigma)$; beim Rückgang des Kolbens wird diese Wassermenge in den Kessel gedrückt, wobei der constante Kesseldruck p_1 zu überwinden, also die Arbeit $M_0\,\sigma\,p_1$ zu verrichten ist. Die ganze Arbeit, welche sonach die Speisepumpe pro Sekunde absorbirt, beträgt daher:

$$M_0\left(h + \sigma\,(p_1 - p_0)\right)$$

Im Kessel muss nun das Wasser von t_0 auf t_1 erwärmt werden, das entspricht einer Wärmemenge

$$Q_1 = M_0\,(q_1 - q_0)$$

und hierzu müsste, wenn die ganze Wärmemenge ermittelt werden sollte, welche die Speisung mit der Speisepumpe erfordert, noch diejenige Wärmemenge kommen, welche der soeben berechneten Arbeit entspricht; diese Wärmemenge ist aber jedenfalls so klein, dass sie gegen $M_0\,(q_1 - q_0)$ vernachlässigt werden kann. Daher folgt das Resultat, dass beide Speisevorrichtungen, der **Giffard'sche Injector** und die **Speisepumpe unter sonst glei-**

chen Verhältnissen dieselbe Wärmemenge erfordern und dass sonach theoretisch genommen keine der Speisevorrichtungen einen Vorzug vor der andern hat.

Vom praktischen Standpunkt aus muss sich aber doch das Urtheil entschieden zu Gunsten des Giffard'schen Injector stellen, da die schädlichen Widerstände, welche bei Bewegung der Speisepumpe zu überwinden sind, offenbar weit beträchtlicher sein werden, als diejenigen Verluste, die am Injector auftreten, bei dem allein die Wärmeverluste durch Abkühlung nach Aussen eine zu beachtende Rolle spielen werden.

Wir können nun auch noch den Wirkungsgrad des Injectors ermitteln; wir haben hier nur die Wärmemenge, welche er beansprucht, mit der ganzen Wärmemenge zu vergleichen, die in gleicher Zeit in den Kessel tritt. Dabei ist es, da es hier nur auf das Verhältniss zweier Wärmemengen ankommt, ganz gleichgültig, welchen Theil der gesammten Wärme wir bei den Dampfmaschinen als disponible Arbeit aufzufassen haben, eine Frage, die wir erst weiter unten beantworten werden.

Da M_0 das Gewicht der Speisewassermenge ist, die pro Sekunde in den Kessel geht, so ist das auch das Gewicht der Wasser- und Dampfmenge, die in gleicher Zeit der Dampfmaschine zugeführt wird und daher ist auch $M_0 x_1$ das Dampfgewicht, denn offenbar wird das Mischungsverhältniss x_1 für den Dampf, der nach der Maschine geht, das gleiche sein, wie das des Dampfes, den der Injector bezieht.

Die Wärmemenge Q_2, welche die Erzeugung dieses Dampfes fordert, ist:

$$Q_2 = M_0 x_1 r_1$$

Der Speiseapparat erfordert die Wärmemenge Q_1 und daher ist die ganze Wärmemenge, die dem Dampfkessel in der Sekunde zugeleitet wird, $Q_1 + Q_2$ und sonach der Wirkungsgrad η des Speiseapparates:

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$$

oder die bekannten Werthe eingesetzt:

$$\eta = \frac{q_1 - q_0}{q_1 - q_0 + x_1 r_1}$$

und wenn man Zähler und Nenner mit $q_1 - q_0$ dividirt:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{x_1 r_1}{q_1 - q_0}}. \tag{328}$$

Nehmen wir beispielsweise an, der Kessel producire reinen Dampf, es sei $x_1 = 1$, so findet sich nach dieser Formel, wenn die Temperatur des Speisewassers $t_0 = 15^0$ gesetzt wird, beziehungsweise für einen Kesseldruck von $1\frac{1}{2}$, 4, 6, 8 Atmosphären

$$\eta = \frac{1}{6{,}422} \quad \frac{1}{4{,}876} \quad \frac{1}{4{,}385} \quad \frac{1}{4{,}076}.$$

Es folgt daher, dass der Wärmebedarf des Injectors, verglichen mit der Wärme, die in den Kessel tritt, um so grösser ist, je höherer Druck im Kessel herrscht, was man übrigens auch direct aus Formel (328) erkennt, da der Werth r_1 mit wachsender Temperatur abnimmt, hingegen q_1 wächst. Die Formel zeigt aber auch, dass das Verhältniss η um so grösser ist, je kleiner q_0, d. h. je niedriger die Temperatur t_0 des Speisewassers ist. Die gleichen Formeln und Sätze gelten übrigens auch bei Beurtheilung der Wirkung der Speisepumpen, wenn man von den Reibungswiderständen absieht.

Es kann auf den ersten Augenblick die Anwesenheit des Werthes x_1 in Gl. (328) auffallend erscheinen; aus der Art des Vorkommens dieses Werthes ist zu schliessen, dass das Verhältniss η um so grösser ist, je mehr x_1 von 1 abweicht, d. h. je mehr der Kesseldampf Wasser mit sich führt. Das Bedenken hebt sich sofort, wenn man beachtet, dass der Werth η, den ich den Wirkungsgrad genannt habe, nicht im gebräuchlichen Sinne zu verstehen ist. Der Werth soll nichts weiter als denjenigen Theil der ganzen in den Kessel tretenden Wärme ausdrücken, der der Speisung zugewendet wird; η soll aber keineswegs als ein Maass für die Güte und Vollkommenheit des Speiseapparates gelten; das zeigen schon die letzten Zahlenwerthe, denn offenbar wird man die Wirkung des Apparates für um so günstiger ansehen müssen, je kleiner die ihm zugewandte Wärmemenge Q_1 also je kleiner der Werth η ist. Man würde sich aber auch täuschen, wenn man diese Wärmemenge Q_1 als verloren ansehen wollte. Die letzten Formeln und Angaben gründen sich überhaupt ausdrücklich auf die Annahme, dass der zu speisende Dampfkessel

einer in normalem Gange befindlichen Dampfmaschine den Dampf liefert und daher muss man die Formeln (327) und (328) mit gleichzeitiger Rücksicht auf die Vorgänge an der Dampfmaschine selbst der Discussion unterwerfen.

Eine gründliche Untersuchung der hier vorgelegten Frage kann daher erst vorgenommen werden, wenn zugleich, wie das weiter unten geschehen soll, die vollständige Theorie der Dampfmaschine gegeben wird. Ich werde dort zeigen, dass die Formeln (327) und (328) sich auf einen gewissen Theil der Vorgänge an der Dampfmaschine beziehen und zwar auf eine gewisse Unvollkommenheit im Prozess unserer Dampfmaschinen, aber nicht auf eine Unvollkommenheit der Speiseapparate hindeuten, wie es nach Obigem scheinen könnte.

Der Giffard'sche Injector ist vielmehr ein sehr vollkommener Apparat, was sich schon daraus ergiebt, dass er sich nach unsern Untersuchungen nahezu wie eine ohne Reibungswiderstände arbeitende Speisepumpe verhält. Er ist aber nur als Speiseapparat für Dampfkessel als vorzüglich zu bezeichnen, wo die durch plötzliche Geschwindigkeitsänderungen verlorne lebendige Kraft als Wärme erscheint und als solche wieder benutzt wird.

In jedem andern Falle, wo durch den Giffard'schen Injector nur rein mechanische Wirkungen erzielt werden sollen, wie z. B. Hebung von Wasser aus einem Niveau in's andere, und wenn dabei der Umstand nicht in's Spiel kommt, dass er das Wasser erwärmt, ist der Injector ein sehr unvollkommener Apparat, mechanisch ebenso unvollkommen, wie eine Thomson'sche Wasserstrahlpumpe.

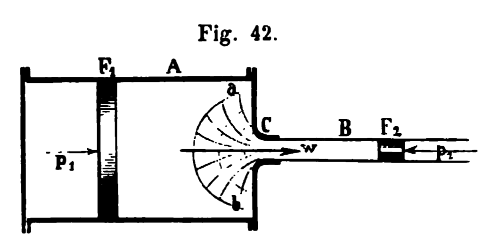
Ueber das Ausströmen der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen aus Gefässmündungen.

Die allgemeinen Sätze über den Ausfluss flüssiger Körper aus Mündungen, die ich auf S. 158 bis 163 gegeben habe, gelten auch hier, so dass wir für die vorliegende Aufgabe, speziell das Ausströmen der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen zu unter-

suchen, ohne Weiteres von der Gl. (104) S. 163 ausgehen könnten. Ich ziehe jedoch vor, im Folgenden die gleiche Frage von einem etwas andern Gesichtspunkte aus zu beleuchten, um zu zeigen, dass man auf verschiedenem Wege zu den gleichen Formeln gelangt *).

Wir denken uns aber auch hier, der Ausfluss finde unter constantem Drucke statt und erfolge nach einem Raume hin, in welchem der Druck kleiner ist und wo gleichfalls der Druck auf constanter Höhe erhalten wird. Ferner setzen wir ausdrücklich voraus, dass der Beharrungszustand der Bewegung vorhanden sei und machen überhaupt dieselben Voraussetzungen, die man auch sonst bei hydrodynamischen Untersuchungen derselben Art macht.

Fig. 42.



Es sei nun A (Fig. 42) ein cylindrisches Ausflussgefäss, in welchem sich Dampf und Flüssigkeit von der Temperatur t_1 und dem Drucke p_1 befinden; die spezifische Dampfmenge sei x_1 und der Kolben werde während der allmäligen Entleerung des Cylinders mit constantem Drucke p_1 nachgeschoben. C sei die Ausflussmündung, an welche wir uns aber zunächst ein anderes cylindrisches Gefäss B, ein Rohr, angesetzt denken, welches denselben Querschnitt wie die Mündung hat und in welchem sich vor der einströmenden Flüssigkeit ein Kolben unter Ueberwindung eines constanten äussern Druckes p_2 fortbewegt. Man denke sich das Rohr B sehr lang und stelle sich vor, dass die in das Rohr übergegangene Flüssigkeit dem Kolben mit constanter Geschwindigkeit w folge und dass der freiwerdende Raum sich continuirlich mit neuer vom Ausflussgefässe herkommender Flüssigkeit fülle.

---

*) Die neuen Formeln für den Ausfluss der Gase und Dämpfe habe ich zuerst in meiner Schrift »Das Locomotivenblasrohr« entwickelt und später im »Civilingenieur«, B. 10. S. 87, 1864, die Entwickelungen, welche sich auf den Ausfluss der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen beziehen, vervollständigt, indem ich zugleich das Ausströmen hocherhitzter Flüssigkeiten, die der Mündung zum Theil im dampfförmigen Zustand entweichen, in den Bereich der Untersuchungen zog.

Wir haben es dann hier mit einer besondern neuen Art von Uebergang der Flüssigkeit aus einem Zustand in den andern und zwar mit einem solchen auf nicht umkehrbarem Wege zu thun. Es geht hierbei die flüssige Masse aus einem Gleichgewichtszustand in einen andern über, doch unterscheiden sich die beiden Zustände. Im Ausflussgefässe, das wir uns sehr weit, d. h. im Verhältniss zur Mündung von sehr grossem Querschnitt denken, ist die Geschwindigkeit der offnen Bewegung der Theilchen verschwindend klein und das Gewicht der mit zunehmender Geschwindigkeit durch den trichterförmigen Raum an der Mündung strömenden Flüssigkeitsmasse denken wir uns ebenfalls sehr klein im Verhältniss zu dem Gewichte der ganzen im Gefässe A befindlichen Flüssigkeitsmenge. Die der Temperatur t_1, dem Drucke p_1 und dem spezifischen Volumen v_1 entsprechende innere Arbeit der Flüssigkeitsmasse im Ausflussgefässe sei U_1.

Verfolgen wir nun die Gewichtseinheit Flüssigkeit auf ihrem Wege nach dem Ansatzrohre B, so ersehen wir, dass sich dieselbe nach ihrem Uebertritte mit constanter Geschwindigkeit w, also gleichförmig hinter dem Kolben herbewegt. Die Flüssigkeitsmasse befindet sich also hier in einem neuen Gleichgewichtszustande, alle Theilchen derselben bewegen sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit w im Rohre B fort und zwar erhält sich dabei der Druck p_2, die zugehörige Temperatur t_2 und das spezifische Volumen v_2 constant, so lange keine Geschwindigkeitsänderungen auftreten. Ich gehe nun von der Ansicht aus, dass die innere Arbeit U_2 dieser in Bewegung begriffenen Flüssigkeitsmasse, zunächst abgesehen von der der offenen Bewegung entsprechenden Arbeit, in derselben Beziehung zum Druck und Volumen steht, wie wenn die Masse in Ruhe wäre. Wäre also allgemein für die betreffende Flüssigkeit $U = F(p, v)$ bekannt, so würde für den Anfang des Ueberganges, wenn die Flüssigkeit sich noch im Ausflussgefässe befindet, $U_1 = F(p_1, v_1)$ sein. Für das Ende des Ueberganges, wenn nun die Gewichtseinheit Flüssigkeit sich gleichförmig im Rohre B fortbewegt, ist $U_2 = F(p_2, v_2)$.

Nehmen wir hierzu als innere Arbeit noch die Arbeit $\frac{w^2}{2g}$, die der offnen Bewegung entspricht, so ist die ganze Veränderung der innern Arbeit bei dem angenommenen Uebergange:

$$\frac{w^2}{2g} + U_2 - U_1$$

Für diesen Werth findet sich aber noch ein anderer Ausdruck. Während des Ausströmens hat die Gewichtseinheit Flüssigkeit wegen des Constanthaltens des Druckes im Ausflussgefässe die Arbeit $p_1 v_1$ aufgenommen und beim Eintritt in das Rohr B unter Ueberwindung des constanten Druckes p_2 die Arbeit $p_2 v_2$ verrichtet (vergl. S. 160); daher ist auf die Flüssigkeit die Arbeit $p_1 v_1 - p_2 v_2$ übertragen worden; nehmen wir nun überdies noch an, dass von aussen her jeder Gewichtseinheit Flüssigkeit bei ihrem Uebergange auf irgend eine Weise die Wärmemenge Q mitgetheilt wird, so beträgt die ganze Zunahme der innern Arbeit auch

$$\frac{Q}{A} + p_1 v_1 - p_2 v_2$$

und durch Gleichsetzen mit dem vorigen Ausdrucke ergiebt sich dann als erste Hauptformel für vorliegendes Problem:

$$A \frac{w^2}{2g} = Q - A\,(U_2 - U_1) + A\,(p_1 v_1 - p_2 v_2) \qquad (329)$$

welche Gleichung mit Gl. (104) S. 163 identisch ist.

Neben dieser Formel gilt aber auch die im Obigen vielfach benutzte Gleichung

$$Q = A\,(U_2 - U_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p\,dv \qquad (330)$$

da hier die Flüssigkeit mit vollem Drucke expandirend unter Wärmeaufnahme aus dem Anfangsvolumen v_1 in das Endvolumen v_2 übergeht.

Durch theilweises Integriren findet sich aus letzterer Gleichung auch

$$Q = A\,(U_2 - U_1) + A\,(p_2 v_2 - p_1 v_1) - A \int v\,dp$$

und diese Formel, mit (329) verbunden, führt auf die bekannte hydrodynamische Gleichung

$$\frac{w^2}{2g} = -\int v\,dp$$

die man bis jetzt jederzeit direct abgeleitet hat.

Meine Erweiterungen in der Behandlung des Ausflussproblemes bestehen also einfach darin, dass ich mit Benutzung der Sätze der mechanischen Wärmetheorie die bekannte letzte Gleichung in zwei Gleichungen (329) und (330) auflöse, und dadurch erst gewinnt man eigentlich bestimmten Einblick in die Bedeutung dieser Gleichung, die man bisher behufs Untersuchung der Gase und Dämpfe unter ziemlich willkürlichen Annahmen hinsichtlich der Beziehung zwischen v und p integrirt hat.

Die vorstehenden Gleichungen (329) und (330) gelten noch für Flüssigkeiten irgend welcher Art; behalten wir sie noch auf kurze Zeit in der allgemeinen Form bei, so käme es nun darauf an, den Ausfluss auf den gewöhnlichen Fall zurückzuführen: wir haben bisher angenommen, das Rohr B (Fig. 42) sei sehr lang und in demselben bewege sich unter constantem Drucke p_2 ein Kolben vor der Flüssigkeit her. Wir wollen uns aber jetzt das Rohr in einer gewissen Entfernung von der Einmündung abgeschnitten und in ein zweites grosses Gefäss einmündend denken, welches mit Flüssigkeit gefüllt ist und in welchem der Druck auf constanter Höhe p_2 erhalten wird.

Durch irgend einen Querschnitt des Rohres ströme pro Sekunde eine Flüssigkeitsmenge vom Gewicht G Kilogr.; da das spezifische Volumen der Flüssigkeit im Rohre mit v_2 bezeichnet wurde, so ist das Flüssigkeitsvolumen, das pro Sekunde durch einen gewissen Querschnitt des prismatischen Rohres hindurch geht, Gv_2 und dieser Werth ist identisch mit Fw, wir erhalten sonach durch Gleichsetzen

$$G = \frac{Fw}{v_2} \tag{331}$$

als das Gewicht der Flüssigkeitsmenge, welches pro Sekunde durch irgend einen Querschnitt des Rohres geht. Dieses Flüssigkeitsgewicht ist nun identisch mit dem, welches das Rohr verlässt, und repräsentirt die Ausflussmenge. Dabei wird aber die hypothetische Annahme gemacht, dass sich der Druck p_2 in der Vorlage, d. h. in dem Raume, nach welchem hin der Aus-

fluss erfolgt, bis in die Ebene der Mündung erstreckt, eine Annahme, die man bisher immer gemacht hat und die ich für ganz zulässig halte. Man hat Gründe anzunehmen, dass streng genommen der äussere Druck um die Mündung etwas kleiner sein müsse, als sonst in der Vorlage. Die Differenz kann aber nur ganz unbedeutend sein. Lässt man z. B. einen Dampfstrahl in die freie Luft strömen und bringt man, wie ich es gethan habe, in die Nähe der Mündung einen pendelartig aufgehangenen Körper, so wird allerdings das Pendel nach dem Strahle hin abgelenkt, aber nicht stark, so dass man auf ein verhältnissmässig schwaches Luftzuströmen, also auf geringe Druckdifferenz schliessen muss.

Ganz anders steht es aber mit dem Werthe des spezifischen Volumens v_2; dieser Werth gilt ausdrücklich nur für das Innere des angenommenen prismatischen Rohres und für die Mündung. Ist die ausströmende Flüssigkeit Luft oder Dampf, so breitet sich der Strahl nach dem Verlassen der Mündung trichterförmig aus und zwar meiner Hypothese nach (S. 164) unter constantem Drucke p_2. Die lebendige Kraft der Bewegung geht in Molekularbewegung, Wärme, über und nach dem Eintritt des Ruhezustandes ist das spezifische Volumen ein anderes und die Temperatur eine andere, als in der Mündung. Auf diesen letztern Uebergang kommt aber nicht viel an, die Hauptfrage bleibt immer die nach der Ausflussgeschwindigkeit w und nach dem Gewicht der Flüssigkeitsmenge, welche in der Zeiteinheit die Mündung passirt, sowie überhaupt nach dem Zustande der Flüssigkeit in der Mündung. Diese Fragen werden aber durch die oben gegebenen Gleichungen beantwortet; da diese Gleichungen unter der ausdrücklichen Voraussetzung gelten, dass der Beharrungszustand vorhanden ist, so kann man sich das Rohr auch mehr und mehr verkürzt denken und die Formeln auch für eine einfache Mündung benutzen. Nur eine Unbestimmtheit bleibt noch übrig, die aber nur durch spezielle Ausflussversuche wird gehoben werden können; ich meine den Einfluss, welchen die schädlichen Widerstände, Reibung u. s. w. auf die Ausflusserscheinungen haben. Nur so viel ist als sicher anzunehmen, dass die beiden Gleichungen (329) und (330) unverändert bestehen bleiben. Durch die Widerstände wird die Ausflussgeschwindigkeit w herabgezogen; in dem gleichen Maasse, in

welchem dadurch die lebendige Kraft der offenen Bewegung $\frac{w^2}{2g}$ abnimmt, erhöht sich die innere Arbeit U_2 und damit ist wieder eine Aenderung des spezifischen Volumens v_2 verbunden. Die genannten Gleichungen werden ihrer Form nach dadurch nicht berührt, sie werden aber zur Bestimmung der Geschwindigkeit w um so unbrauchbarer, je grössern Einfluss die Widerstände üben. Bis auf Weiteres müssen wir daher die Annahme festhalten, dass der Einfluss der Widerstände vernachlässigt werden kann, was zulässig ist, wenn wir annehmen, dass der Ausfluss durch gut abgerundete Mündungen erfolgt.

Wir wollen nun die Gleichungen speziell für den Fall umformen, dass Dampf- und Flüssigkeitsmischungen unter constantem Druck durch eine Mündung ausströmen.

Im Ausflussgefässe sei die Temperatur t_1, der Druck p_1 und die spezifische Dampfmenge x_1; in der Ebene der Mündung sei die Temperatur t_2 (entsprechend dem äussern Drucke p_2) und die spezifische Dampfmenge x_2.

Wir setzen daher in Gl. (329) nach der bekannten Bezeichnung

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma \text{ und } v_2 = x_2 u_2 + \sigma$$

und nach Gl. (220) S. 296

$$A\,(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_1 \varrho_1$$

und erhalten dann, wenn wir entsprechend umformen und die Beziehung $r = \varrho + Apu$ beachten

$$A\,\frac{w^2}{2g} = Q + x_1 r_1 - x_2 r_2 + q_1 - q_2 + A\sigma\,(p_1 - p_2) \tag{332}$$

Die zweite Gl. (330) ist, wenn wir sie als Differentialgleichung schreiben, identisch mit den Gln. (222), (223), (227) und (225) S. 297 u. f.

Wir wollen sie hier in der Form (227) schreiben:

$$dQ = dq + Td\left(\frac{xr}{T}\right) \tag{333}$$

Das Gewicht von Dampf und Wasser, welches pro Sekunde die Mündung verlässt, ist nach Gl. (331)

$$G = \frac{Fw}{x_2 u_2 + \sigma} \tag{334}$$

Dabei ist, wenn wir das Gewicht des Dampfes mit D, das des Wassers mit W bezeichnen:

$$D = x_2\, G \text{ und } W = (1 - x_2)\, G \tag{335}$$

In der hier gegebenen Form kann man die Gleichungen für unendlich verschiedene Fälle benutzen, je nachdem man über die Art und Weise der Wärmemittheilung verschiedene Voraussetzung macht. In Gl. (332) bedeutet Q die ganze Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit Mischung während ihres Hinströmens nach der Mündung mitgetheilt wird, während durch Gl. (333) die Art und Weise der Wärmemittheilung näher bestimmt wird, wie sich nämlich Temperatur und spezifische Dampfmenge bei Annahme eines bestimmten Gesetzes der Wärmemittheilung verändert. Der gewöhnliche und praktisch wichtigste Fall ist der, dass der Masse während ihres Zuströmens nach der Mündung Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird. In diesem Falle ist $Q = 0$ und $dQ = 0$ und Gl. (333) giebt dann, wenn wir wie früher die einfache Bezeichnung

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{c\, dt}{T}$$

benutzen, wie auf S. 322:

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = \tau_1 - \tau_2 \tag{336}$$

Aus dieser Formel berechnet sich dann die spezifische Dampfmenge x_2 in der Mündung und durch Substitution in Gl. (332) ergiebt sich:

$$A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T_2) + q_1 - q_2 - T_2(\tau_1 - \tau_2) + A\sigma(p_1 - p_2) \tag{337}$$

und hieraus lässt sich die Ausflussgeschwindigkeit w direct berechnen. Dann findet sich auch nach (334) und (335) das Gewicht der Flüssigkeits- und Dampfmenge, die pro Sekunde die Mündung verlässt, denn die spezifische Dampfmenge x_1 im Ausflussgefässe ist als bekannt anzunehmen, ebenso der Druck p_1 daselbst und der Druck p_2 ausserhalb. Die letztern Werthe führen nach den frühern Angaben und nach den Tabellen auf die Temperaturen t_1 und t_2.

Die vorstehenden Formeln mögen durch Behandlung einiger technisch wichtigen Fälle nähere Erläuterung finden.

Problem 1. Es ist der Ausfluss von trocknen, gesättigten Dampf unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass dem Dampfe während des Ausströmens Wärme weder mitgetheilt, noch entzogen wird.

Befindet sich im Ausflussgefäss reiner gesättigter Dampf ohne Beimischung von Flüssigkeit, so ist einfach in den allgemeinen Gleichungen, die soeben abgeleitet wurden, $x_1 = 1$ zu setzen und damit ist eigentlich schon die ganze Frage erledigt. Es mag jedoch im Folgenden die Untersuchung noch etwas weiter ausgedehnt werden, indem speziell für reine gesättigte Wasserdämpfe der Ausfluss derselben in die freie Atmosphäre gründlich erörtert werden soll.

Hierbei wird uns die Hülfstabelle auf S. 316 gute Dienste leisten.

Nehme ich z. B. an, es fliesse aus dem Dampfraume eines Kessels, der gesättigten Dampf von 5 Atmosphären enthält, der Dampf durch eine conische oder gut abgerundete Mündung von F Quadratmetern direct ins Freie, wo der Druck von 1 Atmosphäre herrscht, so ist nach Tab. 10 $t_1 = 152{,}22^0$ und $t_2 = 100^0$ zu setzen und die Werthe der in vorstehenden Gleichungen vorkommenden Temperaturfunktionen sind nach der Hülfstabelle S. 316 anzunehmen entsprechend dem Drucke von

5 Atmosphären:	1 Atmosphäre:
$\frac{r_1}{T_1} = 1{,}17395$	$\frac{r_2}{T_2} = 1{,}43834$
$q_1 = 153{,}741$	$q_2 = 100{,}500$
$r_1 = 499{,}186$	$r_2 = 536{,}500$
$\tau_1 = 0{,}44693$	$\tau_2 = 0{,}31356$

Ueberdies ist $p_1 = 5 . 10334$; $p_2 = 10334$; $\sigma = 0{,}001$; $A = 1 : 424$ und $u_2 = 1{,}6494$ zu setzen.

Gl. (336) giebt dann die spezifische Dampfmenge in der Mündung

$$x_2 = 0{,}9091$$

Hiernach folgt zunächst, dass in der Ebene der Mündung der Gewichtseinheit Mischung 0,9091 Dampf und 0,0909 Wasser

innewohnt; es erscheint sonach in der Mündungsebene Wasser **und** Dampf, es muss sich also, da im Kessel nur reiner Dampf vorausgesetzt wurde, beim Hinströmen nach der Mündung die Dampfmenge 0,0909 Kil. condensirt haben.

Was ferner die Ausflussgeschwindigkeit betrifft, so bestimmt sich unter Benutzung vorstehender Zahlenwerthe aus Gl. (337)

$$A \frac{w^2}{2g} = 64{,}820$$

und hieraus, weil die Acceleration des freien Falles $g = 9{,}81$ Meter ist, die Ausflussgeschwindigkeit:

$$w = 734{,}32 \text{ Meter.}$$

Das Gewicht von Wasser und Dampf, das pro Sekunde die Mündung verlässt, ist nach Gl. (334)

$$G = 489{,}38\ F \text{ Kilogr.}$$

wobei der Mündungsquerschnitt F in Quadratmetern einzusetzen ist. Davon erscheint dem Gewichte nach als Dampf nach Gl. (335) $D = 444{,}90\ F$, als Wasser $W = 44{,}48\ F$ Kilogr.

Denken wir an eine kreisförmige Mündung von d Centimeter Durchmesser, so findet sich für vorliegenden Fall, wenn pro Sekunde G Kilogr. Dampf und Wasser ausströmen sollen, der erforderliche Mündungsdurchmesser

$$d = 5{,}102 \sqrt{G}$$

Soll demnach pro Sekunde 1 Kil. Dampf den Kessel verlassen, so müsste die Mündung 5,102 Centimeter Durchmesser haben.

Da die Frage des Ausströmens von Wasserdampf in die freie Atmosphäre von technischer Bedeutung ist, so habe ich folgende Tabelle berechnet. Nach dem im Vorstehenden berechneten Beispiele bedarf die Tabelle keine weitere Erläuterung.

Das Beispiel sowohl, als die Tabelle zeigen die Erscheinung, dass sich ein Theil des Dampfes während des Hinströmens nach der Mündung condensirt und zwar ist beim Ausströmen in die freie Atmosphäre die dem ausströmenden Dampfe beigemischte Wassermenge um so grösser, je höher der Druck im Kessel ist.

Ich habe aber in meinem Werke: »das Locomotivenblasrohr« S. 89, gezeigt, dass in verhältnissmässig geringer Entfer-

Ausfluss trockner gesättigter Wasserd[illegible]

Druck im Kessel in Atmosphären	$A\,\dfrac{w^2}{2g}$	Ausfluss-geschwindigkeit in Metern w	Spezifische Dampfmenge x_2	Spezif[illegible] Vol[illegible] v_2
			in der Ebene der Mü[illegible]	
2	27.894	481.71	0.9597	1.[illegible]
3	44.228	606.57	0.9369	1.5[illegible]
4	55.827	681.48	0.9210	1.5[illegible]
5	64.820	734.32	0.9091	1.[illegible]
6	72.179	774.89	0.8993	1.4[illegible]
7	78.397	807.57	0.8913	1.4[illegible]
8	83.792	834.90	0.8844	1.4[illegible]
9	88.561	858.33	0.8784	1.4[illegible]
10	92.824	878.74	0.8730	1.4[illegible]
11	96.677	896.80	0.8683	1.4[illegible]
12	100.203	913.00	0.8640	1.4[illegible]
13	103.452	927.69	0.8601	1.4[illegible]
14	106.456	941.06	0.8565	1.41[illegible]

nung ausserhalb der Mündung das beigemengte Wasser wieder verschwunden, dass dasselbe wieder in Dampf übergegangen ist und dass sich dann weiterhin der Dampf im überhitzten Zustande befindet, indem ich die früher schon erwähnte Hypothese zu Grunde legte. dass sich der Strahl ausserhalb der Mündung unter constantem Druck p_2 ausbreitet und sich dabei die lebendige Kraft der Bewegung in Wärme umsetzt. Man kann sich leicht durch einen Versuch überzeugen, dass der aus der Mündung kommende Strahl von Wasserdampf Wasser mit sich führt.

Der aus einer Mündung strömende Dampfstrahl erweitert sich conisch nach aussen hin. unmittelbar an der Mündung aber hat der Strahl das Ansehen des untern Theiles einer Kerzenflamme. Man unterscheidet nämlich im Innern des Strahles deutlich einen kurzen Kegel von grauer Farbe, dessen Basis die Mündung ausfüllt und dessen Spitze nach **aussen** gerichtet ist: rings um diesen Kegel ist der Strahl von blauer Farbe und durchsichtig, ebenso von der Spitze des innern Kegels an ge-

freie Atmosphäre.

…ssmenge in Kilogrammen pro Sekunde. …dungsquerschnitt F in Quadratmetern.			Durchmesser der Mündung in Centimetern	Druck im Kessel in Atmosphären
…ung	Dampf	Wasser		
[illegible]	D	W	d	
…12 F	291.86 F	12.26 F	$6.472\sqrt{G}$	2
…37	367.52	24.75	5.699	3
…32	412.90	35.42	5.331	4
…38	444.90	44.48	5.102	5
…05	469.48	52.57	4.939	6
…95	489.28	59.67	4.816	7
…96	505.84	66.12	4.716	8
…03	520.04	71.99	4.637	9
…85	532.40	77.45	4.569	10
…86	543.44	82.42	4.509	11
…21	553.14	87.07	4.460	12
…48	562.06	91.42	4.416	13
…67	570.15	95.52	4.362	14

rechnet bis zu gewisser Entfernung, von wo an der Dampfstrahl wieder trübe und undurchsichtig wird und sich zu kräuseln beginnt.

Der innere, kurze graue Kegel an der Mündung ist ohne Zweifel der mit condensirtem Wasser gemischte Dampf, der blaue durchsichtige Theil des Strahles enthält den Dampf im überhitzten Zustande; weiterhin wird der Dampfstrahl durch die zuströmende atmosphärische Luft gekräuselt und abgekühlt und so findet von Neuem Condensation statt, wodurch der Strahl wieder undurchsichtig wird.

Man kann bekanntlich unbedenklich die Hand in den Dampfstrahl halten, ohne sich die Hand zu verbrühen, selbst wenn der Dampf unter noch so hohem Drucke ausströmt. Es rührt dies eben daher, dass der Dampf sich ausserhalb der Mündung im überhitzten Zustande befindet. Es ist aber, wie ich gefunden habe, nicht möglich, die Hand so weit der Mündung zu nähern, dass man in's Bereich des grauen, von der Mündung ausgehenden Kegels gelangt, ein Zeichen, dass hier der Dampf gesättigt ist

und Wasser mit sich führt. A. a. O. habe ich selbst die Länge dieses Kegels berechnet, also ermittelt, in welcher Entfernung von der Mündung eben der Dampf aus dem gesättigten in den überhitzten Zustand übergeht.

Die oben entwickelten Formeln gelten für alle Dämpfe, die sich bei der Expansion nach der adiabatischen Curve niederschlagen und von den bekannten Dämpfen macht in dieser Beziehung nur der Aetherdampf eine Ausnahme. Dieser Dampf entweicht, wenn das Ausflussgefäss keinen flüssigen Aether enthält, durch die Mündung im überhitzten Zustande und daher kann für diesen Fall meine Ausflussformel keine Verwendung finden. Der Aetherdampfstrahl wird dann schon von der Mündung an vollkommen durchsichtig sein und den innern grauen Kegel, den man beim Wasserdampf beobachtet, nicht zeigen.

Aber auch bei den übrigen Dämpfen kann der Fall auftreten, dass sie die Mündung im überhitzten Zustande passiren und zwar dann, wenn die Widerstände beträchtlich werden. Die durch die verminderte lebende Kraft der Bewegung erhöhte innere Arbeit wird sich dann durch eine grössere spezifische Dampfmenge in der Mündung äussern und unter Umständen kann dann dieselbe grösser als Eins ausfallen, ein Zeichen, dass dann der Dampf in der Mündung im überhitzten Zustande erscheint. Bei Wasserdampf wird aber dieser Fall wohl selten vorkommen.

Die oben gegebenen Formeln sind, wenn nicht die diesem Buche beigegebenen Tabellen zur Hand sind, für den praktischen Gebrauch unbequem, doch lassen sie sich leicht durch Näherungsformeln ersetzen. Beim Ausfluss von Dämpfen kann man unbedenklich bei Gl. (337) das Glied $A\sigma\,(p_1 - p_2)$ als sehr klein weglassen und bei Wasserdämpfen für die spezifische Wärme c des Wassers für die bei Dampfkesseln vorkommenden Temperaturen den constanten Mittelwerth $c = 1{,}0224$ in Rechnung bringen.

Dann ist in Gl. (336) und (337) wegen der Bedeutung von τ:

$$\tau_1 - \tau_2 = c \text{ logn. } \frac{T_1}{T_2}$$

$$q_1 - q_2 = c\,(T_1 - T_2)$$

und man erhält als Formel zur Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit w:

$$A \frac{w^2}{2g} = \left(\frac{x_1 r_1}{T_1} + c\right)(T_1 - T_2) - c T_2 \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2} \qquad (338)$$

wobei man die Verdampfungswärme nach der Clausius'schen Näherungsformel

$$r_1 = 607 - 0{,}708\, t_1$$

berechnen und in den meisten Fällen $x_1 = 1$ setzen kann.

Bei geringer Druck- und Temperaturdifferenz gilt, wie sich leicht zeigen lässt, nahezu die Beziehung

$$c\,(T_1 - T_2) = c\,T_2 \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2}$$

und daher folgt für diesen Fall sehr einfach:

$$A \frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T_2) \qquad (339)$$

Die spezifische Dampfmenge x_2 in der Mündung bestimmt sich dann nach Gl. (336) aus der Formel:

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = c \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2} \;{}^{*)} \qquad (340)$$

oder man könnte auch von der Näherungsformel

$$x_2 = \frac{x_1 \varrho_1}{\varrho_2}$$

Gebrauch machen, von der wir auf S. 361 gesprochen haben.

Das Gewicht von Dampf und Wasser, das pro Sekunde die Mündung verlässt, ist dann nach Gl. (334), wenn man σ vernachlässigt:

$$G = \frac{F w}{x_2 u_2}$$

Problem 2. Es ist der Ausfluss einer tropfbaren Flüssigkeit unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass dieselbe erhitzt ist und unter dem der Temperatur t_1 entsprechenden Dampfdruck steht und

*) Die hier gegebenen Näherungsformeln habe ich in meinem Werke »Locomotivenblasrohr« S. 79—96 benutzt und dort mit den bis dahin benutzten Ausflussformeln verglichen.

dass ferner der Masse während ihres Hinströmens nach der Mündung Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird.

Mit diesem Falle des Ausflusses hat man es zu thun, wenn man bei einem gewöhnlichen Dampfkessel, der Dampf enthält, den Wasserablasshahn oder den Probierhahn öffnet, der ins Kesselwasser mündet.

Zur Untersuchung dieser Art des Ausflusses haben wir in den Gln. (336) und (337) die spezifische Dampfmenge x_1 im Ausflussgefässe Null zu setzen und erhalten dann ohne Weiteres die Formeln:

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} = \tau_1 - \tau_2 \tag{341}$$

woraus sich die spezifische Dampfmenge in der Ebene der Mündung bestimmt und

$$A \frac{w^2}{2g} = q_1 - q_2 - T_2 (\tau_1 - \tau_2) + A\sigma (p_1 - p_2) \tag{342}$$

aus welcher Gleichung sich die Ausflussgeschwindigkeit w ermittelt.

Das Gewicht G der Dampf- und Wassermenge, welche pro Sekunde die Mündung verlässt, sowie das Gewicht D des Dampfes und des Wassers W, welches pro Sekunde die Mündung passirt, bestimmt sich nach den frühern Formeln:

$$G = \frac{Fw}{x_2 u_2 + \sigma}; \quad D = x_2 G; \quad W = (1 - x_2) G \tag{343}$$

Die Gl. (341) führt bei allen Flüssigkeiten auf einen Werth von x_2, der kleiner als Eins ist, ein Zeichen, dass hier jederzeit in der Mündung neben Flüssigkeit auch Dampf erscheint, welcher sich auf dem Wege nach der Mündung gebildet hat.

Als spezielles Beispiel mag das Ausströmen von heissem Wasser näher untersucht werden.

Man denke sich z. B. einen Dampfkessel, in welchem sich Wasser und Dampf unter dem Drucke von 5 Atmosphären befindet, die Temperatur im Kessel sei also $t_1 = 152.22^\circ$. In der Wand des Kessels, da wo dieselbe im Innern mit Wasser bedeckt ist, befinde sich eine nach innen gut abgerundete Ausflussöffnung

von F Quadratmetern, durch welche das Wasser in die freie Atmosphäre strömen kann. Ausserhalb der Mündung ist also der Druck 1 Atmosphäre und die diesem Drucke entsprechende Temperatur $t_2 = 100^0$.

Wir können hier die Zahlenwerthe des vorigen Beispieles wieder benutzen und erhalten aus Gl. (341) zunächst die spezifische Dampfmenge x_2 in der Mündung:

$$x_2 = 0{,}0929 \text{ Kilogr.}$$

Dann folgt weiter aus Gl. (342)

$$A \frac{w^2}{2g} = 3{,}516$$

und hieraus die Geschwindigkeit w, mit welcher die Mündung passirt wird:

$$w = 171{,}02 \text{ Meter.}$$

Das Gewicht der Mischung beträgt

$$G = 1008{,}9\ F \text{ Kilogr. pro Sekunde.}$$

Davon sind

$$D = x_2 G = 103{,}0\ F$$

dampfförmig und $W = (1 - x_2)\ G = 1005{,}8\ F$ Kilogr. im tropfbar flüssigen Zustand. In der hier angedeuteten Weise ist die folgende Tabelle berechnet.

Diese Tabelle ergiebt sehr merkwürdige Resultate. Zuerst ersieht man, dass dem aus dem Wasserraume eines Dampfkessels austretenden Wasser in der Mündungsebene auch jederzeit Dampf beigemischt ist, der sich während des Hinströmens nach der Mündung bildet, und dass diese Dampfmenge dem Gewichte nach um so grösser ist, je grösser der Druck im Kessel ist. Das Gewicht G der Mischung von Wasser und Dampf, die in der Sekunde durch eine gewisse Mündung austritt, ist aber nahezu constant für die Pressungen bis zu 14 Atmosphären, wenigstens nehmen die Werthe, wie die Tabelle zeigt, nur sehr langsam mit dem Drucke zu. Die Wassermenge, welche dabei im tropfbar flüssigen Zustand durch die Mündung geht, zeigt sich um so geringer, je höher der Druck im Kessel ist.

Das sind Resultate, welche ganz und gar abweichen von denen, die man erhält, wenn man für vorliegendes Problem die gewöhnlichen hydraulischen Formeln anwendet.

Ausfluss von erhitztem Wasser in die freie Atmos[phäre]			
Druck im Kessel in Atmosphären	$A\frac{w^2}{2g}$	Ausfluss-geschwindigkeit in Metern w	Spezifische Dampfmenge in der Mündung x_2
2	0.581	69.52	0.0379
3	1.531	112.85	0.0615
4	2.530	145.07	0.0789
5	3.516	171.02	0.0929
6	4.477	192.98	0.1045
7	5.403	212.00	0.1146
8	6.297	228.87	0.1235
9	7.165	244.14	0.1315
10	8.003	258.02	0.1387
11	8.814	270.78	0.1454
12	9.603	282.64	0.1515
13	10.370	293.71	0.1573
14	11.116	304.09	0.1626

Die Formel, die für den gewöhnlichen Ausfluss des Wassers gilt, ist unter Beibehaltung obiger Bezeichnung:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \sigma\,(p_1 - p_2)$$

wo γ die Dichtigkeit (Gewicht der Volumeneinheit) des Wassers bedeutet, welcher Werth zum spezifischen Volumen σ des Wassers in der Beziehung $\gamma\sigma = 1$ steht. Die vorstehende Formel giebt beispielsweise Folgendes:

Druck im Ausflussgefässe in der Ebene der Mündung in Atmosphären	Ausflussgeschwindigkeit in Metern w	Wassermenge pro Sek. in Kilogr. $Fw\gamma$
4	24.663	24663 . F
8	37.673	37673 . F
12	47.226	47226 . F

Vergleicht man diese Werthe mit den, gleichem Drucke entsprechenden Werthen der Tabelle, so zeigt sich, dass die Ausflussgeschwindigkeit w bei kaltem Wasser zwar kleiner, die ausströmende Wassermenge aber viel grösser ist, als bei heissem Wasser und zwar in den drei Fällen beziehungsweise

24,16; 38,35 und 49,30 Mal so gross.

dem der Temperatur entsprechenden Dampfdruck.

Ausflussmengen in Kilogrammen pro Sekunde. Mündungsquerschnitt F in Quadratmetern.			Druck im Kessel in Atmosphären
Mischung G	Dampf D	Wasser W	
1094.6 F	41.5 F	1053.1 F	2
1101.6	67.7	1033.9	3
1106.2	87.3	1018.9	4
1108.9	103.0	1005.8	5
1113.2	116.3	996.8	6
1115.7	127.8	987.8	7
1118.1	138.1	980.0	8
1120.4	147.3	973.1	9
1122.9	155.7	967.2	10
1124.4	163.5	960.9	11
1126.6	170.7	955.9	12
1127.7	177.4	950.3	13
1129.6	183.7	946.0	14

Die grossen Differenzen erklären sich sofort dadurch, dass eben beim Ausfluss des erhitzten Wassers unter den oben gemachten Voraussetzungen neben dem Wasser zugleich Dampf in der Mündung erscheint, der wegen seines grossen spezifischen Volumens den grössten Theil der Mündung ausfüllt.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchungen müssen sich leicht durch Experimente prüfen lassen. Man müsste aus einem Dampfkessel das Wasser ausströmen lassen, die Speisung unterbrechen, die Heizung aber der Art fortsetzen, dass der Druck im Kessel auf constanter Höhe erhalten bleibt. Aus der Senkung des Wasserspiegels im Kessel in bestimmter Zeit liesse sich dann auf das Ausflussquantum G schliessen. Meine eignen Versuche, die ich angestellt habe, führten zu keinem entscheidenden Resultat. Ich liess das Wasser aus einem Locomotivkessel unter 6 Atmosphären Dampfdruck ausströmen und beabsichtigte, wenigstens das ausströmende Wasser in einem Aichkasten aufzufangen und zu messen. Trotz verschiedener Aenderungen in der Versuchsart gelang aber die Messung nicht, der Dampf nahm den grössten Theil des Wassers mit sich fort. Man muss daher die Versuche in der vorhin angedeuteten Weise ausführen, indem man das Ausströmungsquantum im Ausflussgefäss, d. h. im Kessel

selbst misst. Bis jetzt bot sich mir leider noch keine Gelegenheit, Versuche in dieser Art auszuführen.

Die Erscheinungen, die ich bei den Experimenten beobachtete. sind aber im Allgemeinen in Uebereinstimmung mit dem, was aus vorstehenden Untersuchungen sich schliessen lässt und auch im Uebrigen widersprechen die Erfahrungen meinen Sätzen nicht. Uebrigens könnte schon ein ganz einfacher, an jedem Dampfkessel ausführbarer Versuch meine Angaben bestätigen. Man brauchte nur einen Dampfkessel durch den Wasserablasshahn einmal unter dem höchsten zulässigen Dampfdruck, das andre Mal unter sehr geringem Druck zum Theil zu entleeren. Sind meine Formeln richtig, so müsste die Zeit zum Entleeren nahezu dieselbe sein, wenn bei beiden Versuchen der Wasserstand im Kessel beim Beginn und am Ende des Abblasens der nämliche ist.

Die allgemeinen Gleichungen (341) und (342), die beim vorliegenden Probleme Verwendung fanden, lassen sich für praktische Fälle genau genug durch einfachere Formeln ersetzen. Setze ich wieder die spezifische Wärme des Wassers constant und zwar im Mittel $c = 1{,}0224$; setze ich ferner $\sigma = 1 : \gamma$, wo γ die Dichtigkeit des Wassers ($\gamma = 1000$) darstellt, so schreibt sich Gl. (341) auch

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} = c \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2} \tag{344}$$

und statt Gl. (342) folgt:

$$A \frac{w^2}{2g} = c\,(T_1 - T_2) - c\,T_2 \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2} + A \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} \tag{345}$$

Wollte man sich erlauben, hier das letzte Glied noch zu vernachlässigen, was ich aber im Allgemeinen nicht für statthaft halte, so würde man erhalten:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{c}{A}\left[T_1 - T_2 - T_2 \operatorname{logn.} \frac{T_1}{T_2}\right]$$

Den Ausdruck rechts hat aber schon Rankine aufgestellt*); nur legt er ihm eine andere Bedeutung unter und behandelt das Problem nicht als Ausflussproblem; Rankine sagt nämlich, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung die Arbeit darstelle, welche frei wird, wenn ein Kilogr. Wasser unter dem der Temperatur T_1 entsprechenden Druck plötzlich dem geringern,

*) Philosophical Transactions for 1854. Philosophical

der Temperatur T_2 entsprechenden Druck ausgesetzt wird. Meine Untersuchungen zeigen jetzt, dass diese Formel eine weit allgemeinere Bedeutung hat und dass die Rankine'sche Formel nur näherungsweise richtig ist; im Allgemeinen ist das Glied $A\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ der Gleichung nicht so klein, dass es ohne Weiteres weggelassen werden dürfte, wie es von Rankine geschehen ist.

Nehme ich endlich noch an, dass der Ausfluss des heissen Wassers bei sehr geringer Druck- und Temperaturdifferenz erfolgt, so lässt sich, wie schon oben geschehen ist,

$$\text{logn.} \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

setzen und dann erhält man statt Gl. 345) ganz einfach:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

d. h. die gewöhnliche Formel, die in jedem Handbuch der Hydraulik für den Ausfluss des Wassers aus Gefässmündungen aufgestellt wird.

In dieser Gleichung bedeutet aber, wie in allen obigen Formeln, p_1 der Druck im Ausflussgefäss im Niveau der Mündung. Steht der Wasserspiegel um h über der Mündung und ist p_1 der Druck des Dampfes auf den Wasserspiegel, so hätte man in allen vorstehenden Formeln

$$h + \frac{p_1}{\gamma} \text{ statt } \frac{p_1}{\gamma}$$

zu substituiren.

Schliesslich möchte ich nochmals hervorheben, dass die bei diesen beiden Problemen benutzten Gleichungen ausdrücklich unter der Voraussetzung entwickelt wurden, dass der im Ausflussgefässe nach der Mündung hinströmenden Masse von aussen her Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, ein Fall, mit dem man es in der Praxis wohl allein nur zu thun hat. Ich hätte aber auch andere Voraussetzungen machen können; die nächstliegende wäre z. B. die, dass die specifische Dampfmenge x_1 der nach der Mündung strömenden Mischung constant erhalten werden soll. Wir hätten dann in den beiden Grundgleichungen (332) und (333) S. 410 einfach $x_1 = x_2 = x$ zu setzen. Die Gl. (333) lehrt dann, dass unter dieser Voraussetzung eine Mittheilung oder

eine Entziehung von Wärme je nach dem anfänglichen Werthe x_1 erforderlich wird.

Nehme ich z. B. an, es soll durch ein Rohr aus dem Wasserraume eines geheizten Dampfkessels nur Wasser (ohne Dampf) ausströmen, so wäre in die bezeichneten Gleichungen $x_1 = x = x_2 = 0$ zu setzen. Man erhält dann aus Gl. (333)

$$dQ = dq$$

oder durch Integration

$$Q = q_2 - q_1 = -(q_1 - q_2)$$

Das wäre die Wärmemenge, die jeder Gewichtseinheit Wasser während ihres Hinströmens nach der Mündung entzogen werden müsste, damit kein Verdampfen erfolgt.

Die Gl. (332) ergiebt ferner hier:

$$A \frac{w^2}{2g} = Q + q_1 - q_2 + A\sigma(p_1 - p_2)$$

oder wenn man den Werth von Q einsetzt

$$\frac{w^2}{2g} = \sigma(p_1 - p_2) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Es erscheint also, wie das zu erwarten war, die gewöhnliche Formel, die wir anwenden, wenn das Wasser ohne Aenderung des Aggregatzustandes durch eine Mündung ausfliesst *).

*) An die Untersuchungen über den Ausfluss der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen würden sich naturgemäss ähnliche Untersuchungen anschliessen lassen wie auf S. 173 bei Behandlung der permanenten Gase; es liesse sich das Ueberströmen der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen aus einem Gefässe in ein anderes unter der Voraussetzung betrachten, dass das Gefässvolumen constant erhalten wird. Das Problem ist aber von keinem technischen Werthe und führt auch sonst nicht auf Resultate, die neue Aufschlüsse über das Verhalten der Dämpfe geben. Ich begnüge mich daher, auf die Abhandlung Bauschinger's »Ueber das Ausströmen des Wasserdampfes aus einem Gefässe und sein Einströmen in ein solches« in Schlömilch, Zeitschrift der Mathem. und Physik, 8. Jahrgang 1863, Heft 6, hinzuweisen. Diese Abhandlung enthält übrigens dieselben Formeln für die Ausflussgeschwindigkeit der Dämpfe, die ich schon vor Bauschinger im »Locomotivenblasrohr« entwickelt und benutzt habe.

B. Neue Theorie der Dampfmaschinen.

Vorbemerkungen.

Die Aufgabe der theoretischen Maschinenlehre bei Behandlung und Untersuchung der Kraft- oder Umtriebsmaschinen besteht darin, nachzuweisen, welche Wirkung durch eine bestimmte Kraft den Naturgesetzen zu Folge an einer Maschine von gegebener Anordnung erzielt werden kann und anzugeben, welche Bedingungen in der allgemeinen Kraftübertragung, der Anordnung und dem Gange der Maschine erfüllt werden müssen, damit von der im Motor zur Disposition gestellten mechanischen Arbeit der grösstmögliche Theil von der Kraftmaschine auf die Transmission übertragen werde. Erst in zweiter Linie fordert der praktische Maschinenbau möglichst einfache und zuverlässige Formeln, nach denen für eine neu zu erbauende Maschine die Hauptdimensionen berechnet werden können, der Art, dass man erwarten kann, es werde die Maschine schliesslich bei der Ingangsetzung wirklich die geforderte Leistung und zwar unter bester Ausnutzung der disponiblen Arbeit geben.

In erster Linie fordert die Praxis von der Theorie die Aufstellung von Regeln und Grundsätzen, nach denen beim Baue und der Anordnung der Kraftmaschinen verfahren werden soll; man verlangt zu wissen, ob auch im Allgemeinen die Art und Weise der Benutzung des Motors, der ganze Prozess sachgemäss ist, ob es nicht noch andre und bessere Methoden in der Verwerthung der im Motor gegebenen Arbeit giebt: man fragt, welchen Einfluss jeder einzelne Theil der Maschine auf ihren Effect hat: welche Theile den grössern Einfluss auf die Effectverhältnisse der Maschine ausüben und welche Aenderungen an der Maschine und an einzelnen Theilen derselben anzubringen sind, damit wirkliche Verbesserungen in den Leistungsverhältnissen der Maschine erzielt werden

Die Lösung der so allgemein gestellten Aufgabe geschieht nun offenbar bei allen Kraftmaschinen am richtigsten auf dem Wege, der von unsern hervorragendsten Mechanikern Poncelet,

Redtenbacher, Weisbach, Combes u. A. bei den theoretischen Untersuchungen der Wasserräder und Turbinen eingeschlagen worden ist.

Man bestimmt zunächst die »disponible Arbeit«, d. h. die mechanische Arbeit, welche uns in der Zeiteinheit, in der Sekunde im Motor zur Verwerthung mittelst der Kraftmaschine zur Verfügung gestellt ist; stellt sich dann vor, die Maschine sei in gewisser, der gebräuchlichen Ausführung vorhanden und berechnet die »effective Arbeit«, d. h. die Arbeit, welche sie in der Sekunde auf die Transmission überträgt.

Die Berechnung der effectiven Arbeit, die wir mit L bezeichnen wollen, wenn sie in Meterkilogrammen gegeben ist, geschieht in der Weise, dass man die einzelnen Arbeitsverluste L_1, L_2, L_3 u. s. w., die in gleicher Zeit in der Maschine stattfinden, ermittelt und ihre Summe von der disponibeln Arbeit, die mit L_m bezeichnet werden mag, subtrahirt; man erhält dann:

$$L = L_m - (L_1 + L_2 + L_3 + \ldots)$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit L_m und bezeichnet man das Verhältniss $L : L_m$ mit η, welcher Werth den »Wirkungsgrad« der Maschine darstellt, so ergiebt sich:

$$\eta = 1 - \left(\frac{L_1}{L_m} + \frac{L_2}{L_m} + \frac{L_3}{L_m} + \ldots\right) \quad (346)$$

Die einzelnen Quotienten innerhalb der Klammer nenne ich die »Effectverluste«. Man erhält sonach den Wirkungsgrad einer Kraftmaschine, wenn man von Eins die Summe der Effectverluste subtrahirt. Je mehr sich dann der Wirkungsgrad η der Einheit nähert, um so besser ist die Maschine. Auf diese Weise erhält man dann in dem Werthe η ein Maass für die Güte und den Werth der Maschine, während gleichzeitig die analytischen Ausdrücke, die man für die einzelnen Effectverluste aufstellt, der Discussion unterworfen werden können; die Formeln leiten uns dann auf den Weg der möglichen Verbesserungen und auf Construktionsregeln und der Vergleich der Werthe der Effectverluste unter sich führt auf diejenigen, welche auf das Herabziehen des Wirkungsgrades den meisten Einfluss üben und die daher auch zuerst ins Auge zu fassen und zum Anhalten zu nehmen sind, wenn die Praxis von der Theorie erfahren soll, auf welchem

Wege wohl zunächst Verbesserungen in der Anordnung der Maschine zu erwarten sind.

Der hier angedeutete Weg, der wohl als der einzig rationelle bezeichnet werden muss, ist es denn auch, der mit schönem Erfolge in der Theorie der hydraulischen Motoren, speziell der Turbinen verfolgt worden ist, leider aber auch bis jetzt nur bei dieser Art Kraftmaschinen verfolgt werden konnte. Bei den Maschinen, die die Wärme als Motor verwerthen, wie bei den wichtigsten Maschinen der Neuzeit, den Dampfmaschinen, ist man bei den theoretischen Untersuchungen in ganz anderer Weise vorgegangen und zwar aus dem einfachen Grunde, weil man unsicher war, wie die disponible Arbeit der Dampfmaschinen zu bestimmen sei; ich werde aber in der Folge zeigen, dass diese Bestimmung sehr leicht ist, wenn man die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie zum Ausgangspunkte nimmt, und dass es keinerlei Schwierigkeiten unterliegt, eine Dampfmaschine ganz genau in derselben Weise zu berechnen, und bei Aufstellung einer Theorie derselben in der gleichen Weise vorzugehen, wie das vorhin angedeutet wurde und wie das bis jetzt nur bei den hydraulischen Umtriebsmaschinen geschehen ist. Ich werde zeigen, dass man auch bei Dampfmaschinen den Wirkungsgrad η nach Gl. (346) berechnen kann, weil es keinen Schwierigkeiten unterliegt, die einzelnen Effectverluste, wenigstens diejenigen, welche auf den Wirkungsgrad von vorwaltendem Einfluss sind, zu bestimmen und durch analytische Ausdrücke fest zu stellen.

Bis jetzt bestand das Hauptergebniss der verschiedenen Dampfmaschinentheorien eigentlich nur in einer Gleichung für die effective Arbeit L der Maschine, die man dann theils zur Berechnung der Dimensionen neu zu erbauender Maschinen, theils zu näherer Beurtheilung über den Einfluss einzelner Grössen auf den Werth dieser Arbeit L benutzte.

Den wahren Wirkungsgrad und die Effectverluste in dem oben gegebenen Sinne hat man nicht bestimmt, weil man keine Formel zur Berechnung der disponibeln Leistung besass, zur Bestimmung derjenigen Arbeit, die uns im Dampfe von gewissem Drucke wirklich zur Verfügung steht und die zu gewinnen wäre, wenn die Dampfmaschine eine vollkommene Maschine wäre, an welcher keinerlei Verluste stattfinden würden.

Daher fehlte auch bis jetzt jeder Anhaltspunkt zum Ver-

gleich der Leistungsfähigkeit der Dampfmaschinen mit derjenigen anderer Maschinen und man wusste nicht einmal mit Bestimmtheit anzugeben, ob die Art und Weise der Benutzung des Dampfes bei Dampfmaschinen in prinzipiell richtiger Weise geschieht.

Man hat zwar hier und da den Wirkungsgrad einer Dampfmaschine berechnet, indem man sonderbarer Weise die Arbeit der Maschine, die durch Brems- oder Indicatorversuche ermittelt war, durch den berechneten Werth L der effectiven Arbeit dividirte: der erhaltene Werth hat aber natürlich gar keine weitere Bedeutung und kann am wenigsten als Maass für die Güte der Maschine angesehen werden. Hierzu kam aber noch, worauf in dieser Schrift schon mehrfach hingewiesen wurde, dass man selbst bei Aufstellung der Gleichung für die effective Arbeit L einer Dampfmaschine, besonders bei Berechnung der Expansionsarbeit des Dampfes von Voraussetzungen ausging, welche die mechanische Wärmetheorie als unhaltbar nachgewiesen hat: es erscheint daher an der Zeit, die oben vorgetragenen Lehren bei Beurtheilung der wichtigsten aller Maschinen in Anwendung zu bringen, und eine Theorie der Dampfmaschinen aufzustellen, die den Anforderungen der neuen Wärmelehre und denen der mechanischen Technik gleichzeitig entspricht.

Es ist zwar das Folgende nicht der erste Versuch, die Sätze der mechanischen Wärmetheorie in der angezeigten Richtung zu verwerthen, doch geschah es von Andern bis jetzt in anderer Weise. Am ausführlichsten ist Clausius*) auf die Sache eingegangen, begnügt sich aber auch nur mit der Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für die effective Arbeit L, vergleicht die Ergebnisse dieser Formel mit denen der Gleichungen von Pambour und schliesst aus ihr auf das Verhalten des Dampfes im Cylinder. Die Hauptfrage nach der disponibeln Arbeit der Dampfmaschinen und nach den Effectverlusten behandelt Clausius nicht: in dessen Abhandlung findet die Dampfmaschine überhaupt mehr eine Beurtheilung vom physikalischen, als vom mechanisch technischen Standpunkte aus, die entwickelten Formeln sind auch so complicirt, dass sie bis jetzt schwerlich Verwendung bei Beurtheilung einer bestehenden Maschine gefunden haben werden.

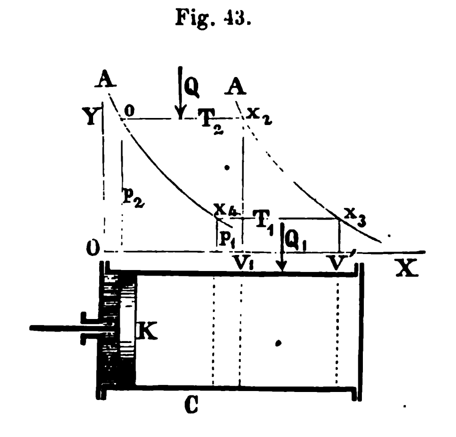
*) Clausius, Abhandlungen. V. Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine.

noch weniger bei Berechnung neu zu erbauender Maschinen benutzt werden können.

Ich werde bei meinen folgenden Untersuchungen so weit gehen, als es der Zweck der vorliegenden Schrift irgend erlaubt; erschöpfen lässt sich der Gegenstand hier nicht, es muss mir genügen, nur die Hauptfragen zu erledigen und Nebenfragen, besonders solche, die sich auf die Art und Weise beziehen, wie man auf Grund der schon ausgeführten und noch anzustellenden Versuche gewisse Constanten der Formeln ermitteln kann, nur zu berühren.

Von der disponibeln Arbeit der Dampfmaschinen.

Fig. 43.



Bei Aufstellung der Gleichung, nach welcher die disponible Arbeit einer Dampfmaschine berechnet werden soll, kann man drei verschiedene Ausgangspunkte wählen, und erhält daher auch drei verschiedene Formeln, die ich sämmtlich entwickeln werde, hauptsächlich aber nur, um zu zeigen, dass nur eine der drei Formeln vom technischen Standpunkte aus zur Anwendung empfohlen werden kann und dass die andern beiden Formeln, von denen die eine auch neu ist, die andere aber im Grunde genommen schon von Clapeyron zu gleichem Zwecke angegeben wurde, von der Technik nicht angenommen werden können, aus Gründen, die auch dargelegt werden sollen.

Entwicklung der ersten Formel.

Die Entwicklung der ersten Gleichung zur Bestimmung der disponibeln Arbeit führt uns gleichzeitig auf die Anordnung einer theoretisch vollkommenen Dampfmaschine und der Vergleich einer solchen Maschine mit den Dampfmaschinen, wie sie wirklich ausgeführt werden, wird uns dann lehren, ob wir in Wirklichkeit

die uns im Dampfe zur Verfügung gestellte Arbeit prinzipiell richtig verwerthen.

Man denke sich den mit einem Kolben K versehenen Dampfcylinder C. Der Raum links vom Kolben, wenn derselbe am Hubende steht, sei mit M Kilogr. Wasser*) von der Temperatur t_2 oder der absoluten Temperatur T_2 gefüllt und gleichzeitig werde, um zunächst die Dampfbildung zu verhindern, der Kolben von aussen pro Flächeneinheit mit p_2 belastet. Der Druck p_2 ist der der Temperatur t_2 entsprechende Dampfdruck.

Es soll nun ein Kreisprozess von folgender Art ausgeführt werden.

Es soll dem Wasser zunächst von aussen Wärme zugeführt werden, und der Kolben unter constantem äussern Drucke p_2 zurückweichen. Dabei bleibt bekanntlich die Temperatur T_2 constant, weil das Wasser unter constantem Drucke in Dampf übergeht. Ist das Volumen V_1 geworden, so soll die spezifische Dampfmenge x_2 betragen, es sind also bis dahin Mx_2 Kilogr. Dampf gebildet worden, und der Rest der Masse $M(1 - x_2)$ ist im tropfbaren Zustande vorhanden. Die Wärmemenge, welche zuzuführen war, sei Q und findet sich nach den früher gegebenen Formeln:

$$Q = Mr_2 x_2 \tag{347}$$

Legen wir nun durch die Punkte o und x_2 (Fig. 43) zwei adiabatische Curven AA und lassen wir jetzt die Masse ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme expandiren, bis das Volumen auf V'' gewachsen und der Druck auf p_1 herabgegangen ist, so findet sich die spezifische Dampfmenge x_3 für das Ende der Expansion nach Gl. (243) S. 322 aus der Formel:

$$\frac{r_1 x_3}{T_1} + \tau_1 = \frac{r_2 x_2}{T_2} + \tau_2 \tag{348}$$

Es soll nun die Masse bei constantem Drucke p_1 comprimirt

*) Die Gleichungen, welche im Folgenden entwickelt werden, gelten für jede Flüssigkeit und ihren Dampf; es soll aber in der Folge das Wort Wasser in dem allgemeinen Sinne genommen werden, wie es in der Hydromechanik Gebrauch ist. Bei speziellen Anwendungen der Formeln sind aber natürlich die der Flüssigkeit und ihrem Dampfe entsprechenden speziellen Versuchswerthe zu benutzen.

werden, so weit bis die Druckcurve, die hier eine gerade Linie parallel der Abscissenaxe ist, die erste durch o gehende adiabatische Curve im Punkte x_4 schneidet. Ist die spezifische Dampfmenge in diesem Augenblicke x_4, so gilt für diese adiabatische Curve, weil im Punkte o die spezifische Dampfmenge Null ist auch die Beziehung

$$\frac{r_1 x_4}{T_1} + \tau_1 = \tau_2 \tag{349}$$

Auf dem ganzen Wege der Compression blieb aber die Temperatur T_1 constant und daher findet sich die Wärmemenge Q_1, die hierbei abzuführen war

$$Q_1 = M r_1 (x_3 - x_4)$$

oder wenn man durch vorstehende beiden Gleichungen durch Subtraction die Differenz $r_1 (x_3 - x_4)$ bestimmt:

$$Q_1 = M r_2 x_2 \frac{T_1}{T_2} \tag{350}$$

Drücken wir endlich die Mischung nach der adiabatischen Curve $x_4 o A$ zusammen, bis der Anfangszustand wieder erreicht, also wieder aller Dampf in Wasser von der Temperatur T_2 unter dem Drucke p_2 verwandelt ist, so ist der Kreisprozess vollendet, und kann jetzt in gleicher Weise wiederholt werden.

Die Arbeit L, die dabei gewonnen wurde, wird durch die Fläche $o x_2 x_3 x_4$ (Fig. 43) dargestellt, eine Fläche, deren Umriss nichts anders als die dieser Dampfmaschine entsprechende Indikatorcurve ist. Da bei diesem Prozesse die Wärmemenge Q zu- und die Wärmemenge. Q_1 abgeleitet wurde, so ist $Q - Q_1$ die verschwundene Wärme und wir haben nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie zwischen dieser und der gewonnenen Arbeit die Gleichung

$$A L = Q - Q_1$$

und wenn wir hier Gl. (347) und (350) benutzen:

$$L = \frac{M x_2 r_2}{A T_2} (T_2 - T_1) \tag{351}$$

oder auch:

$$L = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1) \tag{352}$$

und das ist dieselbe Gleichung, die wir früher S. 229 allgemein für die disponible Arbeit der calorischen Maschinen gefunden haben und für welche dieselben Erläuterungen gelten, welche auf S. 238 u. f. gegeben wurden.

Denken wir uns, der der Temperatur T_2 entsprechende Druck p_2 sei der höchste, der bei der Berechnung der Dimensionen der Maschine zu Grunde gelegt wurde und der der Temperatur T_1 entsprechende Druck p_1 sei der geringste, den man bei der Compression unter constantem Drucke, bei der Abkühlung, erreichen kann, so stellt, da wir auch die Verdampfung unter constantem Drucke p_2 stattfinden liessen, auch L nach Gl. (352) das Maximum der Arbeit dar, das wir bei dieser Dampfmaschine überhaupt gewinnen können. Denn ist p_2 überhaupt der möglichst grösste und p_1 der möglichst kleinste Druck, der vermöge der ganzen Anordnung der Maschine und mit Rücksicht auf die Hülfsmittel zur Abkühlung bei dieser Maschine im Laufe des Kreisprozesses erreicht werden kann, so muss offenbar, wie es im obigen Prozesse angenommen wurde, die Verdampfung auf dem Wege ox_2 (Fig. 43) bei constantem höchsten Drucke p_2 (constanter Temperatur T_2) und die Compression auf dem Wege x_3x_4 bei constantem niedrigsten Drucke p_1 (bei constanter Temperatur T_1) stattfinden. Wäre der Druck bei der Verdampfung zum Theil kleiner als p_2 und bei der Compression zum Theil grösser als p_1, so würde dadurch, wie das leicht zu erkennen ist und wie ich das schon bei den calorischen Maschinen nachgewiesen habe, die Arbeit kleiner sein. Wir haben dort schon gefunden, dass für das Maximum der Arbeit die Curven ox_2 und x_3x_4 (Fig. 43) isothermische Curven sein müssen, wie das hier der Fall ist, da bei Dampf- und Flüssigkeitsmischungen die Curven für constanten Druck und die für constante Temperatur identisch sind.

Aus Allem folgt, dass die bei der vorstehenden Betrachtung zu Grunde gelegte Dampfmaschine eine vollkommne ist und dass, wenn die wirklich ausgeführten Dampfmaschinen den Kreisprozess genau in der angegebenen Weise ausführen würden, theoretisch genommen an unsern Dampfmaschinen nichts auszusetzen wäre. Das ist jedoch nicht der Fall, der Kreisprozess der wirklichen Dampfmaschine ist, wie sich später zeigen wird, etwas verschieden von dem Obigen, also kein vollkommener

und daher können wir auch an unsern Dampfmaschinen, selbst abgesehen von allen schädlichen Widerständen aus einer gegebenen Wärmemenge Q nicht das Maximum gewinnen. Je mehr aber die Arbeit einer ausgeführten Dampfmaschine der Maximalarbeit näher kommt, um so besser ist sie, ich betrachte daher die Arbeit L nach Gl. (352) als die disponible Arbeit einer Dampfmaschine, indem ich einfach die Arbeit der wirklichen Maschine mit derjenigen einer vollkommenen Maschine vergleiche, welche in gleicher Zeit dieselbe Wärmemenge erfordert und welche ihren Kreisprozess zwischen den gleichen Grenzpressungen p_2 und p_1 oder was dasselbe ist, zwischen den gleichen Grenztemperaturen T_2 und T_1 ausführt. Die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ ist für diese Dampfmaschine das disponible (Temperatur-) Gefälle und $Q : A T_2$ das auf der Höhe T_2 zur Disposition stehende Wärmegewicht, das man um das Gefälle $T_2 - T_1$ arbeitsverrichtend niedersinken lässt.

Die wirkliche Dampfmaschine ist deshalb keine vollkommene Maschine, weil wir nicht im Stande sind (und nie im Stande sein werden), die vier Theile des oben in Fig. 43 angegebenen Kreisprozesses in ein und demselben Raume, im Dampfcylinder selbst vorzunehmen, wir müssen bei der wirklichen Durchführung des Prozesses den vermittelnden Körper, die Dampf- und Flüssigkeitsmischung aus einem Raume nach dem andern schieben. In einem Raume (dem Dampfkessel) findet die Mittheilung von Wärme statt; von dort aus führen wir die Mischung in den Dampfcylinder, wo sie sich erst unter constantem Drucke Raum macht und dann expandirt: die Wärmeentziehung findet, wenn wir zunächst nur eine Dampfmaschine mit Condensation im Auge behalten. im Condensator statt und der letzte Theil unseres Prozesses, Compression nach der adiabatischen Curve bis die Mischung wieder ganz in Wasser übergeführt ist, fehlt bei unsern Dampfmaschinen gänzlich und wird durch eine andere Ueberführungsart ersetzt. In dem zuletzt Erwähnten liegt eben, wie das später gründlich erläutert werden soll, die Unvollkommenheit des Kreisprozesses der wirklichen Dampfmaschinen.

Der Umstand, dass wir nicht den ganzen Prozess in einem und demselben Raume vornehmen können *), hat zur Folge, dass

*) Die erste Dampfmaschine, die Pepin erbaute, war merkwürdiger

die wirklichen Dampfmaschinen voluminöser ausfallen, als eine vollkommene Maschine sein würde. Diesen Fehler theilt aber die Dampfmaschine mit den Luftexpansionsmaschinen. Auch bei den calorischen Maschinen können nicht alle einzelnen Operationen des Kreisprozesses im gleichen Raume erfolgen, wir müssen auch dort das arbeitende Luftquantum in verschiedenen Räumen erhitzen und abkühlen, expandiren lassen und comprimiren; darin ist eben auch der Uebelstand begründet, dass die calorischen Maschinen verhältnissmässig grossen Raum einnehmen. Sie stehen in dieser Beziehung aber doch nicht so weit hinter den Dampfmaschinen zurück, wie es gewöhnlich dargestellt wird, weil man beim Vergleiche bei der Dampfmaschine immer nur die eigentliche Maschine ohne ihren Kessel betrachtet. Wenn man aber gerecht sein will, muss man beim Vergleich den ganzen Rauminhalt, welchen die Kesselanlage erfordert, mit in Betracht ziehen.

Die Formel (352) ist es also, die ich künftig zur Berechnung der disponibeln Arbeit einer Dampfmaschine verwenden werde, beziehe ich die Arbeit L auf die Sekunde, so bedeutet Q die Wärmemenge, welche der Maschine in jeder Sekunde im Kessel zugeführt werden muss; T_2 ist die höchste (absolute) Temperatur, die im Prozesse vorkommt, d. h. die Temperatur des Dampfes im Kessel und T_1 ist die tiefste Temperatur, d. h. die Temperatur im Condensator, wenn die Maschine überhaupt mit Condensation arbeitet; ist die Maschine eine ohne Condensation, so ist die Temperatur T_1 die Temperatur des gesättigten Dampfes von einer Atmosphäre Druck, also ist bei Wasserdampf $t_1 = 100^0$ und $T_1 = 373^0$.

Wir können nämlich, wie es zwar ohne Weiteres klar ist, wie es aber später noch weiter erläutert werden soll, eine Dampfmaschine ohne Condensation, wie eine solche mit Condensation betrachten, bei der aber die Temperatur im Condensator zu 100^0 und der Druck daselbst zu 1 Atmosphäre anzunehmen ist (bei Maschinen, die mit Wasserdampf arbeiten).

Sind sonach die Werthe Q, T_2 und T_1 gegeben, so lässt sich

Weise im Grunde genommen dem Prinzip nach eine vollkommene Maschine, denn Papin hatte die Absicht, die einzelnen Operationen eines Kreisprozesses im gleichen Raume, im Dampfcylinder vorzunehmen.

leicht für die betreffende Dampfmaschine die disponible Arbeit L nach Gl. (352) berechnen; die Temperaturen T_2 und T_1 sind gewöhnlich direct gegeben: nicht so ist es mit der Wärmemenge Q; diese ist erst für die betreffende Maschine besonders zu ermitteln, bei einer vollkommenen Dampfmaschine beträgt sie nach Gl. (347) $Q = Mx_2 r_2$; bei einer gewöhnlichen Dampfmaschine werden wir aber in der Folge einen andern, jedoch ebenfalls einfachen Ausdruck für Q gewinnen, nach welchem sich ebenso leicht diese Wärmemenge bestimmt. Es wird sich dort aber, wie schon erwähnt werden mag, für Q unter sonst gleichen Umständen jederzeit ein Werth ergeben, der grösser ist, als der der vollkommenen Maschine.

Wir wollen nun zunächst die Voraussetzung machen, es sei wirklich möglich, eine vollkommene Dampfmaschine auszuführen und fragen, welche Dampfmenge und welche Wärmemenge gewissen Leistungen entspricht.

In Gl. (351), nämlich

$$L = \frac{Mx_2 r_2}{A T_2} (T_2 - T_1),$$

bedeutet Mx_2 das Gewicht des Dampfes für den einen Prozess; soll L die Arbeit in Meterkilogramm pro Sekunde darstellen, so ist Mx_2 auch die Dampfmenge, die in jeder Sekunde erzeugt werden muss: bezeichnen wir diese mit D, so folgt

$$L = \frac{D r_2}{A T_2} (T_2 - T_1)$$

Es sei nun N die Arbeit in Pferdestärken und D_h die Dampfmenge stündlich, so ist nach französischem Maasse:

$$N = \frac{L}{75} \text{ und } D_h = 3600\, D$$

Bestimme ich hieraus L und D und setze ich die Werthe in vorstehende Gleichung, so findet sich, wenn noch $A = 1:424$ substituirt wird

$$\frac{N}{D_h} = 0{,}001570 \frac{r_2}{T_2} (T_2 - T_1)$$

und umgekehrt

$$\frac{D_h}{N} = \frac{636{,}792}{\frac{r_2}{T_2} (T_2 - T_1)} \tag{353}$$

Setze ich noch in der erstern Gleichung $D_h = 100$ Kilogr., so folgt:

$$N = 0{,}157037 \frac{r_2}{T_2} (T_2 - T_1) \tag{354}$$

Die Formel (353) giebt für eine vollkommene Dampfmaschine, welche mit gesättigtem Wasserdampf arbeitet, die Dampfmenge stündlich pro Pferdestärke in Kilogrammen, einen Werth, nach welchem man in der Praxis häufig die Güte einer Dampfmaschine beurtheilt.

Die andre Formel (354) giebt die Arbeit einer vollkommenen Dampfmaschine pro 100 Kilogr. Dampf stündlich; ein Werth, der ebenfalls als Vergleich für verschiedene Dampfmaschinensysteme geeignet ist.

Man erkennt, mit welcher Leichtigkeit sich für eine vollkommene Maschine diese beiden Werthe berechnen; man hat nur die Temperatur t_2 im Kessel und die Temperatur t_1 im Condensator zu kennen, und diese Temperaturen sind nach Tab. 10 bekannt, wenn man den Kessel- und Condensatordruck p_2 und p_1 als gegeben betrachtet. Nach der gleichen Tabelle findet sich dann leicht die Verdampfungswärme r_2 aus der Formel

$$r_2 = \varrho_2 + A p_2 u_2$$

Nach diesen beiden Formeln sind die beiden folgenden Tabellen berechnet, indem ich bei Maschinen mit Condensation den Condensatordruck $p_1 = \frac{1}{10}$ Atmosphäre also $t_1 = 46{,}21$; $T_1 = 319{,}21$ setzte, hingegen für Maschinen ohne Condensation $p_1 = 1$ Atmosphäre, sonach $t_1 = 100$ und $T_1 = 373$ angenommen habe.

Dampfmenge stündlich pro Pferdestärke in Kilogrammen für eine vollkommene Dampfmaschine.

Dampfspannung in Atmosphären	$1\frac{1}{2}$	3	4	5	6	8	10
Maschine mit Condensation	7.078	5.767	5.375	5.117	4.929	4.670	4.496
Maschine ohne Condensation	33.143	14.914	11.947	10.387	9.406	8.217	7.507

Die Tabelle giebt die Minimalwerthe der Dampfmenge, denen wir uns in Wirklichkeit so viel als möglich zu nähern hätten. Zunächst erkennt man den Unterschied zwischen den Maschinen mit und ohne Condensation. Die Werthe für die beiden Systeme nähern sich um so mehr, je höher der Dampfdruck ist, und nehmen bei beiden Systemen mit wachsendem Kesseldrucke ab.

Es ist aus der Tabelle zu schliessen, dass Condensation höchstens für Mitteldruckmaschinen, nicht für den Druck von 6, 8, 10 Atmosphären empfehlenswerth ist; die Dampfmenge pro Pferdestärke stellt sich der Tabelle gemäss dort zwar kleiner, aber wenig kleiner und da man die Expansion des Dampfes nie so weit treiben kann, als der obige Prozess verlangt (von 6, 8, 10, auf $^1/_{10}$ Atmosphären), so wird die Gleichheit der einzelnen Zahlenwerthe bei wirklichen Maschinen noch mehr hervortreten.

Bei den Maschinen ohne Condensation ist der Tabelle nach immer Hochdruck zu empfehlen und es scheint, dass selbst über die in der Tabelle angenommene Grenze von 10 Atmosphären vielleicht mit Vortheil hinausgegangen würde; bei Locomotivmaschinen ist es hier und da schon geschehen.

Die Werthe der Tabelle sind weit kleiner, als in der Praxis gewöhnlich für die stündliche Dampfmenge pro Pferdestärke angenommen wird.

Bei Maschinen mit Condensation rechnet man gewöhnlich für Niederdruck 34, für Mitteldruck 30 Kilogr. Dampf und bei Hochdruck ohne Condensation ebenfalls 30 Kilogr. Dampf pro Pferdestärke. Der Vergleich dieser Werthe mit denen der Tabelle würde sehr zu Ungunsten der wirklichen Dampfmaschinen sprechen. Der Vergleich ist aber auch nicht statthaft. Die zuletzt erwähnten Werthe der Praxis sollen Maximalwerthe darstellen und setzen ausdrücklich voraus, dass die Maschine mit grösster Kraftentwicklung thätig ist, mit dem geringsten Grade der Expansion arbeitet; man giebt diese Werthe nicht zur Beurtheilung der Maschine, sondern um sie als Grundlage zur Berechnung des Kessels, der Speise- und Condensationsapparate zu verwenden: man stellt diese Theile immer von solchen Dimensionen her, dass die Maschine unter Umständen eine weit grössere Arbeit entwickeln kann, als entsprechend ihren Dimensionen unter normalen Verhältnissen von ihr verlangt wird.

Die Werthe, welche für die stündliche Dampfmenge pro Pferdestärke durch spezielle Versuche an richtig arbeitenden Maschinen gefunden wurden, nähern sich weit mehr den Werthen unserer Tabelle und das Verhältniss beider Werthe führt unmittelbar auf den Wirkungsgrad der Maschine.

Arbeit einer vollkommenen Dampfmaschine in Pferdestärken für 100 Kilogr. Dampf stündlich.

Dampfspannung in Atmosphären	$1^1/_2$	3	4	5	6	8	10
Maschine mit Condensation	14.127	17.341	18.601	19.543	20.288	21.414	22.241
Maschine ohne Condensation	2.531	6.705	8.369	9.627	10.631	12.169	13.320

Da die Werthe dieser Tabelle nach Gl. (354) einfach durch Umkehrung der Werthe der vorigen Tabelle entstanden sind, so bieten sie keinen Anlass zu weitern Bemerkungen.

Zu einer besondern Betrachtung giebt jedoch noch die zweite Form der Gl. (352)

$$L = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1)$$

Anlass: beziehen wir Q und L auf die Sekunde, und nennen wir Q_h die Wärmemenge in Calorien, die stündlich der Maschine zuzuführen ist und führen wir die disponible Arbeit in Pferdestärken ein, setzen wir also $L = 75\,N$ und $Q = Q_h : 3600$, so folgt:

$$\frac{Q_h}{N} = \frac{636{,}792 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \qquad (355)$$

Diese Gleichung giebt »die Wärmemenge, welche der Maschine stündlich pro Pferdestärke disponibler Arbeit zuzuführen ist«. Die folgende Tabelle ist unter den gleichen Voraussetzungen wie die beiden vorhergehenden Tabellen berechnet.

Wärmemenge, welche stündlich pro Pferdestärke disponibler Arbeit erforderlich ist.							
Dampfspannung in Atmosphären	$1^1/_2$	3	4	5	6	8	10
Maschine mit Condensation	3738.4	2954.7	2715.0	2554.3	2435.5	2268.3	2152.6
Maschine ohne Condensation	17505.2	7641.2	6034.5	5185.0	4647.7	3991.1	3594.2

Die Werthe dieser Tabellen stellen wieder Minimalwerthe vor. bei wirklichen Dampfmaschinen ist die stündliche Wärmemenge pro Pferdestärke jederzeit grösser. Wäre wirklich eine vollkommene Dampfmaschine ausführbar, so fände sich dann leicht durch Verbindung der Gl. (347) und (350) S. 430 und 431, wenn man die erhaltene Formel in der soeben dargelegten Weise umformen würde, die Wärmemenge, die stündlich pro Pferdestärke abgeleitet werden müsste:

$$\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{Q_h}{N}$$

Bemerkenswerth ist es, dass die Werthe der letzten Tabelle gar nicht von der Art des Dampfes abhängig sind, ob wir z. B. Wasser- oder Aetherdämpfe oder beide zusammen verwenden, ist gleichgültig; sie gelten auch für calorische Maschinen (vergl. S. 214).

Man erkennt sowohl aus vorstehenden Beispielen als aus der Gl. (352), dass die Arbeit L, welche bei dem vollkommenen Kreisprozesse der Wärmemenge Q entspricht, nur von den Grenztemperaturen abhängt, ich schliesse daraus, dass theoretisch genommen, durch die Aetherdampfmaschinen von Du Tremblay unmöglich bessere Erfolge erzielt werden konnten, als mit der gewöhnlichen einfachen Maschine für Wasserdampf. Du Tremblay verband zwei Maschinen, die eine arbeitete mit Wasser-, die andere mit Aetherdampf. Angenommen, beide vollführen vollkommene Kreisprozesse und dem Wasserdampfe wird die Wärme durch flüssigen Aether entzogen, der dabei verdampft und der dann schliesslich bei der Temperatur T_1 wieder conden-

sirt wird, so ändert diese ganze Anordnung nichts an der Formel (355). T_2 ist die Temperatur, bei der der Wasserdampf erzeugt wird, und T_1 die, bei welcher der Aetherdampf condensirt wird. Mit dem Werthe T_2 kann man natürlich bei dieser combinirten Maschine nicht höher gehen, als bei einer gewöhnlichen Wasserdampf-Dampfmaschine und mit der Temperatur T_1 nicht tiefer herab. Das Temperaturintervall ist dasselbe und daher folgt das Gleiche auch für die disponible Arbeit einer bestimmten Wärmemenge Q.

Eine ganz andere Frage ist aber die nach der Grösse, nach den Dimensionsverhältnissen von Dampfmaschinen, die mit verschiedenen Dampfarten arbeiten: auf diese Frage werde ich zurückkommen.

Die Fundamentalgleichung (352) lehrt, dass bei einer vollkommenen Dampfmaschine die einer gewissen Wärmemenge entsprechende Arbeit nur von dem Temperaturintervall $T_2 - T_1$, d. h. von dem Temperaturgefälle abhängt und in der Gleichung

$$L = \frac{Q}{A\,T_2}\,(T_2 - T_1)$$

bedeutet dann $Q : A\,T_2$ das Wärmegewicht, das bei der betreffenden Dampfmaschine auf dem Gefälle $T_2 - T_1$ zur Benutzung geboten wird.

Kehre ich auf einen Augenblick zu dem Vergleich zurück, den ich auf S. 239 gegeben habe, so lässt sich $Q : A\,T_2$ wie das Gewicht einer im Niveau T_2 herbeiströmenden Flüssigkeit auffassen, die man arbeitsverrichtend in's Niveau T_1 herabsinken lassen kann. Wer eine Turbine bestellt, giebt die Wassermenge und das Gefälle an, welches zur Verfügung steht; wer eine Dampfmaschine bestellt, giebt den Druck im Kessel, also damit die Lage des obern Niveaus, die Temperatur T_2, indem er eine Tief-, Mittel- oder Hochdruckdampfmaschine verlangt; er giebt ferner die Lage des untern Niveaus, die Temperatur T_1, indem er eine Maschine mit oder ohne Condensation verlangt und endlich giebt er durch die Menge des Brennmateriales, die in der Zeiteinheit zur Verfügung steht, die Wärmemenge Q, die in den Kessel tritt, und damit indirect das Wärmegewicht.

Die Aufgabe des Constructeurs ist dann, die Maschine so herzustellen, dass sie die Arbeit, welche dem gegebenen Wärme-

gewichte und dem gegebenen Temperaturgefälle entspricht. möglichst vollkommen ausnutzt.

Der Umstand, dass in unsern Dampfkesseln der Druck p_2 oft zwischen weiten Grenzen variirt, und dass ebenso, je nach der Führung der Heizung des Kessels, die Wärmemenge, die in den Kessel tritt, gewissen Schwankungen unterworfen ist, ändert nichts an unserm Vergleich; nur die untere Temperatur T_1 ist bei den verschiedenen Maschinen wenig veränderlich und ist wesentlich dadurch bestimmt, ob die Maschine mit oder ohne Condensation arbeiten soll.

Die Aufgabe, die hier dem Dampfmaschinen-Constructeur zufällt, ist daher dieselbe, die einem Turbinen-Constructeur zufällt, welcher eine Turbine für veränderliche Wassermenge, veränderlichen Ober- und nahezu unveränderlichen Unter-Wasserspiegelstand herstellen soll.

Entwickelung einer **zweiten** Formel für die disponible Arbeit.

In der vorhin gegebenen Formel:

$$L = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1)$$

welche die Maximalarbeit der Wärmemenge Q giebt, soll, wie wir schon geschlossen haben, die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ möglichst gross, der Werth T_2 also möglichst gross und T_1 möglichst klein sein.

In Betreff der Temperatur T_1 sind wir an die angegebenen, ziemlich festgesteckten Grenzen gebunden: nicht so ist es mit T_2, welches die Temperatur des Dampfes im Kessel repräsentirt. Diesen Werth sollte man auf das höchste Maass bringen, es sollte daher, so haben Carnot und Clapeyron zuerst geschlossen, die Temperatur im Kessel wo möglich gleich der Temperatur im Feuerraume der Dampfkesselanlage sein. Setzen wir diese Temperatur T'', so wäre die Maximalarbeit, welche der Wärmemenge Q entspricht:

$$L = \frac{Q}{A T''} (T'' - T_1) \tag{356}$$

Setzt man die Temperatur im Feuerraume zu 1000°, so wäre

$T'' = 1273^0$ und dann würde diese Formel für die vorhin behandelten Fälle für dieselbe Wärmemenge Q einen grössern Werth für die disponible Arbeit geben, als die Formel, die ich vorhin zur Berechnung dieser Arbeit hingestellt habe, und die man wieder erhält, wenn man in vorstehender Gleichung statt T'' die Temperatur T_2 des Dampfes im Kessel einsetzt. Man könnte unter solchen Umständen zweifelhaft sein, welche der beiden Formeln eigentlich anzunehmen ist. Einige Schriftsteller scheinen den Werth, den die vorstehende Formel giebt, als absolutes Maximum der Arbeit der Dampfmaschine, oder in der technisch gebräuchlichen Form gesprochen, als disponible Arbeit anzusehen. So vergleicht z. B. Clausius Abhandlung V. S. 187 den Werth, den man erhält, wenn man $T'' = 1000 + 273$ und $T_1 = 50 + 273$ setzt, mit Werthen, die sich ergeben, wenn statt T'' die gebräuchlichen Dampftemperaturen substituirt werden und schliesst dann »auf Unvollkommenheiten der gewöhnlichen Dampfmaschinen, welche in ihrem Wesen selbst begründet seien.«

Ich schliesse mich diesem Ausspruche, wenn er sich speziell auf die Resultate stützt, auf welche die vorstehende Formel führt, keineswegs an, und bin der Ansicht, dass diese Formel zur Beurtheilung der Dampfmaschinen überhaupt nicht verwendet werden kann, weil bei ihrer Benutzung stillschweigend eine Annahme gemacht wird, die unmöglich zu verwirklichen ist.

Zunächst setzt Gl. 356 voraus, dass die Temperatur im Kessel gleich der Temperatur im Feuerraume sei: nehmen wir für diese Temperatur nur 1000^0 C im Mittel an, so würde das auf einen enormen Dampfdruck führen, dem kein Kessel widerstehen kann, immer vorausgesetzt, dass im Kessel zugleich Flüssigkeit, also gesättigter Dampf vorhanden ist. Wir wollen aber selbst diesen Umstand unberücksichtigt lassen und vorübergehend die Möglichkeit der Herstellung einer so hohen Temperatur im Kessel einräumen, so ist hier noch ein anderer Umstand zu beachten. Die Formel setzt voraus, dass auch die Wärmequelle, d. h. der Körper, welcher die Wärme in den Kessel liefert, die gleich hohe Temperatur T'' habe, so lange er mit dem Körper, dem er Wärme zu liefern hat, d. h. mit dem Kessel, in Berührung ist, oder richtiger, dass die Wärmequelle eine Temperatur habe, die unendlich wenig mehr betrage.

Mit diesem Falle haben wir es aber hier durchaus nicht zu

thun. Die Verbrennungsgase bilden hier den Körper, welcher die Wärme an den Kessel liefert, und der ganze Vorgang ist in Wirklichkeit folgender: Die dem Brennmaterial durch den Rost zugeführte atmosphärische Luft nimmt die bei der Verbrennung freiwerdende Wärme auf und bildet, nachdem sie sich theilweise zersetzt hat, mit den aus der Verbrennung hervorgehenden Gasen die Verbrennungsgase, die im Feuerraume die höchste Temperatur haben, sich dann aber während des Hinströmens an den Kesselwänden mehr und mehr abkühlen, weil sie ihre Wärme grösstentheils an den Kessel abgeben: beim Verlassen des Kessels, beim Eintritt in den Fuchs. d. h. in den Kanal, der die Feuerkanäle mit dem Schornstein verbindet, ist die Temperatur dieser Gase weit geringer als anfangs im Feuerraume. Wir haben es also hier mit einer Wärmequelle zu thun, die in Folge der Wärmeabgabe starke Temperaturänderungen erleidet, und diesem Umstande müsste man Rechnung tragen in einer Weise, wie das durch die folgenden Untersuchungen dargelegt werden wird. Machen wir aber nun von Gl. (356) Gebrauch, so verbinden wir damit stillschweigend die unstatthafte Annahme, dass auch die Verbrennungsgase keine Temperaturänderungen erleiden, so lange sie mit den Kesselwandungen in Berührung sind, und das könnte offenbar nur der Fall sein, wenn das Gewicht der Verbrennungsgase, die in der Zeiteinheit durch den Feuerkanal gehen, unendlich gross, also auch die auf dem Roste in Verbrennung begriffene Brennmaterialmenge unendlich gross wäre.

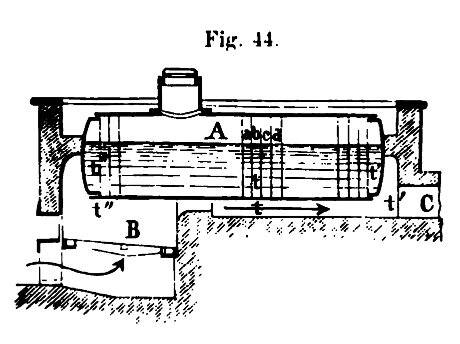
Ich schliesse daraus, dass die Gl. (356) wenigstens für die hier vorliegende Frage gar keinen Werth hat; jedenfalls kann man nicht zweifelhaft sein, dass sie für technische Beurtheilung der Dampfmaschinen nicht angenommen werden kann.

Entwickelung einer **dritten** Formel für die disponible Arbeit.

Bei allen Untersuchungen, die bis jetzt vorgeführt wurden, haben wir, wenn von Mittheilung oder Entziehung von Wärme bei einem Körper die Rede war, immer nur die Zustandsänderungen dieses einen Körpers betrachtet: nun besteht aber der Prozess des Erwärmens und Abkühlens immer in der Wechselwirkung wenigstens zweier Körper, von denen der eine die Wärme empfängt, die der andere abgiebt. Eine genauere Verfolgung des Vorganges erfordert daher im Allgemeinen auch ein Eingehen in die

Zustandsänderungen des zweiten Körpers, den wir bisher einfach als Wärmequelle bezeichnet, dem wir aber doch stillschweigend gewisse Eigenschaften beigelegt haben. Sprachen wir z. B. davon, dass ein Körper Wärme aufnehme und sich dabei bei constanter Temperatur ausdehne, so verbanden wir damit stillschweigend eine gewisse Vorstellung über die Art der Wärmequelle, d. h. des andern Körpers, der die Wärme liefert; wir legten diesem die Eigenschaft bei, dass er dem ersten Körper einfach durch Berührung, durch Leitung die Wärme abgebe und dessen Temperatur auf constanter Höhe erhalte, ohne dass er selbst seine Temperatur ändere. Das ist nun aber nur denkbar, wenn der die Wärmequelle darstellende Körper unendlich gross gegen den Körper ist, der die Wärme entzieht. Wir müssen daher schliessen, dass in Wirklichkeit die Verhältnisse im Allgemeinen andere sind und mit einem besondern Fall dieser Art hat man es bei der Untersuchung der Dampferzeugung in Dampfkesseln zu thun, ein Fall, der hier speziell erörtert werden soll.

Fig. 44.



Es stelle A (Fig. 44) einen Dampfkessel vor. Im Feuerraume B haben die Verbrennungsgase die höchste Temperatur t'' und strömen von da aus an der Kesselwandung hin und geben dabei einen grossen Theil ihrer Wärme an den Kessel ab. Schliesslich verlassen sie die Kesselwandung mit einer viel geringern Temperatur t' und treten durch den Fuchs C in den Schornstein. Im Kessel selbst herrscht eine geringere Temperatur t_2, die wir im ganzen Raume des Kessels als constant ansehen können; es ist die dem Dampfdrucke p_2 entsprechende Dampftemperatur. Wir haben sonach hier den Fall, dass der Körper, der die Wärme empfängt, auf constanter Temperatur erhalten bleibt, die Wärmequelle aber starke Temperaturänderungen erleidet. Die Wärme, oder besser gesagt, das Wärmegewicht fällt von hoher auf niedere Temperatur herab. Diese Art der Wärmeüberführung müssen wir nun offenbar als eine unvollkommne ansehen, wenn es sich darum handelt, Wärme

in Arbeit umzusetzen. Wollen wir diese Unvollkommenheit der Dampfmaschine selbst zur Last legen, so würde die disponible Arbeit derselben nach einer andern Formel zu berechnen sein, die ich nun ableiten werde. Die Abkühlung der Feuergase durch Wärmeabgabe von t'' auf t' ist nothwendig; wollte man daher eine vollkommne Ausnutzung der Wärme erzielen, so müsste die Temperatur des Kesselwassers verschieden sein und zwar an jeder Stelle gleich der sein, mit welcher die Verbrennungsgase an der gleichen Stelle ausserhalb des Kessels hinströmen. Bei der gewöhnlichen Anordnung ist das nicht denkbar, wohl aber kann man folgenden Grenzfall der Betrachtung zu Grunde legen. Ich denke mir den ganzen Inhalt des Kessels durch Scheidewände in unendlich viele Fächer $abcd\ldots$ (Fig. 44) getheilt und betrachte jedes Fach als einen für sich abgeschlossenen Dampfkessel, deren jeder eine besondere vollkommene Dampfmaschine mit Dampf versieht. In jedem Fache ist die Temperatur eine andere, aber immer gleich der, welche die Verbrennungsgase an der betreffenden Stelle ausserhalb haben.

Nehmen wir an, in dem mit b bezeichneten Fache (Fig. 44) sei die Temperatur t oder absolut genommen T und das sei auch die Temperatur der Gase ausserhalb daselbst, und setzen wir voraus, dass in der Sekunde die Wärmemenge dQ in das Fach eintritt, so würde die Maximalarbeit sich ergeben, wenn ein vollständiger Kreisprozess ausgeführt wird:

$$dL = \frac{dQ}{AT}(T - T_1)$$

vorausgesetzt, es sei T_1 die untere Temperaturgrenze, die für alle Fächer als gleich angenommen wird. Die vorstehende Gleichung schreibt sich aber auch, wie folgt:

$$dL = \frac{dQ}{A} - T_1 \frac{dQ}{AT}$$

Nehmen wir nun weiter an, dass in der Zeiteinheit G Kilogr. Verbrennungsgase durch die Heizkanäle also auch an dem Fache b vorübergehen, und ist c die spezifische Wärme der Gase bei constantem Drucke, so ist die Wärmemenge, welche die Gase an das Fach abgeben:

$$dQ = -cGdT \tag{357}$$

denn offenbar ist der Druck im ganzen Heizraume als nahezu constant anzunehmen und die Temperaturabnahme der Gase beim Hinströmen an dem Fache b mit dt oder dT zu bezeichnen. Setzt man diesen Werth dQ in das zweite Glied der vorhergehenden Gleichung, so folgt

$$dL = \frac{dQ}{A} + \frac{c\,G\,T_1}{A}\,\frac{dT}{T} \tag{358}$$

Ist nun die absolute Temperatur im Feuerraume und im ersten Fache entsprechend der Bezeichnung der Figur T'' und die Temperatur der Gase beim Verlassen des Kessels und die im letzten Fache T', so ergiebt sich durch Integration der Gl. (357)

$$Q = c\,G\,(T'' - T') \tag{359}$$

für die gesammte Wärmemenge, welche die Gase in alle Fächer des Kessels pro Sekunde liefern, abgesehen von Wärmeverlusten durch Ableitung durch die Umfassungswände des Heizraumes.

Die Integration von Gl. (358) hingegen giebt:

$$L = \frac{Q}{A} - \frac{c\,G\,T_1}{A}\,\text{logn.}\,\frac{T''}{T'}$$

oder wenn man den Werth von cG aus Gl. (359) bestimmt und hier benutzt:

$$L = \frac{Q}{A}\left[1 - \frac{T_1}{T'' - T'}\,\text{logn.}\,\frac{T''}{T'}\right] \tag{360}$$

und diese Formel gebe ich als eine neue Gleichung zur Berechnung der disponibeln Arbeit der Dampfmaschinen aber unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass bei Beurtheilung einer Dampfmaschine auf den Arbeitsverlust mit Rücksicht genommen werden soll, der eigentlich in der Art und Weise der Dampfproduction zu suchen ist und der wohl andrerseits auch wieder nicht als eigentlicher Verlust angesehen werden kann, da es offenbar unmöglich ist, einen Prozess der hier angenommenen Art wirklich auszuführen, ganz abgesehen davon, dass die Temperatur- und Druckverhältnisse, wie sie in den einzelnen Fächern des Dampfkessels angenommen wurden, nicht hergestellt werden können.

Setzen wir beispielsweise die Temperatur im Feuerraume $t'' = 1000^0$, also $T'' = 1273^0$, und die Temperatur der abziehenden

Gase $t' = 300$, sonach $T' = 573^0$; und nehmen wir, wie das bei Entwickelung der Gl. (360) vorausgesetzt wurde, die untere Temperaturgrenze für sämmtliche Kreisprozesse, welche den einzelnen Fächern entsprechen, durchgängig gleich und zwar hier entsprechend einer Maschine mit Condensation, wie oben, $t_1 = 46.21^0$ und dann für eine Maschine ohne Condensation $t_1 = 100^0$; so giebt Gl. (360) als disponible Arbeit beziehungsweise

$$L = 253.073\ Q \text{ oder } L = 224.270\ Q$$

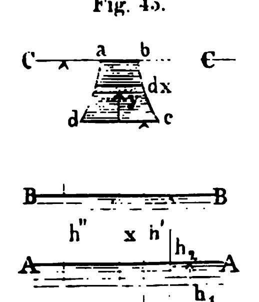
oder es ergiebt sich auf dem gleichen Wege, der auf S. 438 eingeschlagen wurde, die stündliche Wärmemenge pro Pferdestärke in den beiden Fällen:

$$\frac{Q_h}{N} = 1066.9 \text{ oder } \frac{Q_h}{N} = 1203.9 \quad \text{(Vergl. Tabelle S. 439.)}$$

Entwickelt man den Logarithmus in Gl. (360) in eine Reihe und setzt man dann $T'' = T'$, so gelangt man auf die Formel (356), welche durch die zweite Ableitung gefunden wurde. Die Gl. (359) giebt aber dann ganz richtig für das Gewicht G der Verbrennungsgase, die pro Sekunde am Kessel hinstreichen müssten, einen unendlich grossen Werth.

Beim Vergleich der Resultate der drei im Vorstehenden gegebenen Entwickelungen und der angegebenen Bedeutung der Resultate kann man nun nicht zweifelhaft sein, dass allein nur die in der ersten Entwickelung gegebene Formel (352) den wirklichen Verhältnissen entspricht und sonach diese allein bei Beurtheilung der Leistungsfähigkeit der Dampfmaschinen Anwendung finden kann. Obgleich ich diese Frage hiernach als erledigt betrachten kann, so rechtfertigt es sich doch wohl durch die Wichtigkeit der Sache, wenn ich zu näherer und erschöpfender Beleuchtung der vorstehenden Sätze über die disponible Arbeit der Dampfmaschine noch auf analoge Sätze der praktischen Hydraulik hinweise.

Fig. 45.



Es repräsentire $abcd$ (Fig. 45) den Querschnitt eines Wasserzuflusskanals; der Wasserspiegel daselbst liege um h'' über einem gewissen Niveau OO, für welches wir

der Einfachheit wegen den Meeresspiegel annehmen wollen. Der Kanalboden cd liege um h' über OO; die Kanalbreite sei veränderlich und werde entsprechend dem Abstande x mit y bezeichnet; ferner komme das Wasser in diesem Kanale mit einer gewissen mittlern Geschwindigkeit w herbei, die wir uns aber klein genug denken, um die lebendige Kraft der Bewegung nicht berücksichtigen zu müssen. Es seien ferner BB und AA die Wasserspiegel von zwei weiten Bassins: der erstere liege um h_2, der andere um h_1 über dem Meeresspiegel OO. Nehme ich nun an, es stehe uns das ganze Gefälle vom Spiegel CC bis zum Niveau AA wirklich zur Verfügung, so lässt sich leicht die Arbeit berechnen, die uns in dem herbeifliessenden Wasser zur Disposition steht, vorausgesetzt, wir kennen die Form des Kanalquerschnittes.

Aus dem Flächenstreifen $y\,dx$ kommt das Wasser mit der Geschwindigkeit w heraus, sonach ist das Gewicht dG der Wassermenge, die durch diesen Streifen in der Sekunde ausströmt

$$dG = \gamma w y\, dx$$

wenn γ die Dichtigkeit des Wassers bedeutet.

Würde dieses Wassergewicht langsam arbeitsverrichtend bis zum Meeresspiegel, d. h. um x herabsinken, so wäre eine Arbeit dW zu gewinnen, welche ist

$$dW = x\,dG$$

Wir können daher sagen dW sei die Arbeit, die uns in diesem Flächenstreifen pro Sekunde zur Verfügung gestellt wird. Hieraus folgt umgekehrt

$$dG = \frac{dW}{x}$$

oder unter Benutzung der für dG gegebenen Formel:

$$dW = \gamma w y x\, dx \qquad (361)$$

In Wirklichkeit steht uns aber nur die Höhe $(x - h_1)$ bis zum Wasserspiegel AA zur Disposition; das Maximum dL der Arbeit, die wir also wirklich gewinnen können, ist:

$$dL = (x - h_1)\, dG$$

und wenn wir diese Gleichung durch obige Gleichung $dW = x\,dG$ dividiren, erhalten wir:

$$dL = dW - h_1 \frac{dW}{x}$$

oder unter Benutzung von Gl. (361)

$$dL = dW - \gamma w h_1 y dx \tag{362}$$

Könnten wir nun Gl. (361) integriren, so fände sich die ganze Arbeit W, die uns durch den Zuflusskanal in der Sekunde zugeleitet wird, während Gl. (362) durch Integration auf die Arbeit L führt, die wir im Maximum pro Sekunde an diesem Wasserlaufe gewinnen könnten. Die Integration ist nur ausführbar, wenn wir die Form des Kanalquerschnittes kennen. Mache ich nun die spezielle Annahme, dass die Kanalbreite y in der Art sich nach x ändert, dass das Produkt $yx = a =$ Const. ist, so folgt sogleich durch Integration der beiden Gleichungen für die Grenzen $x = h'$ bis $x = h''$

$$W = \gamma w a (h'' - h')$$

und

$$L = W - \gamma w h_1 a \operatorname{logn.} \frac{h''}{h'}$$

und wenn man schliesslich das Produkt $\gamma w a$ eliminirt:

$$L = W \left[1 - \frac{h_1}{h'' - h'} \operatorname{logn.} \frac{h''}{h'} \right] \tag{363}$$

für die disponible Arbeit. (Vergl. Gl. 360. S. 446.)

Denken wir uns hingegen den Zuflusskanal als grosses Reservoir von sehr geringer Tiefe, in welchen G' Kilogramm Wasser pro Sekunde herbeikommen, so wäre die zugeführte Arbeit $W = G' h''$ und die im Maximum zu gewinnende Arbeit $L = G' (h'' - h_1)$ und aus beiden Formeln folgt durch Elimination von G':

$$L = \frac{W}{h''} (h'' - h_1) \tag{364}$$

Würde hingegen die ganze Höhe vom Wasserspiegel CC im Kanal bis zum Spiegel des Reservoirs BB aus irgend welchen Gründen nicht zu benutzen sein, müsste man also das aus dem Kanale kommende Wasser unbenutzt in das Niveau BB fallen lassen, so ist die Arbeit, welche im Niveau BB zugeführt wird, $W = G'' h_2$ und die Arbeit L, die man gewinnen kann, wenn

das Wassergewicht ins Niveau AA herabsinkt $L = G'' (h_2 - h_1)$ oder G'' eliminirt

$$L = \frac{W}{h_2}(h_2 - h_1) \tag{365}$$

Diese drei Formeln sind nun vollkommen identisch mit den drei Gleichungen, die ich oben für die disponible Arbeit der Dampfmaschinen entwickelt habe. Wo dort die zugeleitete Wärme in Arbeit gemessen ($Q:A$) erscheint, findet sich hier die zugeleitete Arbeit W und wo dort die absoluten Temperaturen vorkommen, finden sich die einzelnen Abstände des Wasserspiegels vom Meeresspiegel. Jedenfalls stellt der vorliegende analoge Fall die Vorgänge an einem Dampfkessel recht übersichtlich dar; wir haben es dort mit dem zuletzt behandelten Fall, der durch Gl. (365) dargestellt wird, zu thun. Mit der Wärmemittheilung der Feuergase an das Kesselwasser verhält es sich genau so, wie mit der Arbeitszuführung durch das in einem Kanale herbeiströmende Wasser. Der Dampfkessel bildet ein grosses Reservoir, in welches die Wärme herabfällt; ein Reservoir aber, in welchem wir gewissermassen (durch Veränderung des Dampfdruckes) das Niveau BB reguliren können, aber nur zwischen verhältnissmässig engen Grenzen.

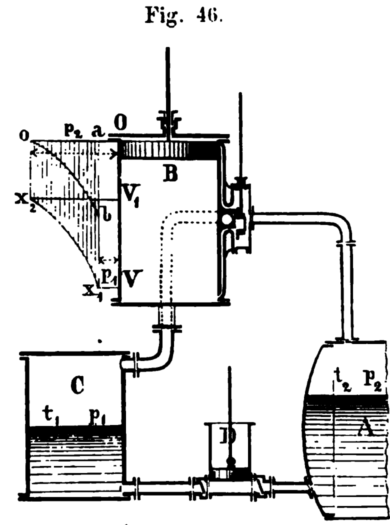
Ich werde nun im Weitern berechtigt sein, zur Berechnung der disponibeln Arbeit der Dampfmaschinen von der Formel der ersten Ableitung Gl. (352) Gebrauch zu machen.

Vom Kreisprozesse ausgeführter Dampfmaschinen.

Der Kreisprozess, den unsere heutigen Dampfmaschinen vollführen, ist zwar ein vollständiger, denn der vermittelnde Körper, Dampf- und Flüssigkeitsmischung, kehrt am Ende jedes einzelnen Prozesses wieder in den Anfangszustand zurück; der Prozess ist aber kein vollkommener, weil wir, selbst abgesehen von den Widerständen, die in der Maschine auftreten, vermöge der ganzen Anordnung und Gliederung der Dampfmaschinen nicht denjenigen Prozess ausführen, der nach Obigem auf das Maximum der aus der Wärme zu gewinnenden Arbeit führt.

Es wird sich daher zunächst darum handeln müssen, das Gesetz des Kreisprozesses abzuleiten, den wir unter den **günstigsten** Verhältnissen bei den Dampfmaschinen in Wirklichkeit vollführen können. Wir denken uns eine doppeltwirkende Maschine und machen bei deren Betrachtung vorerst folgende Voraussetzungen: 1) Es sei kein schädlicher Raum vorhanden: 2) der Dampfdruck im Cylinder während des Dampfeintrittes sei gleich dem Dampfdrucke im Kessel selbst; 3) der Dampfdruck hinter dem Kolben sei bei Maschinen mit Condensation identisch mit dem Drucke im Condensator, bei den Maschinen ohne Condensation gleich dem äussern Atmosphärendrucke; 4) die Expansion des Dampfes im Cylinder finde soweit statt, dass während derselben der Druck vom Kesseldruck auf den Condensator- resp. Atmosphärendruck herabsinkt; wir wollen die Expansion dieser Art eine vollständige nennen; endlich sei 5) die Steuerung so beschaffen, dass während des Dampfeintrittes der Kanal vollständig geöffnet ist und während des **ganzen** Kolbenschubes der Raum hinter dem Kolben frei mit dem Condensator oder mit der freien Atmosphäre in Verbindung steht.

Fig. 46.



Späterer Untersuchung mag es vorbehalten bleiben, anzugeben, welchen Einfluss es auf die Leistung der Dampfmaschinen hat, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt werden.

Es sei (Fig. 46) A der Dampfkessel, in welchem ein Druck p_2 und die Temperatur t_2 herrscht; B der Dampfcylinder, C der Condensator, in welchem Dampf und Wasser unter dem Drucke p_1 und der Temperatur t_1 steht: endlich sei D die Luft- und Warmwasserpumpe, die ich zugleich als Speisepumpe thätig sein lasse; dieselbe soll dem Condensator den condensirten Dampf entziehen und in den Kessel A zurückpressen. An der Seite des Cylinders B

ist das dieser Maschine entsprechende Indicatordiagramm dargestellt, welches nichts Anderes, als den Kreisprozess angiebt.

Der Kolben stehe oben, und oberhalb desselben trete frischer Dampf ein: die Ordinate Oo repräsentirt den Volldruck p_2, der constant bleibt, während der Kolben den Raum V_1 beschreibt; nun beginne die Expansion und werde gerade soweit fortgesetzt, bis das Dampfvolumen von V_1 auf V gewachsen und der Druck von p_2 auf p_1 gesunken ist. Beim Aufgang des Kolbens wird dann dieser Dampf mit constantem Druck p_1 in den Condensator oder in die freie Atmosphäre geschoben; im letztern Falle, bei den Maschinen ohne Condensation, können wir den freien Raum wie einen Condensatorraum betrachten, in welchem der Atmosphärendruck herrscht und die Condensation des Dampfes bei der Temperatur $t_1 = 100^0$ C. stattfindet.

Die Arbeit, welche der Dampf hierbei pro Kolbenschub verrichtet hat, wird durch die schraffirte Fläche $a o x_2 x_1 a$ dargestellt, deren Inhalt leicht ermittelt werden kann. Nehme ich an, pro Kolbenschub treten M Kilogr. Dampf und Wasser vom Kessel nach dem Cylinder, und die spezifische Dampfmenge sei x_2, also das Dampfgewicht Mx_2 und das Wassergewicht $M(1-x_2)$, so ist das Volumen des Gemisches bei Beginn der Expansion

$$V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma) \tag{366}$$

und die Arbeit in der Volldruckzeit:

$$L' = Mp_2 (x_2 u_2 + \sigma) \tag{367}$$

Die Expansion findet nun nach der adiabatischen Curve statt und die Expansionsarbeit L'' ist dann nach Gl. (247) S. 330

$$L'' = \frac{M}{A} (q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_1 \varrho_1) \tag{368}$$

Endlich ist die Dampfgegenarbeit L''', da das Endvolumen

$$V = M(x_1 u_1 + \sigma) \tag{369}$$

ist, ohne Weiteres zu setzen:

$$L''' = Mp_1 (x_1 u_1 + \sigma) \tag{370}$$

in welchen Formeln x_1 die spezifische Dampfmenge am Ende der Expansion ist.

Hiernach findet sich leicht das entsprechende Expansions-

verhältniss $V_1 : V$ und die ganze gewonnene Arbeit L pro Kolbenschub in Wärmeeinheiten gemessen folgt:

$$AL = A(L' + L'' - L''')$$

oder die angegebenen Werthe substituirt und dabei die bekannte Beziehung $r = \varrho + Apu$ benutzt, wenn r wie früher die Verdampfungswärme darstellt (S. 267):

$$AL = M[q_2 - q_1 + r_2 x_2 - r_1 x_1 + A\sigma(p_2 - p_1)] \qquad (371)$$

Aus dieser Gleichung ist nun noch der Werth x_1, da er direct nicht gegeben ist, wegzuschaffen und das geschieht leicht nach der bei Untersuchung der adiabatischen Curve S. 322 angegebenen Gl. (243) nämlich:

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2 = \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 \qquad (372)$$

Wir erhalten dann für die Arbeit des Dampfes pro Schub die Gleichung:

$$AL = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1) + A\sigma(p_2 - p_1)\right] \qquad (373)$$

und diese Gleichung lässt sich als die Hauptgleichung für die wirklich ausgeführten Dampfmaschinen hinstellen, sie giebt die Arbeit pro Schub, die man unter den günstigsten Verhältnissen von einer Dampfmaschine erzielen kann, wenn ihre Anordnung der gebräuchlichen Ausführung entspricht.

Ehe die Entwickelungen fortgesetzt werden, will ich zunächst auf ein sonderbares Resultat aufmerksam machen. Der Werth in der Klammer der Gl. (373) ist vollkommen identisch mit Gl. (337), die ich auf S. 411 bei Untersuchung des Ausflusses der Dampf- und Flüssigkeitsmischungen aus Gefässmündungen gefunden habe; man hat nur die Indices zu vertauschen, denn dort wurden, umgekehrt gegen die hier verwendete Bezeichnung, die Werthe, welche dem höhern Drucke entsprechen, mit dem Index 1 und die des untern Druckes mit dem Index 2 versehen. Die Verbindung beider Gleichungen giebt die eigenthümliche Relation:

$$L = M\frac{w^2}{2g}$$

Würden wir sonach beispielsweise aus dem Dampfkessel einer Dampfmaschine ohne Condensation die M Kilogr. Dampf- und Flüssigkeitsmischung direct in die freie Atmosphäre strömen lassen, so würde dieser Masse in Form von lebendiger Kraft genau dieselbe Arbeit innewohnen, die man unter den günstigsten Verhältnissen an der Dampfmaschine gewinnen könnte.

Dieser Satz könnte mir das Mittel an die Hand geben, den Werth und die Bedeutung solcher Umtriebsmaschinen (Dampf-Reactionsräder, Dampfturbinen) näher zu untersuchen, bei denen man in Bewegung befindliche, d. h. ausströmende Dampf- und Flüssigkeitsmischungen als Motor verwenden wollte, ein Gedanke, der schon oft und wiederholt verfolgt worden ist. Ich unterlasse jedoch, als dem Zwecke dieser Schrift fern liegend, hier eine weitere Verwerthung des angegebenen Satzes.

Die Gl. (373) liesse sich nun leicht, auf dieselbe Weise, wie das auf S. 416 mit der Ausflussformel geschehen ist, durch einfachere Näherungsformeln ersetzen, was jedoch zunächst unterbleiben mag.

Die genannte Gleichung würde die Arbeit geben, welche durch die Dampfmaschine pro Schub oder wenn das Gewicht M der Mischung auf die Sekunde bezogen wird, welche die Maschine pro Sekunde im günstigsten Falle abgeben würde, wenn überdies auch keine Reibungswiderstände vorhanden wären und das Zurückführen des Wassers in den Kessel, d. h. die Speisung keine Arbeit fordern würde.

Die zuletzt angedeutete Frage mag nun zunächst erörtert werden, indem wir die Arbeit der Kesselspeisung bestimmen und von dem Werthe L der Gl. (373) noch in Abzug bringen wollen. Wir haben hier die Maschine mit und ohne Condensation zu unterscheiden und überdies auch auf die Art und Weise der Kesselspeisung, ob sie mit einer Pumpe oder mittelst des Injectors geschieht, Rücksicht zu nehmen.

a) Arbeit der Speisung bei Maschinen mit Condensation.

α) Beim Oberflächencondensator.

Hier geschieht die Speisung mit der Speisepumpe D (Fig. 46). Diese Pumpe hat, wie sich auf S. 384 ergeben hat, hier nur die Aufgabe aus dem Condensator C die Masse M, welche in gewisser

Zeit aus dem Dampfcylinder kommend im Condensator vollkommen condensirt wurde, anzusaugen und in den Kessel zu pressen. Ist die Pumpe einfach wirkend, so saugt der Kolben im Pumpencylinder D beim Aufgang das Wasservolumen $M\sigma$ an, wobei die Arbeit $M\sigma p_1$ gewonnen wird und beim Niedergang wird diese Masse in den Kessel gedrückt, wobei die Arbeit $M\sigma p_2$ aufzuwenden ist. Die Arbeit, welche dem Drucke der äussern Atmosphäre entspricht, kommt hier nicht ins Spiel.

Hiernach fordert die Speisung die Arbeit

$$L^{IV} = M\sigma\,(p_2 - p_1)$$

Bringe ich diesen Werth in Gl. (373) zum Abzug, so folgt für eine solche Dampfmaschine die Arbeit im günstigsten Falle:

$$A L = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}\,(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1\,(\tau_2 - \tau_1)\right] \qquad (374)$$

β) Beim Einspritzcondensator.

Hier hat die Pumpe D (Fig. 46) nicht nur die Aufgabe, die Masse M, sondern auch die derselben entsprechende Einspritzwassermenge M_0 dem Condensator zu entziehen (vergl. S. 388); nenne ich den äussern Atmosphärendruck p_0, so ist die Arbeit, welche beim Aufgange des Kolbens, d. h. beim Saugen gewonnen wird:

$$(M + M_0)\,\sigma\,(p_1 - p_0)$$

Beim Niedergange des Kolbens ist, wenn ich die Pumpe als Speise- und Warmwasserpumpe zugleich benutze, das Flüssigkeitsvolumen $M\sigma$ in den Kessel zu pressen, das erfordert die Arbeit:

$$M\sigma\,(p_2 - p_0)$$

Den übrigen Theil des Flüssigkeitsvolumen $M_0\sigma$ ergiesst die Pumpe in's Freie, was keine Arbeit fordert.

Hiernach ist die Arbeit der Speisung:

$$L^{IV} = M\sigma\,(p_2 - p_0) - (M + M_0)\,\sigma\,(p_1 - p_0) \text{ oder}$$
$$= M\sigma\,(p_2 - p_1) + M_0\sigma\,(p_0 - p_1)$$

Diese Formel ist freilich nicht genau, da die Pumpe auch die Luft des Einspritzwassers zugleich dem Condensator zu entziehen hat; die gefundene Arbeit wird etwas zu klein sein; jedenfalls kann man aber den entsprechenden Mehrbetrag an Arbeit als sehr klein vernachlässigen.

Subtrahirt man jetzt die Arbeit, welche hier die Speisung erfordert, auf der rechten Seite der Gl. (373), so folgt die Arbeit der Dampfmaschine im vorliegenden Fall:

$$A L = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right] - A M_0 \sigma (p_2 - p_1)$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist aber in Wirklichkeit immer so klein, dass man es ohne Bedenken vernachlässigen kann, und man erhält dann für vorliegenden Fall dieselbe Formel (374), welche sich für die Maschinen mit Oberflächencondensator ergeben hat.

b) Arbeit der Speisung bei Maschinen ohne Condensation.

α) Bei Anwendung der Speisepumpe.

Die Arbeit, welche hier die Speisepumpe absorbirt, haben wir schon auf S. 401 ermittelt; nehmen wir wieder an, die Pumpe müsste das Wasser zunächst auf die Höhe h heben, so ist die Arbeit, welche die Speisung erfordert, wenn p_0 der Atmosphärendruck ist:

$$L^{IV} = M h + M \sigma (p_2 - p_0)$$

Bringen wir diesen Werth auf der rechten der Gl. (373) in Abzug, so folgt die Arbeit der Dampfmaschine

$$A L = M\left[\frac{x_2 r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1) - A h\right]$$

weil hier der Atmosphärendruck p_0 mit dem Drucke p_1 identisch ist.

Nun ist hier wieder das Glied Ah in allen praktischen Fällen so klein, dass es jederzeit weggelassen werden kann und wir sonach auch hier wieder auf die letzte Formel (374) kommen.

β) Bei Anwendung des Giffard'schen Injectors.

Der Injector erfordert keine Arbeit von Seiten der Maschine, daher gilt für eine solche Dampfmaschine ohne Weiteres die Gl. (373), in welcher aber jederzeit das Glied $A\sigma(p_2 - p_1)$ als sehr klein vernachlässigt werden darf.

Wir kommen daher zu dem wichtigen Resultate, dass für alle die angenommenen Fälle, mag die Maschine mit oder ohne Condensation arbeiten, mag die Speisung mit der Pumpe oder

mit dem Injector erfolgen, immer die gleiche Formel zur Berechnung der Dampfarbeit, nämlich:

$$A L = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1 (\tau_2 - \tau_1)\right] \quad (374)$$

in Anwendung zu bringen ist, vorausgesetzt es handle sich um Ermittlung der Arbeit der Maschine unter den **günstigsten** Annahmen, die vorhin auf S. 451 näher bezeichnet wurden.

Es soll nun diese Dampfmaschine mit einer vollkommenen Maschine verglichen werden. Zu diesem Zwecke ist zunächst die Wärmemenge Q zu ermitteln, welche dem Dampfkessel pro Kolbenschub oder pro Sekunde mitzutheilen ist, je nachdem das Dampf- und Flüssigkeitsgewicht M pro Kolbenschub oder pro Sekunde gerechnet wird. Diese Bestimmung bietet aber keinerlei Schwierigkeit, wir haben nur zunächst zu unterscheiden, ob die Maschine mit oder ohne Condensation arbeitet.

Bei den Maschinen **mit** Condensation wird pro Schub die Dampfmenge $M x_2$ erzeugt und das erfordert die Wärmemenge $M x_2 r_2$; die Speisepumpe liefert dann das Wassergewicht M mit der Condensatortemperatur t_1 in den Kessel zurück, wo es durch Wärmemittheilung wieder auf die Kesseltemperatur t_2 zu bringen ist und das erfordert eine Wärmemenge $M(q_2 - q_1)$: hiernach ist die ganze Wärmemenge, die pro Kolbenschub dem Kessel zuzuführen ist:

$$Q_2 = M\left[x_2 r_2 + q_2 - q_1\right]$$

Bei den Maschinen **ohne** Condensation haben wir zu unterscheiden, ob die Speisung mit der Speisepumpe oder mit dem Injector erfolgt.

Bei der Speisung mit der Pumpe werden die M Kilogramm Wasser mit einer Temperatur t_0 in den Kessel geführt, welche im Allgemeinen tiefer ist, als die dem Gegendrucke p_1 entsprechende Dampftemperatur t_1 (100° C.). Im Kessel erfordert diese Wassermenge zur Erwärmung auf die Temperatur t_2 die Wärmemenge $M(q_2 - q_0)$ und dann zur Verdampfung $M x_2 r_2$; also ist bei einer solchen Dampfmaschine die ganze Wärmemenge, welche pro Kolbenschub in den Kessel treten muss

$$Q_2 = M\left[x_2 r_2 + q_2 - q_0\right]$$

Findet dagegen die Speisung mit dem Injector statt, so ist

die Wärmemenge Q_1, die der Injector allein fordert, nach Gl. (326) S. 400, wenn man die hier neu eingeführte Bezeichnung benutzt

$$Q_1 = M\left[\,q_2 - q_0 + A\,(h + \sigma\ p_2 - p_0\ )\right]$$

in welcher Formel h die Saughöhe darstellt. Die Verdampfung verlangt aber auch hier, wie vorhin, die Wärmemenge $M_2 x_2$: die Vereinigung beider Werthe würde dann die Gesammtwärme Q_2 ergeben. Man kann nun aber bei der Vereinigung ganz wohl das Glied $A\,[h + \sigma\ p_2 - p_0\,]$ als sehr klein, gegen die übrigen Glieder vernachlässigen und erhält daher für die Gesammtwärme Q_2, die, einen Giffard'schen Injector als Speiseapparat vorausgesetzt, dem Kessel pro Kolbenschub mitzutheilen ist, dieselbe Gleichung, die sich vorhin unter der Voraussetzung ergab, dass die Speisung durch eine Pumpe erfolgt.

Da nun auch die Gl. (374), welche unter den günstigsten Voraussetzungen die Arbeit einer gewöhnlichen Dampfmaschine angiebt, unverändert bleibt, mag die Speisung mit der Pumpe oder dem Injector erfolgen, so bin ich berechtigt, den Satz wiederholt auszusprechen, den ich schon auf S. 402 aufgestellt habe, dass theoretisch genommen, keiner der beiden Speiseapparate einen Vorzug vor dem andern hat, dass man aber der Praxis unbedingt die ausgedehnteste Anwendung des Injectors statt der Pumpen empfehlen muss, weil sich dieser nahezu, wie eine ohne Reibung arbeitende Pumpe verhält: ohne allen Zweifel sind bei ihm die schädlichen Widerstände (vorausgesetzt, dass keine Dampf- und Wasserverluste stattfinden) kleiner, als bei der Speisepumpe, besonders wenn deren Pumpenkolben durch ein Excenter (seine Bewegung erhält.

Aus den vorstehenden Untersuchungen geht nun hervor, dass wir für alle Dampfmaschinen zur Berechnung der Wärmemenge Q_2, welche pro Kolbenschub oder wenn sich der Werth M auf die Sekunde bezieht, welche pro Sekunde in den Kessel zu führen ist, die Gleichung

$$Q_2 = M\left[\,x_2 r_2 + q_2 - q_0\,\right] \qquad (375)$$

anzuwenden haben: man hat in derselben nur einfach q_1 statt q_0 zu setzen, wenn die Maschine mit Condensation arbeitet, weil in diesem Falle die Temperatur t_0 des Speisewassers mit der Temperatur t_1 identisch wird, welche dem Dampfgegendrucke und

Condensatordrucke p_1 entspricht. Diese Formel erleidet nur eine Veränderung, wenn die Maschine einen schädlichen Raum besitzt, ein Fall, den wir erst später der Betrachtung unterwerfen werden.

Würden wir nun an den Dampfmaschinen, die durch Gl. (375) gegebene Wärmemenge richtig verwerthen, d. h. den vollkommenen in Fig. 43 S. 429 dargestellten Kreisprozess ausführen, so würden wir auch die grösste, überhaupt zu gewinnende Arbeit von der Maschine erhalten und dieser Maximalwerth L_m der Arbeit, d. h. die disponible Arbeit einer Dampfmaschine (ohne schädlichen Raum) findet sich, wenn man in die oben gegebene Formel (S. 431)

$$L_m = \frac{Q_2}{A\,T_2}\,(T_2 - T_1)$$

den Werth Q_2 substituirt:

$$L_m = \frac{M[x_2 r_2 + q_2 - q_0]}{A\,T_2} \cdot (T_2 - T_1) \qquad (376)$$

Nach dieser Formel berechnet sich nun mit grösster Leichtigkeit für jede Dampfmaschine die disponible Arbeit: sie schreibt sich auch in folgender Form:

$$A\,L_m = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}\,(T_2 - T_1) + \frac{(q_2 - q_0)\,(T_2 - T_1)}{T_2}\right] \qquad (377)$$

und in dieser Form ist die Gleichung besonders geeignet, Vergleiche zwischen einer theoretisch vollkommenen Dampfmaschine und einer wirklich ausgeführten, aber unter den günstigsten Annahmen (s. S. 451) arbeitenden Dampfmaschine anzustellen; wir haben zu diesem Zwecke nur die Gl. (374) herbeizuziehen, welche die Maximalarbeit für den an Dampfmaschinen in Wirklichkeit stattfindenden Kreisprozess giebt.

Subtrahirt man Gl. (374) von der letzten Formel, so erhält man in dem Werthe $L_m - L$, welcher Werth mit L_1 bezeichnet werden mag, den Arbeitsverlust, welcher aus der Unvollkommenheit des Kreisprozesses unserer Dampfmaschinen entspringt, und zwar ergiebt sich dieser Arbeitsverlust nach einigen einfachen Reductionen:

$$L_1 = \frac{M}{A\,T_2}\left[(q_2 - q_0)\,(T_2 - T_1) + T_1 T_2\,(\tau_2 - \tau_1) - T_2\,(q_2 - q_1)\right] \qquad (378)$$

in welchen Gleichungen, wie schon erwähnt bei Maschinen mit Condensation. $q_1 = q_0$ zu setzen ist.

Dividire ich endlich diesen Ausdruck durch die disponible Arbeit nach Gl. (376), so ergiebt sich der Effectverlust, welcher der Unvollkommenheit des Prozesses der wirklichen Dampfmaschinen entspricht und der mit ζ_1 bezeichnet werden mag:

$$\zeta_1 = \frac{(q_2 - q_0)(T_2 - T_1) + T_1 T_2 (\tau_2 - \tau_1) - T_2 (q_2 - q_1)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)(T_2 - T_1)} \tag{379}$$

Speziell für Wasserdampf schreiben sich diese beiden Gleichungen genau genug weit einfacher. Setzen wir nämlich die spezifische Wärme c des Wassers im Mittel constant, so ist

$$q_2 - q_0 = c (T_2 - T_0) \text{ und } q_2 - q_1 = c (T_2 - T_1)$$

Man erhält dann

$$(q_2 - q_0)(T_2 - T_1) - T_2 (q_2 - q_1) = - c T_0 (T_2 - T_1) = - T_0 (q_2 - q_1)$$

Daher folgt einfacher der Arbeitsverlust:

$$L_1 = \frac{M}{A T_2} [T_1 T_2 (\tau_2 - \tau_1) - T_0 (q_2 - q_1)] \tag{380}$$

und der Effectverlust:

$$\zeta_1 = \frac{T_1 T_2 (\tau_2 - \tau_1) - T_0 (q_2 - q_1)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)(T_2 - T_1)} \tag{381}$$

und in dieser Form sollen die Gleichungen im Weitern verwendet werden.

Für geringe Temperaturdifferenzen würde sich überdies schreiben (s. S. 322)

$$\tau_2 - \tau_1 = c \text{ logn. } \frac{T_2}{T_1} = \frac{c (T_2 - T_1)}{T_1}$$

sowie

$$q_2 - q_1 = c (T_2 - T_1)$$

dann folgt der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses:

$$\zeta_1 = \frac{c (T_2 - T_0)}{x_2 r_2 + q_2 - q_0} = \frac{q_2 - q_0}{x_2 r_2 + q_2 - q_0}$$

und das ist dieselbe Gl. (328), welche ich schon bei Betrachtung

der Wirkung des Giffard'schen Injectors auf S. 403 gegeben habe. Jetzt erst tritt die wahre Bedeutung der dort angegebenen Zahlenwerthe hervor und es zeigt sich, wie dort schon vorher bemerkt wurde, dass die für r_i gefundenen Zahlenwerthe nicht als Maass für die Wirksamkeit des Speiseapparats angesehen werden können, sondern dass sie sich, wie aus Vorstehenden hervorgeht, auf den Prozess der Dampfmaschine selbst beziehen. Uebrigens ist die dort aufgestellte Formel (328) auch nur für geringe Temperaturdifferenzen anwendbar.

Ich habe vorhin den Arbeitsverlust L_1 und den entsprechenden Effectverlust ζ_1 als denjenigen bezeichnet, welcher der Unvollkommenheit des Kreisprozesses unserer wirklichen Dampfmaschinen entspricht und werde ihn auch im Weitern so benennen. Es kommen zwar an den Dampfmaschinen noch eine ganze Reihe anderer Verluste vor, die wir auch näher bestimmen werden, doch sind das alles keine Verluste, die der Unvollkommenheit des Prozesses entspringen, alle diese Verluste lassen sich durch constructive Aenderungen herabziehen. Nicht so ist es mit dem Verluste L_1, dieser entspringt aus einer prinzipiell unrichtigen Art und Weise der Ausnutzung des Dampfes und es wird sich daher fragen, ob in Wirklickeit dieser Verlust so gross ist, dass man daran denken müsste, den Prozess in unsern Dampfmaschinen abzuändern und zwar der Art, dass man sich mehr dem vollkommenen Kreisprozesse nähert: ferner wird man dann die Frage aufzuwerfen haben, welcher Theil des wirklichen Prozesses fehlerhaft ist und ob sich derselbe verbessern lässt. Der Fehler des wirklichen Prozesses ist leicht zu erkennen.

Fig. 47.

Legt man durch den Punkt o (Fig. 47) der Diagrammfläche die adiabatische Curve ob, entsprechend der Annahme, dass anfänglich nur M Kilogr. Wasser von der Temperatur t_2 vorhanden

sind, so erkennt man sogleich, dass der wirkliche Kreisprozess unserer Dampfmaschinen sich in zwei Prozesse zerlegen lässt: der eine Theil entspricht der Fläche $o x_2 x_1 b$ und dieser Theil ist vollkommen; der andere Theil ist durch die Fläche $a o b$ dargestellt und dieser Theil des Prozesses enthält die ganze Unvollkommenheit. Diese Trennung geht auch aus der Formel (374) direct hervor; das erste Glied in der Klammer entspricht einer vollkommenen Dampfmaschine (vergl. Gl. 351 S. 431) die andern beiden Glieder $[q_2 - q_1 - T_1 (\tau_2 - \tau_1)]$ entsprechen dem unvollkommenen Theile. Ich kann daher eine unter den günstigsten Annahmen arbeitende Dampfmaschine wie eine Verbindung von zwei Dampfmaschinen ansehen: die eine derselben arbeitet theoretisch vollkommen, die andre aber nicht: diese führt einen eigenthümlichen Prozess aus, der eben durch den Theil $o b a$ der Indicatorfläche dargestellt wird. Man lässt bei dieser zweiten Maschine M Kilogr. Wasser von der Temperatur t_2 vom Drucke p_2 auf den Druck p_1 expandiren, das giebt an Arbeit nach Gl. (247) S. 330, weil die anfängliche Dampfmenge o ist

$$A L' = (q_2 - q_1 - x \varrho_1) M$$

Dabei bedeutet x die spezifische Dampfmenge im Zustande b (Fig. 47), die sich aber aus Gl. (243) S. 322 bestimmt; man erhält die Beziehung:

$$\frac{x r_1}{T_1} = \tau_2 - \tau_1$$

Nun wird die Masse bei constantem Drucke p_1 und constanter Temperatur t_1 (auf der Linie $b a$) comprimirt, bis aller Dampf wieder in Wasser verwandelt ist; die aufzuwendende Arbeit ist hier

$$L'' = M x p_1 u_1$$

Schliesslich wird das Wasser von der Temperatur t_1 unter entsprechender Druckzunahme wieder auf t_2 erwärmt und zwar ohne Dampfbildung, d. h. bei constantem Volumen. Jetzt ist dieser Prozess vollendet und die gewonnene Arbeit findet sich unter Benutzung vorstehender Formeln und durch entsprechende Verbindung derselben:

$$A (L' - L'') = M [q_2 - q_1 - T_1 (\tau_2 - \tau_1)]$$

wie sich auf Grund von Gl. (374) nach obigen Bemerkungen erwarten liess.

Aus Allem ist der Schluss zu ziehen, dass die eine Hälfte des Prozesses unserer Dampfmaschinen, die Volldruck- und Expansionswirkung, überhaupt die Dampfbenutzung vor dem Kolben, richtig und keiner Verbesserung fähig ist, dass aber das Fehlerhafte in der Dampfausnutzung, in den Vorgängen hinter dem Kolben zu suchen ist: wir sollten den Dampf nicht mit constantem Drucke in einen Condensatorraum oder in die freie Atmosphäre schieben; dieser Theil des Vorganges an den ausgeführten Dampfmaschinen erscheint jetzt als eine Krafttödtung.

Ehe man aber nach dieser Richtung sich zum Nachdenken anschickt, wie dieser prinzipielle Fehler zu beseitigen wäre, ist es zweckmässig, zunächst zu untersuchen, ob der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses wirklich so gross ist, dass man vor allen Dingen an eine Beseitigung oder eine Mässigung dieses Verlustes denken müsste.

Die Frage mag an speziellen Beispielen behandelt werden.

Denken wir uns, eine Dampfmaschine ohne Condensation arbeitet mit Dampf von $p_2 = 5$ Atmosphären Druck und zwar mit reinem Dampf, ohne Beimischung von Wasser, es sei also $x_2 = 1$.

Hier ist nach unseren Tabellen (S. 316) und Tab. 10 entsprechend einem Drucke von

5 Atmosphären	1 Atmosphäre
$t_2 = 152.22$	$t_1 = 100.00$
$q_2 = 153,741$.	$q_1 = 100,500$
$\tau_2 = 0,44713$	$\tau_1 = 0.31356$
$r_2 = 499,184$	

Dann ergiebt Gl. (374) die Arbeit der M Kilogr. Dampf unter den günstigsten Annahmen, die Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$AL = 64.747\ M$$

Wird der Kessel dieser Maschine durch eine Speisepumpe oder einen Injector mit Wasser von $t_0 = 15^0$ Temperatur gespeist, so ist (Tab. 1b) $q_0 = 15,005$ und nach Gl. (376) die disponible Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$AL_m = 78.341\ M$$

und hieraus folgt der Arbeitsverlust dieser Maschine in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses

$$AL_1 = A\,(L_m - L) = 13,594\ M$$

und hieraus der entsprechende Effectverlust:

$$\zeta_1 = \frac{L_1}{L_m} = 0,1735$$

Die Näherungsformel (381) giebt für denselben Fall direct $\zeta_1 = 0,1747$.

Wir hätten hiernach bei dieser Maschine in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses allein einen Verlust von 17,4 Prozent der disponiblen Arbeit und dieser Verlust ist so gross, dass man auf Aenderung bedacht sein sollte. Eine genauere Betrachtung der Gl. (381) zeigt nun aber, dass dieser Verlust nur deshalb so gross ausfällt, weil die Temperatur t_0 des Speisewassers sehr niedrig (nur zu 15°) angenommen wurde. Denken wir uns dagegen, das Speisewasser werde **vorgewärmt** und zwar durch die abziehenden Gase, durch welche die entsprechende Wärme ohnehin verloren wäre, so stellt sich das Resultat wesentlich günstiger; denn nehmen wir an, das Vorwärmen geschähe bis zu einer Temperatur von $t_0 = 80^0$ und 100^0 C., so giebt die Formel (381) für den Effectverlust beziehungsweise, 0,0789 und 0,0449, dieser Verlust wird also bedeutend herabgezogen. Die Formel enthält übrigens auch den Werth x_2, die spezifische Dampfmenge in der Dampf- und Flüssigkeitsmischung, welche dem Cylinder zugeführt wird. Wir haben vorhin $x_2 = 1$ gesetzt.

Dampfmaschine mit Conden-

Druck im Kessel in Atmosphären.		$1^1/_2$
Arbeit für ein Kilogr. Dampf in Wärmeeinheiten (Gl. 374)	$AL =$	95.953
Disponible Arbeit in Wärmeeinheiten (Gl. 376)	$AL_m =$	101.222
Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses	$\zeta_1 =$	0.0521

Dampfmaschine ohne Conden-

Druck im Kessel in Atmosphären.			$1^1/_2$
Arbeit für ein Kilogr. Dampf in Wärmeeinheiten (Gl. 374)		$AL =$	16.302
Disponible Arbeit in Wärmeeinheiten (Gl. 376) (Temperatur des Speisewassers $t_0 = 15^0$)		$AL_m =$	19.060
Effectverlust in Folge der Unvoll-	$t_0 = 15^0$	$\zeta_1 =$	0.1400
kommenheit des Prozesses	$t_0 = 100^0$	$\zeta_1 =$	0.0117

d. h. reinen Dampf ohne Beimischung von Wasser vorausgesetzt; nehmen wir aber 10% oder 20% mechanisch beigemengtes Wasser an, setzen wir also noch $x_2 = 0.90$ oder $x_2 = 0,80$, so ergeben sich diejenigen Werthe für den Effectverlust ζ_1 für die hier angenommene Maschine, welche folgende Zusammenstellung angiebt:

Temperatur des Speisewassers		$t_0 = 15^0$	80^0	100^0
Spezifische Dampfmenge	$x_2 = 1$	$\zeta_1 = 0,174$	0,079	0,045
	$= 0,90$	$\zeta_1 = 0,189$	0,086	0,049
	$= 0.80$	$\zeta_1 = 0.207$	0,096	0,055

Diese kleine Uebersicht zeigt zunächst für die angenommene Maschine recht deutlich, welchen Einfluss das Vorwärmen des Speisewassers auf unsern Effectverlust hat: das Vorwärmen zieht den Effectverlust so sehr herab, dass bei Maschinen ohne Condensation das vorherige Erwärmen des Speisewassers entschieden zu empfehlen ist. Man erkennt ferner, dass der Wassergehalt des Dampfes den Effectverlust erhöht, aber verhältnissmässig unbedeutend und nicht so sehr, als man bis jetzt anzunehmen geneigt war.

Um einen allgemeinern Einblick in die hier angeregte Frage zu geben, habe ich die folgenden beiden kleinen Tabellen be-

…tion Condensatordruck: 0,1 Atmosphäre.

3	4	5	6	8	10
…0.785	131.134	139.236	145.755	156.198	164.351
…9.544	141.675	151.240	159.173	171.908	181.993
0.0675	0.0744	0.0794	0.0843	0.0914	0.0969

…tion Gegendruck: 1 Atmosphäre.

3	4	5	6	8	10
…4.204	55.779	64.747	72.082	83.646	92.629
….696	67.046	78.341	87.696	102.685	114.534
….1612	0.1681	0.1735	0.1781	0.1854	0.1913
….0311	0.0396	0.0465	0.0522	0.0615	0.0688

rechnet, deren Entstehungs- und Beurtheilungsweise aus der Berechnung des im Vorstehenden behandelten Beispieles ohne Weiteres hervorgeht. Zu bemerken ist nur, dass bei der Berechnung trockner, gesättigter Dampf vorausgesetzt wurde.

Die Resultate dieser Tabellen sind für den Mechaniker sehr erfreulich und bestätigen glücklicher Weise keineswegs die Annahme Redtenbacher's, dass der Prozess unserer Dampfmaschine ein höchst unvollkommener sei, dass eine Vervollkommnung der Dampfmaschine nur durch eine ganz neue und veränderte Gestalt der Maschine und andere Art und Weise der Benutzung des Dampfes erzielt werden könne und dass bis dahin jede rein constructive Verbesserung der Dampfmaschine verhältnissmässig wenig Werth habe. Diese Tabellen sprechen sich in ganz anderer Weise aus; der Effectverlust, welcher aus der Unvollkommenheit des Prozesses der wirklichen Dampfmaschine entspringt, aus dem Umstande, dass dieselben nicht einen Kreisprozess beschreiben, den die mechanische Wärmetheorie für eine vollkommene Dampfmaschine verlangt, ist unbedeutend. Bei Niederdruckmaschinen mit Condensation stellt es sich auf 5 bis 6%, und bei Mitteldruckmaschinen mit Condensation auf 6 bis 8% der disponibeln Arbeit. Bei Maschinen ohne Condensation stellt sich dieser Verlust nur dann bedeutend grösser heraus, wenn der Kessel mit kaltem Wasser gespeist wird; findet hingegen ein Vorwärmen statt, was immer leicht zu bewerkstelligen ist, so geht dieser Effectverlust noch unter den der Maschinen mit Condensation herab.

Auf die Resultate dieser Rechnungen stützte ich mich, als ich früher (S. 228) von einer Ehrenrettung der Dampfmaschine gesprochen habe. So lange die Fundamentalsätze der mechanischen Wärmetheorie als richtig bestehen bleiben, so lange können wir den Kreisprozess unserer Dampfmaschinen als einen sehr vollkommenen ansehen, und wenn an diesen Maschinen keine Arbeitsverluste auftreten würden, die grösser sind als derjenige welcher der eigentlichen Unvollkommenheit des Prozesses entspringt, könnten wir ruhig von der Verfolgung des Gedankens einer Verbesserung der Dampfmaschinen absehen, wenigstens derjenigen Dampfmaschinen, die mit gesättigten Dampf arbeiten.

Beurtheilung ausgeführter Dampfmaschinen.

a) *Dampfmaschine* ohne *schädlichen Raum.*

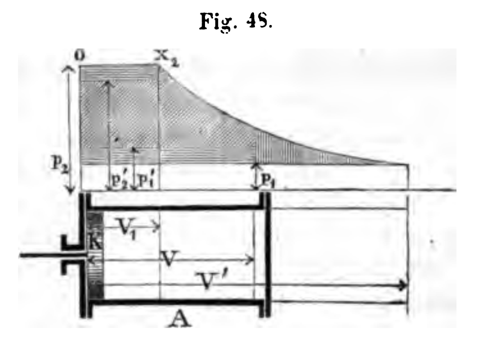
Die vorstehenden Untersuchungen hatten den Zweck, zunächst die im Wesen unserer Dampfmaschinen selbst begründete Unvollkommenheit zu ermitteln, indem wir den Prozess, den die Dampfmaschinen in Wirklichkeit unter den günstigsten Umständen ausführen, mit dem einer theoretisch vollkommenen Maschine verglichen.

Der Arbeits- und Effectverlust, der der eigentlichen Unvollkommenheit des Prozesses entspricht, ist nun nicht der einzige, der an wirklichen Dampfmaschinen auftritt; man hat bei einer gründlichen Beurtheilung derselben noch andere Unvollkommenheiten in Betracht zu ziehen, wenn man sich ein vollständiges Urtheil über den wahren Werth der wirklich ausgeführten Maschinen bilden will.

Wir denken uns zunächst eine ausgeführte Dampfmaschine, vernachlässigen aber vorerst den Einfluss des schädlichen Raumes.

Es sei A (Fig. 48) der Dampfcylinder einer doppelt wirkenden Dampfmaschine: M das Gewicht von Dampf und Wasser, welches pro Kolbenschub mit dem Kesseldruck p_2 und der Temperatur t_2 in den Cylinder tritt und x_2 sei die spezifische Dampfmenge, also $(1 - x_2)$ die

Fig. 48.



Wassermenge, welche der Gewichtseinheit der vom Kessel herbeikommenden Masse beiwohnt. Wir wollen ferner zuerst noch voraussetzen, dass während des Dampfeintrittes im Cylinder derselbe Druck, wie im Kessel herrscht und dass ebenso der Druck p_1 hinter dem Kolben identisch mit dem Condensatordruck resp. mit dem der äussern Atmosphäre sei.

Ist nun V_1 das Volumen, welches der Kolben während des Dampfeintrittes beschreibt, so gilt zuerst die Beziehung:

$$V_1 = M (x_2 u_2 + \sigma)$$

und hieraus lässt sich die Masse M pro Kolbenschub ermitteln: ist dann n die Anzahl der Umdrehungen der Kurbelwelle pro Minute, so findet sich das Gewicht der Mischung, welches in der Sekunde der Maschine zugeführt wird:

$$\frac{2n}{60} M$$

Setzen wir nun diesen Werth oder einfach M in die Gl. (376) S. 459 ein, so findet sich die disponible Arbeit der vorliegenden Maschine pro Sekunde oder im andern Falle pro Kolbenschub. Im erstern Falle hätten wir den Werth durch 75 zu dividiren, wenn die disponible Arbeit in Pferdestärken angegeben werden sollte.

Die Arbeit während des Dampfeintrittes ist nun einfach $V_1 p_2$: hierzu wäre, wenn wir zunächst die Vorderarbeit des Dampfes pro Kolbenschub ermitteln wollen, die Arbeit, welche der Expansionswirkung des Dampfes entspricht, zu addiren. Würde die Expansion so weit stattfinden, bis der Druck auf den Werth p_1 herabgegangen ist, so hätten wir einfach hier von Gl. (368) S. 452 Gebrauch zu machen. Eine so weit gehende Expansion kommt aber in den seltensten Fällen vor, am wenigsten bei Condensationsmaschinen, und hierin liegt, theoretisch genommen, ein Arbeitsverlust, den wir zunächst ermitteln werden, und den wir den **Arbeitsverlust resp. Effectverlust in Folge der unvollständigen Expansion nennen werden.**

Wäre die Expansion vollkommen, so müsste nach der Bezeichnung von Fig. 48 die Ausdehnung von V_1 auf V' erfolgen, in Wirklichkeit sei aber das Volumen der Masse am Ende der Expansion nur V, welcher Werth hier identisch ist mit dem Volumen, welches der Kolben während eines ganzen Schubes beschreibt.

Die Arbeit, welche wir hier bei der Ausdehnung von V_1 auf V gewinnen, berechne ich nun unter Zugrundelegung der Rankine'schen Näherungsformel, indem ich nur den der anfänglichen Dampfmenge x_2 entsprechenden Werth des Exponenten μ (vergl. S. 340) nach meiner empirischen Formel (259) S. 342 bestimme.

Wir setzen daher

$$\mu = 1{,}035 + 0{,}100\, x_2$$

und berechnen die Expansionsarbeit nach Gl. (258) S. 341 durch den Ausdruck:

$$\frac{p_2 V_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\mu - 1}\right]$$

Das Verhältniss $V_1 : V$ ist das Expansionsverhältniss; bezeichnen wir dasselbe in Zukunft mit ε, so folgt nun für vorliegende Maschine die ganze Arbeit des Dampfes vor dem Kolben pro Schub, welche Arbeit mit L_v bezeichnet werden mag:

$$L_v = V_1 p_2 \left[1 + \frac{1}{\mu - 1}\left(1 - \varepsilon^{\mu - 1}\right)\right]$$

oder einfacher:

$$L_v = \frac{V_1 p_2}{\mu - 1}\left(\mu - \varepsilon^{\mu - 1}\right) \tag{382}$$

Die Arbeit des Dampfgegendruckes p_1 ist aber $p_1 V = \frac{V_1 p_1}{\varepsilon}$ und wenn wir diesen Werth von L_v subtrahiren, so erhalten wir die ganze Arbeit, welche unter den bis jetzt gemachten Voraussetzungen pro Kolbenschub vom Dampfe verrichtet wird und die wir mit L' bezeichnen wollen

$$L' = V_1 p_2 \left[\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon}\right] \tag{383}$$

Wäre aber die Expansion eine vollkommene, so wäre diese Arbeit nach Gl. (374) S. 455 zu beurtheilen oder wenn L_m die disponible Arbeit pro Schub ist und L_1 wie früher der Arbeitsverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses, so findet sich diese Arbeit, die oben mit L bezeichnet wurde, auch

$$L = L_m - L_1$$

Subtrahirt man von L die Arbeit L', welche durch vorstehende Gl. (383) gegeben ist und in welcher man V_1 durch $M(x_2 u_2 + \sigma)$ ersetzen kann, so folgt der Arbeitsverlust L_2 in Folge unvollständiger Expansion:

$$L_2 = L_m - L_1 - M p_2 (x_2 u_2 + \sigma)\left[\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon}\right] \tag{384}$$

und dieser Werth wird in Fig. 48 durch den vertical schraffirten Raum dargestellt.

Die disponible Arbeit L_m ist nach Gl. (376)

$$L_m = \frac{M(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{A T_2}(T_2 - T_1)$$

Durch Division folgt daher der Effectverlust $\zeta_2 = L_2 : L_m$ in Folge unvollständiger Expansion:

$$\zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \frac{A p_2 (x_2 u_2 + \sigma)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \frac{T_2}{(T_2 - T_1)} \left[\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon}\right] \quad (385)$$

wobei ζ_1 nach Gl. (381) der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses ist und in welcher Gleichung $q_0 = q_1$ zu setzen ist, wenn die Maschine mit Condensation arbeitet.

Ein weiterer dritter Arbeitsverlust entsteht nun dadurch, dass der Dampf auf seinem Wege nach dem Cylinder Widerstände zu überwinden hat und dass in Folge dessen der mittlere Druck im Cylinder vor dem Kolben während des Dampfeintrittes etwas kleiner, als der Kesseldruck p_2 ist. Dieser Druck, der mit p'_2 bezeichnet werden soll, lässt sich auf theoretischem Wege nicht ermitteln, eben so wenig, wie der wirkliche mittlere Druck p'_1 hinter dem Kolben, der immer etwas grösser als der Druck p_1 im Condensator resp. der freien Atmosphäre ist. Beide Werthe sind vorwaltend abhängig von der Art und Ausführung der Steuerung. Die Einflüsse, die hier stattfinden, sind aber so mannigfach, dass eine Bestimmung beider Pressungen p'_1 und p'_2 auf theoretischem Wege als unmöglich erscheint. Da sich nun aber beide Werthe leicht aus Indicatorcurven entnehmen lassen, so lässt sich erwarten, dass man auf Grund zahlreicher Versuche Regeln und empirische Formeln wird gewinnen können, aus denen sich wenigstens näherungsweise für gewisse Maschinenanordnungen die Beziehungen zwischen p_2 und p'_2, sowie zwischen p_1 und p'_1 ermitteln lassen.

Man ersieht leicht, dass die beiden horizontal schraffirten Flächen der Fig. 48 die Arbeitsverluste darstellen, welche in Folge der Differenz dieser Pressungen entstehen. Ich nenne p'_2 den Admissionsdruck und p'_1 den Gegendruck; dann findet sich zuerst der Arbeitsverlust L_3 pro Kolbenschub in Folge der Differenz des Kessel- und Admissionsdruckes

$$L_3 = V_1 (p_2 - p'_2)$$

da wir ganz wohl die obere horizontal schraffirte Fläche der Fig. 48 als ein Rechteck ansehen können. Bezeichne ich der Einfachheit wegen das Verhältniss der Druckdifferenz $p_2 - p'_2$ zum Kesseldruck p_2 mit α, setzen wir sonach

$$\frac{p_2 - p'_2}{p_2} = \alpha \tag{386}$$

so folgt der Arbeitsverlust auch, wenn wir noch, wie oben $V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma)$ einsetzen:

$$L_3 = M p_2 (x_2 u_2 + \sigma) \cdot \alpha \tag{387}$$

und dann folgt weiter der Effectverlust ζ_3 in Folge der Differenz zwischen Admissions- und Kesseldruck:

$$\zeta_3 = \frac{A p_2 (x_2 u_2 + \sigma)\, \alpha}{x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_1} \tag{388}$$

In ähnlicher Weise bestimmt sich nun auch der Arbeits- und Effectverlust in Folge der Ungleichheit zwischen Gegendruck und äusserm Druck, unter äusserm Druck den Condensatordruck oder bei Maschinen ohne Condensation den Atmosphärendruck verstanden. Der entsprechende Arbeitsverlust L_4 ist:

$$L_4 = V(p'_1 - p_1)$$

Setzen wir nun

$$\frac{p'_1 - p_1}{p_1} = \beta \tag{389}$$

sowie $V = V_1 : \varepsilon$. so folgt, wenn noch, wie vorhin, V_1 durch $M(x_2 u_2 + \sigma)$ ersetzt wird:

$$L_4 = \frac{M p_1 (x_2 u_2 + \sigma)\, \beta}{\varepsilon} \tag{390}$$

und hieraus, wenn man durch die disponible Arbeit dividirt, der Effectverlust ζ_4 in Folge der Ungleichheit zwischen äusserm Druck und Gegendruck:

$$\zeta_4 = \frac{A p_1 (x_2 u_2 + \sigma)\, \beta}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)\, \varepsilon} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_1} \tag{391}$$

Zu diesen Effectverlusten treten nun noch diejenigen hinzu, welche aus den Reibungswiderständen in der Maschine hervorgehen. Diesen gesammten Widerstand betrachten wir, wie es

auch von Pambour geschehen ist, aus zwei Theilen bestehend; der eine ist der constante Widerstand, derjenige Widerstand, der selbst dann vorhanden ist, wenn die Maschine leer umläuft. Denke ich mir diesen Widerstand, wie Pambour, auf die Quadrateinheit Kolbenfläche bezogen, mit f bezeichnet, so ist der diesem constanten Widerstande entsprechende Arbeitsverlust pro Kolbenschub

$$L_5 = Vf$$

oder wie vorhin $V = V_1 : \varepsilon = \frac{M(x_2 u_2 + \sigma)}{\varepsilon}$ gesetzt

$$L_5 = \frac{M(x_2 u_2 + \sigma) f}{\varepsilon} \qquad (392)$$

und daher der Effectverlust, welcher dem constanten Widerstande in der Maschine entspricht:

$$\zeta_5 = \frac{A(x_2 u_2 + \sigma) f}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)\,\varepsilon} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_1} \qquad (393)$$

Den andern, den variabeln Reibungswiderstand, setzt Pambour der sogenannten Nutzlast, dieselbe als Widerstand am Kolben aufgefasst, proportional oder was im Grunde dasselbe ist, er nimmt an, der diesem Widerstande entsprechende Arbeitsverlust sei proportional der effectiven Arbeit der Maschinen; bekanntlich soll man nach Pambour dieses Verhältniss, welches er mit δ bezeichnet, für alle Maschinen zu 0,14 annehmen. Die Pambour'sche Annahme, dass der hier erwähnte Arbeitsverlust der effectiven Arbeit proportional ist und dass überdies das Verhältniss beider constant $(\delta = 0{,}14)$ gesetzt werden soll, ist hypothetisch und daher wird es mir erlaubt sein, bei der neuen Darstellung der ganzen Frage, wenigstens behufs Beurtheilung bestehender Maschinen, von einer andern Annahme auszugehen. Ich setze nämlich voraus, der Reibungswiderstand sei nicht der effectiven, sondern der disponibeln Arbeit proportional; ich nehme daher einfach an, der Effectverlust, der dem variabeln Reibungswiderstand entspricht, sei ζ_6 und dieser Werth sei durch Versuche ermittelt. Ich glaube, die Versuche werden wohl ergeben, dass man den Werth ζ_6 ebenfalls im Mittel und ohne grossen Fehler für verschiedene Maschinen gleich gross annehmen kann. Wäre sonach ζ_6 bekannt und die disponible Ar-

beit nach Gl. (376) bestimmt, so fände sich der entsprechende Arbeitsverlust L_6

$$L_6 = \zeta_6 \cdot L_m$$

während Pambour im Grunde setzt, wenn die effective Arbeit der Maschine mit L_e bezeichnet wird:

$$L_6 = \delta \cdot L_e = 0{,}14\, L_e$$

Die Verbindung beider Werthe für L_6 führt leicht auf eine gewisse Beziehung zwischen ζ_6 und δ.

Die obigen Formeln geben nun das Mittel an die Hand, für eine Dampfmaschine ohne schädlichen Raum alle einzelnen Effectverluste zu berechnen und dieselben unter sich ihrer Grösse nach zu vergleichen. Die einzelnen Formeln erscheinen zwar verwickelt, doch führt ihr Vergleich auf eine einfache Beziehung, da fast in allen Ausdrücken der Werth

$$\frac{A\,(x_2 u_2 + \sigma)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

als Faktor vorkommt, der einfacher geschrieben werden kann. Handelt es sich, wie wir hier annehmen, um die Untersuchung einer bestehenden Maschine (ohne schädlichen Raum) so setzen wir als bekannt t_2, t_1, t_0 und x_2 voraus und ebenso V_1 und ε.

Man berechnet nun zunächst die Masse M von Flüssigkeit und Dampf pro Schub aus der Gleichung

$$V_1 = M\,(x_2 u_2 + \sigma) \tag{394}$$

und dann die disponible Arbeit pro Schub nach

$$L_m = \frac{M\,(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{A\,T_2}\,(T_2 - T_1) \tag{395}$$

Die Division beider Gleichungen giebt dann einfach für den oben bezeichneten Factor

$$\frac{V_1}{L_m}$$

und wenn man ferner in der Gleichung für M die Dampf- und Flüssigkeitsmasse pro Sekunde, d. h. $\frac{2n}{60} M$ statt M substituirt, wobei n die Anzahl der Umdrehungen der Maschine pro Minute ist, so folgt die disponible Arbeit der Maschine pro Sekunde in Meterkilogrammen und dividirt man durch 75, so erhält man die dis-

ponible Arbeit in Pferdestärken; man hat also, diese Arbeit mit N_m bezeichnet:

$$N_m = \frac{2n}{60 \cdot 75} M (x_2 r_2 + q_2 - q_0) \frac{T_2 - T_1}{A T_2} \tag{396}$$

Nun folgen die einzelnen Effectverluste unter Benutzung der im Vorstehenden angegebenen Vereinfachungen, also unter der Voraussetzung, dass M und L_m im Voraus berechnet worden ist:

1) Nach Gl. (380) und (381) der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses:

$$\zeta_1 = \frac{M}{A L_m}\left[T_1 (\tau_2 - \tau_1) - \frac{T_0}{T_2}(q_2 - q_1)\right] \tag{397}$$

2) Der Effectverlust in Folge unvollständiger Expansion nach Gl. (385):

$$\zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \frac{V_1 p_2}{L_m}\left(\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon}\right) \tag{398}$$

3) Der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen Admissions- und Kesseldruck nach Gl. (388):

$$\zeta_3 = \alpha \frac{V_1 p_2}{L_m} \tag{399}$$

4) Der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen äusserm Druck und Gegendruck nach Gl. (391):

$$\zeta_4 = \beta \frac{V_1 p_1}{\varepsilon L_m} \tag{400}$$

5) Der Effectverlust in Folge des constanten Widerstandes in der Maschine nach Gl. (392):

$$\zeta_5 = \frac{f V_1}{\varepsilon L_m} \tag{401}$$

6) Der Effectverlust in Folge des veränderlichen Widerstandes:

$$\zeta_6$$

Addiren wir nun alle diese Effectverluste und subtrahiren wir die Summe von 1, so ergiebt sich der **wahre Wirkungsgrad** η **dieser Dampfmaschine**:

$$\eta = 1 - (\zeta_1 + \zeta_2 \cdots + \zeta_6)$$

oder die vorstehenden Werthe substituirt nach leichter Reduction, wenn man zugleich berücksichtigt, dass $V_1 : \varepsilon$ nichts anders als das ganze Volumen V des Cylinders ist:

$$\eta = \frac{V p_2}{L_m}\left[\varepsilon\frac{\mu - \varepsilon^{\mu} - 1}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)\,p_1 + \alpha\,\varepsilon\,p_2 + f}{p_2}\right] - \zeta_6 \qquad (402)$$

Nach dieser Formel lässt sich also auch direct der Wirkungsgrad η dieser Maschine berechnen. Nennen wir aber die effective Arbeit derselben pro Kolbenschub L_e, so folgt auch

$$L_e = \eta\, L_m$$

und da nach obigen Bemerkungen der Pambour'sche Coefficient δ zu unserm Effectverlust ζ_6 in der Beziehung

$$\delta\, L_e = \zeta_6 \cdot L_m$$

steht, so findet sich auch direct die Arbeit der Maschine pro Schub, wenn man vorzieht, den Pambour'schen Coefficienten in diesem Falle einzuführen:

$$L_e = \frac{V p_2}{1+\delta}\left[\frac{\mu\,\varepsilon - \varepsilon^{\mu}}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)\,p_1 + \alpha\,\varepsilon\,p_2 + f}{p_2}\right] \qquad (403)$$

Ist F der Kolbenquerschnitt und s der Kolbenhub, so ist $V = Fs$ und macht die Maschine n Umdrehungen pro Minute, so findet sich die Arbeit der Maschine pro Sekunde, wenn man die rechte Seite vorstehender Gleichung mit $\frac{2n}{60}$ multiplicirt und dann folgt weiter, wenn mit 75 dividirt wird, die effective Arbeit N_e in Pferdestärken:

$$N_e = \frac{F s n p_2}{30 \cdot 75\,(1+\delta)}\left[\frac{\mu\,\varepsilon - \varepsilon^{\mu}}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)\,p_1 + \alpha\,\varepsilon\,p_2 + f}{p_2}\right] \qquad (404)$$

Würden wir endlich noch den Werth $\frac{sn}{30}$ durch die mittlere Kolbengeschwindigkeit c ersetzen, so fände sich auf diese Weise eine Formel, die zur Berechnung einer neuen Maschine brauchbar wäre, wenigstens liesse sich der Kolbenquerschnitt F berechnen; vorausgesetzt, es wären durch Versuche die Hülfsmittel gegeben, die Werthe δ, β, α und f zu bestimmen. Diese Formel gilt allerdings zunächst nur für eine Maschine ohne schädlichen Raum, doch ist sie in anderer Beziehung vollkommener, als die

Formel von Pambour. denn unsere Gleichung nimmt Rücksicht auf die Wassermenge, welche dem Dampfe mechanisch beigemengt ist: da der Werth μ diesem Mischungsverhältniss entsprechend nach Gl. 259, S. 342 bestimmt wird. Wir kommen übrigens auf Angaben über Berechnung neuer Maschinen zurück. Hier wollen wir zunächst durch ein Zahlenbeispiel die vorstehenden Sätze näher erläutern.

Beispiel. Im Dampfkessel einer »Mitteldruckmaschine mit Expansion und Condensation« ist der normale Druck p_2 in Atmosphären gemessen, 4.5 Atmosphären. der Druck p_1 im Condensator 0,1 Atmosphäre. Der Durchmesser des Dampfcylinders beträgt 0,550^m und der Kolbenschub $s = 1.250^m$. Die Maschine, bei der wir zunächst keinen schädlichen Raum voraussetzen, macht in der Minute 30 Umdrehungen und die mittlere Kolbengeschwindigkeit folgt daher $c = 1,25^m$.

Das Expansionsverhältniss sei $\varepsilon = {}^1/_6$.

Eine solche Maschine bezeichnet man in der Praxis (nach Morin-Poncelet) als eine Dampfmaschine von effectiv 30 Pferdestärken.

Diese Maschine soll nun nach unsern Formeln untersucht werden und zwar unter zwei verschiedenen Annahmen. einmal setzen wir voraus. der vom Kessel herbeiströmende Dampf sei rein, ohne Beimischung von Wasser, es sei also $x_2 = 1$; das andre Mal nehmen wir an, die Mischung von Dampf und Wasser führe 15 % Wasser mit sich. es sei also $x_2 = 0.85$.

Für diese Maschine ist zunächst der Kolbenquerschnitt $F = 0,23758$ Quadratmeter und da der Kolbenweg $s = 1.25^m$ ist, das Cylindervolumen $V = Fs = 0.29698$ Cubikmeter und dann das Volumen, welches der Kolben während des Dampfeintrittes beschreibt $V_1 = \varepsilon V = 0,04949$ Cubikmeter.

Setzen wir nun zunächst $x_2 = 1$. so ergiebt die Gl. 394, weil entsprechend dem Dampfdrucke von 4.5 Atmosphären $u_2 = 0.4004$ ist, die Dampfmenge pro Kolbenschub:

$$M = 0.1233 \text{ Kilogr.}$$

Ferner die disponible Arbeit pro Schub nach Gl. (395)

$$L_m = 7669.48 \text{ Meterkilogr.}$$

Multiplicirt man beide Werthe mit $\frac{2n}{60}$. wobei n die Um-

drehungszahl pro Minute bedeutet, so ergiebt sich die Dampfmenge und die disponible Arbeit pro Sekunde; da unsere Maschine $n = 30$ Umdrehungen machen soll, so gelten vorstehende Werthe zugleich für die Sekunde.

Die disponible Arbeit findet sich nach Gl. (396) auch

$$N_m = 102{,}26 \text{ Pferdestärken.}$$

Wie schon erwähnt wurde, betrachtet man in der Praxis die angenommene Maschine als eine von $N = 30$ Pferdestärken, mit andern Worten, man nimmt an, ihr Wirkungsgrad sei

$$\frac{N}{N_m} = 0{,}293$$

Die Arbeit N ist aber, wie man weiss, in Wirklichkeit grösser und daher fällt auch der wahre Wirkungsgrad dieser Maschine grösser aus. Wenn der Constructeur unsere Maschine als eine solche von 30 Pferdestärken bezeichnet, so will das im Grunde sagen, er garantire der Sicherheit wegen nur für einen Nutzeffect von 29,3 Procent der disponiblen Arbeit.

Es soll nun die wahre Leistung und der wahre Wirkungsgrad dieser Maschine bestimmt werden, indem wir zunächst nach obigen Angaben alle einzelnen Effectverluste berechnen.

Der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses berechnet sich nach Gl. (397); wir setzen dort, weil hier die Speisewassertemperatur T_0 mit der Temperatur T_1 im Condensator identisch ist, $T_0 = T_1$: ferner findet sich für die Kesseltemperatur $t_2 = 148{,}29^0$, $\tau_2 = 0{,}43761$ und für die Condensatortemperatur $t_1 = 46{,}21^0$, $\tau_1 = 0{,}15561$ *) und dann folgt unter entsprechender Benutzung der Tab. 10 des Anhanges dieser erste Effectverlust:

---

*) Die oben angegebenen Werthe von τ finden sich nicht in der Hülfstabelle auf S. 316; sie berechnen sich aber, wenn man für die Flüssigkeitswärme q die Gl. 190 S. 262 von Regnault zu Grunde legt, genau nach der Formel:

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{T} = 2{,}431889 \log_{10} \frac{273 + t}{273} - 0{,}0002057\, t + 0{,}000\,000\,45\, t^2$$

(Vergl. S. 321 und 322).

$$\zeta_1 = 0{,}0772$$

Der zweite Effectverlust geht aus der Unvollständigkeit der Expansion hervor: das Expansionsverhältniss bei unserer Maschine ist $\varepsilon = \frac{1}{6}$ angenommen und der Exponent μ entsprechend der adiabatischen Curve für $x_2 = 1$ ist nach Gl. (259) S. 342 $\mu = 1{,}135$; hiermit berechnet sich in Gl. (398) der Ausdruck

$$\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} = 2{,}59153$$

und der Effectverlust in Folge der unvollständigen Expansion:

$$\zeta_2 = 0{,}1852$$

Nehme ich im Weitern an, die Differenz vom Kessel- und Admissionsdruck betrage 7,5 Procent, so ist nach Gl. (386) $\alpha = 0{,}075$ und dann folgt nach Gl. (399) der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen Kesseldruck und Admissionsdruck:

$$\zeta_3 = 0{,}0225$$

Der Condensatordruck ist zu $p_1 = 0{,}1$ Atmosphäre angenommen, setze ich den wirklichen Dampfgegendruck $p'_1 = 0{,}2$ Atmosphären, so ist nach Gl. (389) $\beta = 1$ und dann ergiebt sich der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen Gegendruck und äusserm Druck nach Gl. (390)

$$\zeta_4 = 0{,}0400$$

Nehme ich den constanten Widerstand in der Maschine auf die Kolbenfläche reducirt zu 0,07 Atmosphären an. d. h. setze ich (vergl. S. 473)

$$f = 0{,}07 \,.\, 10334 = 723{,}38 \text{ Kilogr.}$$

so ergiebt sich nach Gl. (401) der Effectverlust in Folge der constanten Widerstände in der Maschine

$$\zeta_5 = 0{,}0280$$

Den Effectverlust ζ_6, welcher den variabeln Reibungswiderständen in der Maschine entspricht, setze ich der disponibeln Arbeit proportional und schätze ihn bei dieser Maschine*) zu

$$\zeta_6 = 0{,}0850$$

*) Die Grössen α, β, f und ζ_6 habe ich den gewöhnlichen Erfahrungen

Addire ich nun alle Effectverluste und subtrahire ich ihre Summen von Eins, so folgt der wahre Wirkungsgrad η dieser Dampfmaschine:

$$\eta = 0.5621$$

Die disponible Arbeit der Maschine fand sich

$$N_m = 102.26 \text{ Pferdestärken.}$$

Durch Multiplication beider Werthe ergiebt sich daher die effective Leistung

$$N_e = 57.480 \text{ Pferdestärken.}$$

Um nun zu zeigen, welchen Einfluss die dem Dampfe mechanisch beigemischte Wassermenge auf die Leistung der Dampfmaschine hat, habe ich das gleiche Beispiel noch unter der Voraussetzung $x_2 = 0{,}85$ durchgerechnet: ich nehme also an, die aus dem Dampfkessel herbeiströmende Dampf- und Flüssigkeitsmasse führe 15 % Wasser mit sich. Die Resultate der Rechnungen sind im Folgenden zusammengestellt und zugleich sind dabei, um Vergleiche zu erleichtern, die Resultate der obigen Rechnungen nochmals angegeben: die Coefficienten α, β, f und ζ_6 sind in beiden Fällen gleich gesetzt worden.

$x_2 = 1$	$x_2 = 0.85$
Dampf und Flüssigkeitsmischung in Kilogr. pro Sekunde:	
$M = 0{,}1233$	$M = 0{,}1450$
Gewicht des Dampfes:	
$Mx_2 = 0.1233$	$Mx_2 = 0.1232$
Gewicht des beigemischten Wassers:	
$M(1 - x_2) = 0$	$M(1 - x_2) = 0{,}0218$
Disponible Arbeit in Pferdestärken:	
$N_m = 102.26$	$N_m = 105{,}30$
Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses:	
$\zeta_1 = 0.0772$	$\zeta_1 = 0.0882$

entsprechend gewählt: es versteht sich aber von selbst, dass dieselben in Zukunft genau ermittelt werden müssen, was keinen Schwierigkeiten unterliegen kann. Aus den Indicatordiagrammen lassen sich leicht die Werthe α und β ermitteln und aus gleichzeitigen Bremsversuchen die Werthe f und ζ_6 ableiten.

Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit der Expansion:

$\zeta_2 = 0{,}1852$ $\zeta_2 = 0{,}1894$

Effectverlust in Folge der Ungleichheit zwischen Kessel- und Admissionsdruck:

$\zeta_3 = 0{,}0225$ $\zeta_3 = 0{,}0218$

Effectverlust in Folge der Ungleichheit zwischen Gegendruck und äusserm Druck:

$\zeta_4 = 0{,}0400$ $\zeta_4 = 0{,}0388$

Effectverlust in Folge des constanten Reibungswiderstandes in der Maschine:

$\zeta_5 = 0{,}0280$ $\zeta_5 = 0{,}0272$

Effectverlust in Folge des veränderlichen Reibungswiderstandes in beiden Fällen:

$\zeta_6 = 0{,}0850$

Wirkungsgrad der Dampfmaschine:

$\eta = 0{,}5621$ $\eta = 0{,}5496$

Effective Arbeit der Maschine in Pferdestärken:

$N_e = 57{,}480$ $N_e = 57{,}873$

Wenn nun auch die einzelnen Zahlenwerthe dieser Zusammenstellung zunächst noch keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen können, so glaube ich doch, durch Vorführung des Beispieles meinen andern Zweck erreicht zu haben, nämlich zu zeigen, welchen schönen Einblick man auf dem von mir betretenen Wege in das ganze Wesen der Dampfmaschinen erhält. Auf eine Besprechung und einen Vergleich der verschiedenen Effectverluste soll erst weiter unten eingegangen werden, wenn noch der dem schädlichen Raume entsprechende Verlust ermittelt werden kann. Wir wollen hier nur auf die Werthe des Wirkungsgrades und der effectiven Leistung aufmerksam machen. Es zeigt sich zunächst, dass die wirkliche Leistung N_e der angenommenen Dampfmaschine, in Pferdestärken gemessen, in beiden Fällen fast genau die gleiche ist, mag der Dampf trocken (gesättigt) oder nass sein (15 % Wasser mit sich führen).*) Diese Gleichheit besteht aber auch

*) Berechnet man die gleiche Maschine nach den bekannten Formeln von Pambour, ebenfalls unter der Voraussetzung, dass kein schädlicher Raum vorhanden ist, so ergiebt sich ihre effective Leistung $57{,}69$ Pferdestärke.

nahezu zwischen den Wirkungsgraden und der disponibeln Arbeit. Führt bei dieser Maschine die vom Kessel kommende Dampf- und Flüssigkeitsmasse 15 % Wasser mit sich, so wird dadurch der Wirkungsgrad um 0,5621 — 0,5496 = 0,0125 herabgezogen, d. h. diese Wassermenge bringt einen Arbeitsverlust von nahezu 1,2 % hervor: dieser Arbeitsverlust macht sich bei unsern Dampfmaschinen nicht durch eine veränderte effective Arbeit, sondern durch einen verstärkten Aufwand an Brennmaterial bemerkbar.

Nach Gl. (375) S. 458 ist die Wärmemenge, welche dem Kessel zuzuführen ist, allgemein:

$$Q = M\,(x_2 r_2 + q_2 - q_0)$$

oder wenn wir M durch Gl. (384) ersetzen:

$$Q = \frac{x_2 r_2 + q_2 - q_0}{x_2 u_2 + \sigma} \cdot V_1$$

Ist bei reinem trocknen Dampf ($x_2 = 1$) die Wärmemenge Q', so folgt für dieselbe Maschine:

$$Q' = \frac{r_2 + q_2 - q_0}{u_2 + \sigma} \cdot V_1$$

und hieraus das Verhältniss $Q : Q'$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{(r_2 + q_2 - q_0)} \cdot \frac{(u_2 + \sigma)}{(x_2 u_2 + \sigma)}$$

Bei der oben angenommenen Maschine ist, da sie mit Condensation arbeitet, $q_0 = q_1$ zu setzen.

Nach dieser Formel lässt sich direct der Einfluss der dem Dampfe beigemischten Wassermenge auf den Mehrbetrag an Wärme oder Brennmaterial berechnen. Das Verhältniss $Q : Q'$ ist übrigens identisch mit dem Verhältniss der Werthe der disponibeln Arbeit, in unserm Falle ergiebt sich sonach:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{105,30}{103,26} = 1,0298$$

und hieraus schliesse ich, dass bei unserer Maschine (ohne schädlichen Raum) die beigemischte Wassermenge den Brennmaterialaufwand nur um etwa 3 % erhöhte, während der Wirkungsgrad der Maschine nur um 1,2 % herabgezogen wird. Es hat das

seinen Grund darin, dass bei nassem Dampfe die effective Arbeit sich etwas höher stellt, als beim trocknen gesättigten Dampf, weil der Werth μ etwas kleiner ist und die adiabatische Curve sich daher nicht so rasch der Abscissenaxe nähert.

Uebrigens berechnet sich für unsere Dampfmaschine für die beiden Fälle die Dampfmenge stündlich (in Kilogr.) pro Pferdestärke effectiv

$$\frac{3600\, M x_2}{N_e} = 7{,}72 \text{ und } 7{,}66$$

und endlich die Wärmemenge, die stündlich pro Pferdestärke dem Kessel zuzuführen ist

$$3600\, M \frac{x_2 r_2 + q_2 - q_0}{N_e} = 4675 \text{ und } 4782 \text{ Calorien}$$

(vergl. die Tabelle S. 439). Die vorstehenden Werthe erscheinen, mit unsern gewöhnlichen Erfahrungen verglichen, günstig; es hat das eben in der Vernachlässigung des Einflusses des schädlichen Raumes seinen Grund.

b) Dampfmaschine mit schädlichem Raum.

Der schädliche Raum ist bei Dampfmaschinen von wesentlichem Einfluss auf den Wirkungsgrad derselben. Der schädliche Einfluss dieses Raumes besteht hauptsächlich darin, dass man denselben, der mit schwach gespanntem Dampf erfüllt ist, zunächst mit Kesseldampf ausfüllen muss und dass also eine solche Dampfmaschine mehr Dampf braucht, als eine solche ohne schädlichen Raum. Nun ist zwar die diesem Dampfmehrbetrag entsprechende Arbeit nicht vollständig verloren, weil der Dampfmehrbetrag an der Expansion Theil nimmt, immerhin ist aber der Arbeitsverlust noch gross genug, so dass man bei Beurtheilung der Dampfmaschinen den Einfluss des schädlichen Raumes keineswegs unbeachtet lassen kann: durch die Berücksichtigung dieses Einflusses werden allerdings die Formeln complicirter; um daher den Einblick in den Gang meiner Betrachtungen zu erleichtern, habe ich oben zunächst die Dampfmaschine ohne Rücksicht auf ihren schädlichen Raum der Betrachtung unterworfen. Es soll nun auch diese Beschränkung wegfallen.

Im Augenblicke des Dampfeintrittes in den Cylinder befindet

sich der Dampfkolben nahe am Ende seines Hubes und steht fast still. Ist die Dampf- und Flüssigkeitsmenge, welche in diesem Augenblicke den Raum hinter dem Kolben füllt, M', die spezifische Dampfmenge x', Temperatur und Druck t' und p', und bezeichnen wir wie früher Temperatur und Druck im Kessel mit t_2 und p_2, so ist die Wärmemenge Q', welche dem Kessel zuzuführen ist, um den schädlichen Raum mit Kesseldampf zu füllen, nach den Angaben auf S. 379 und 380:

$$Q' = M' \left[q_2 - q' + x' u' \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho'}{u'} \right) \right]$$

denn die Vereinigung beider Räume und die Wärmemittheilung findet nahezu bei constantem Volumen statt.

Wir wollen nun wieder, wie oben, das Gewicht der Dampf- und Flüssigkeitsmenge, das pro Kolbenschub zugeführt wird, wenn kein schädlicher Raum vorhanden wäre, mit M, dagegen die spezifische Dampfmenge der vom Kessel nach dem Cylinder strömenden Mischung mit x bezeichnen und unter x_2 die spezifische Dampfmenge am Ende des Dampfeintrittes, d. h. bei Beginn der Expansion verstehen.

Wäre sonach kein schädlicher Raum vorhanden, so wäre die Wärmemenge Q'', die während des Dampfeintrittes in den Kessel zu führen ist

$$Q'' = M x r_2$$

Fasse ich die beiden Wärmemengen Q' und Q'' zusammen, so ergiebt sich diejenige Wärmemenge, welche pro Kolbenschub dem Kessel während des Dampfeintrittes und wegen Ausfüllung des schädlichen Raumes zuzuführen ist.

$$Q' + Q'' = M x r_2 + M' \left[q_2 - q' + x' u' \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho'}{u'} \right) \right]$$

Für diese Wärmemenge findet sich aber noch ein anderer Ausdruck. Die Dampf- und Flüssigkeitsmenge, die wirklich bei dieser Maschine pro Kolbenschub nach dem Cylinder geht, sei M_1; daher folgt die effective Dampfmenge pro Schub $M_1 x$. Da diese Dampfmenge im Kessel bei constantem Drucke p_2 erzeugt wird, so ist die Wärmemenge, welche dazu erforderlich ist, $M_1 x r_2$, und dieser Werth ist identisch mit dem soeben

berechneten Werth $Q' + Q''$. Wir erhalten daher zunächst die Gleichung:

$$M_e x r_2 = M x r_2 + M' \left[q_2 - q' + x' u' \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho'}{u'}\right)\right] \quad (405)$$

Das zweite Glied der rechten Seite repräsentirt sonach den Mehrbetrag an Wärme bei einer Maschine mit schädlichem Raum, verglichen mit einer solchen ohne schädlichen Raum.

Es sei nun V' das Volumen des schädlichen Raumes, ferner wie früher V_1 das Volumen, welches der Dampfkolben während des Dampfeintrittes beschreibt; dann gelten auch die Gleichungen:

$$V' = M'(x' u' + \sigma) \quad (406)$$

$$V_1 = M(x u_2 + \sigma) \quad (407)$$

und daher ist:

$$V' + V_1 = M(x u_2 + \sigma) + M'(x' u' + \sigma).$$

In Wirklichkeit wird aber die Masse M_e nach dem Cylinder geführt und die spezifische Dampfmenge bei Beginn der Expansion sollte mit x_2 bezeichnet werden. Wir erhalten daher auch die Formel

$$V' + V_1 = (M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma)$$

und hieraus durch Gleichsetzen

$$(M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma) = M(x u_2 + \sigma) + M'(x' u' + \sigma).$$

In dieser Formel kann man aber überall den Werth σ vernachlässigen, theils weil σ sehr klein ist, theils auch weil M_e von M nur wenig verschieden ist; wir erhalten daher:

$$(M_e + M') x_2 u_2 = M x u_2 + M' x' u' \quad (408)$$

Die letzten Gleichungen lassen sich nun in folgender Weise verwerthen. Für eine vorhandene Dampfmaschine ist das Volumen V' des schädlichen Raumes und ebenso das Volumen V_1 bekannt, das der Kolben während des Dampfeintrittes beschreibt. Ist ferner der Druck und die spezifische Dampfmenge x' im schädlichen Raum bei Beginn des Dampfeintrittes gegeben, so bestimmen sich aus Gln. (406) und (407) zunächst die Grössen M' und M und dann berechnet sich aus Gl. (405) die Dampf- und Flüssigkeitsmenge M_e, welche pro Kolbenschub dem Cylinder zugeführt wird. Endlich giebt Gl. (408) die spezifische Dampfmenge x_2 bei Beginn der Expansion. Schon aus den Formeln

allein ist zu schliessen, dass im Allgemeinen die spezifische Dampfmenge x_2 nicht mit derjenigen x übereinstimmen wird, welche der aus dem Kessel herbeikommenden Mischung entspricht: dass also in Folge des schädlichen Raumes während des Dampfeinströmens in den Cylinder entweder ein Verdampfen eines Theiles des beigemischten Wassers oder dass ein Niederschlagen von Dampf stattfindet.

Es mag zunächst diese Frage näher verfolgt werden. Eliminirt man aus den Gln. (405) und (408) den Werth Mr, so folgt nach einigen leichten Reductionen:

$$(M_e + M')x_2 = M_e x + \frac{M'}{r_2}\left[x'u'\left(\frac{\varrho'}{u'} + Ap_2\right) - (q_2 - q')\right] \tag{409}$$

Vernachlässigt man den kleinen Werth M' gegen M_e in der Summe $(M_e + M')$, dividirt durch M_e und setzt man näherungsweise im zweiten Gliede $M_e = M$, so folgt

$$x_2 = x + \frac{M'}{Mr_2}\left[x'u'\left(\frac{\varrho'}{u'} + Ap_2\right) - (q_2 - q')\right] \tag{409a}$$

Da die spezifische Dampfmenge x' im schädlichen Raume wohl meist nahezu 1 sein wird, so folgt aus dieser Formel $x_2 > x$, d. h. während des Dampfeintrittes in den Dampfcylinder findet bei Anwesenheit eines schädlichen Raumes ein Verdampfen eines Theiles des beigemengten Wassers statt.

Dieses merkwürdige Resultat findet sich zuerst bei Clausius*), wenn auch auf ganz anderem Wege entwickelt und durch andere Formeln dargestellt. Es folgt also, dieses Resultat mit den frühern Resultaten zusammengehalten, dass bei Dampfmaschinen im Allgemeinen während des Dampfeinströmens in den Cylinder neuer Dampf entsteht und dass bei der Expansion eine theilweise Condensation stattfindet.

Die Gl. (409) lässt sich noch umformen. Vernachlässigen wir in den Gln. (406) und (407) den Werth σ, was meist erlaubt ist, so findet sich

---

*) Abhandlungen. V. S. 199.

$$M' = \frac{V''}{x' u'} \text{ und } M = \frac{V_1}{x u_2} .$$

Ist wie früher V das ganze Volumen, welches der Dampfkolben pro Schub beschreibt und setzen wir das Verhältniss des schädlichen Raumes zu diesem Volumen $V'' : V = \varepsilon'$ und das Expansionsverhältniss, wie früher $V_1 : V = \varepsilon$, so ergeben die beiden vorstehenden Formeln

$$\frac{M'}{M} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{x u_2}{x' u'}$$

und dann folgt aus Gl. 409[a], wenn wir dort noch den Werth $(q_2 - q')$ vernachlässigen, was erlaubt ist, so lange man, wie es im Vorstehenden angenommen ist, σ gegen den Werth $x' u'$ weglassen darf:

$$x_2 = x \left[1 + \frac{\varepsilon' u_2}{\varepsilon r_2} \left(\frac{\varrho'}{u'} + A p_2 \right) \right] \qquad (410)$$

eine Gleichung, welche wenigstens im Allgemeinen zeigt, welche Werthe am stärksten auf die Veränderung der spezifischen Dampfmenge während des Dampfeintrittes von Einfluss sind.

Die vorstehenden Resultate erleiden in Wirklichkeit eine geringe Aenderung, wenn man noch, wie es Clausius a. a. O. bei der Aufstellung seiner Formeln gethan hat, auf die Differenz zwischen Kessel- und Admissionsdruck Rücksicht nimmt. Die mathematischen Ausdrücke werden aber dadurch so verwickelt, dass das, was sie sagen, schwer zu übersehen ist; dazu kommt noch, dass wir noch kein Mittel haben, diese Druckdifferenz scharf zu bestimmen. So lange das Letztere nicht der Fall ist, halte ich den Gebrauch der oben gegebenen einfachen Formeln für praktische Zwecke für vollkommen ausreichend.

Um nun zu zeigen, dass es leicht ist, in der Praxis bei näherer Prüfung einer gewissen Dampfmaschine von diesen Formeln Gebrauch zu machen, greife ich zu dem Beispiele S. 476 zurück.

Ich nehme an, die spezifische Dampfmenge der aus dem Kessel kommenden Mischung sei $x = 0{,}85$; der schädliche Raum V'' betrage (wie Pambour im Mittel annimmt) 0,05 des ganzen

Raumes, welchen der Kolben beschreibt. Es sei also für diese Maschine

$$V_1 = 0{,}04949 \text{ und}$$
$$V' = 0{,}05 \quad V = 0{,}01485 \text{ Cubikmeter}$$

sowie $\varepsilon' = 0{,}05$ und $\varepsilon = 1:6$.

Hier findet sich zunächst aus Gl. (407)

$$M = 0{,}1450 \quad \text{(Vergl. S. 479)}$$

Hinter dem Kolben haben wir einen Gegendruck von $p'_1 = 0{,}2$ Atmosphären angenommen; denke ich mir, der Einfachheit wegen, die Maschine arbeite ohne Compression, so ist das auch der Druck im schädlichen Raum bei Beginn des Dampfeintrittes und daher ist nach Tab. 10 $u' = 7{,}5421$: setzen wir hier reinen gesättigten Dampf ohne Beimischung von Wasser voraus, also $x' = 1$, so folgt nun die Masse M' nach Gl. (406)

$$M' = 0{,}00197 \text{ Kilogr.}$$

Benutzt man diese Werthe M und M' in Gl. (405) und schlägt man die dem Dampfdrucke $p_2 = 4{,}5$ Atmosphären und dem Drucke p' entsprechenden Werthe der Temperaturfunktionen in Tabelle 10 nach, so findet sich das Gewicht M_e von Flüssigkeit und Dampf, welches dieser Maschine pro Kolbenschub zuzuführen ist:

$$M_e = 0{,}1820 \text{ Kilogr.}$$

Davon sind dampfförmig:

$$M_e x = 0{,}1547 \text{ Kilogr.}$$

und im flüssigen Zustand:

$$M_e (1 - x) = 0{,}0273 \text{ Kilogr.}$$

Ohne schädlichen Raum betrug das Gewicht der Mischung nur 0,1450 Kilogr.

Da die Maschine pro Minute 30 Spiele, also 60 Schübe macht, so gelten vorstehende Werthe zugleich pro Sekunde.

Benutzt man die erhaltenen Werthe in Gl. (408), so ergiebt sich die spezifische Dampfmenge x_2 am Ende des Dampfeintrittes

$$x_2 = 0{,}871$$

also wirklich grösser als x. Die Dampfmenge im Cylinder bei Beginn der Expansion ist demnach:

$$M_\iota x_2 = 0{,}1585 \text{ Kilogr.}$$

und die Wassermenge

$$M_\iota (1 - x_2) = 0{,}0235 \text{ Kilogr.}$$

Ist nun auf die angegebene Weise die Dampf- und Flüssigkeitsmenge M_ι pro Kolbenschub bestimmt, so findet sich dann, wenn dieser Werth statt M in Gl. (395) S. 473 substituirt und x statt x_2 gesetzt wird, die disponible Arbeit pro Kolbenschub

$$L_m = \frac{M_\iota (x r_2 + q_2 - q_0)}{A T_2} (T_2 - T_1) \qquad (411)$$

und macht die Maschine n Umdrehungen pro Minute, so folgt die disponible Arbeit in Pferdestärken nach Gl. (396)

$$N_m = \frac{2n}{60 \cdot 75} M_\iota (x r_2 + q_2 - q_0) \frac{T_2 - T_1}{A T_2} \qquad (412)$$

Wenden wir diese Formel sogleich wieder auf die vorgelegte Maschine an, so folgt für die disponible Arbeit pro Kolbenschub

$$L_m = 9912{,}68 \text{ Meterkilogr.}$$

und diejenige pro Sekunde

$$N_m = 132{,}169 \text{ Pferdestärken.}$$

(Vergl. S. 479, ohne schädlichen Raum fand sich dort $N_m = 105{,}30$ Pferdestärke.)

Die vorstehenden Rechnungsresultate gelten unter der Annahme, dass im schädlichen Raume bei Beginn des Dampfeintritts nur gesättigter Dampf ohne Beimischung von Wasser vorhanden ist. Um den Einfluss des möglicher Weise vorhandenen Wassers übersehen zu lassen, habe ich dasselbe Beispiel auch unter der Voraussetzung berechnet, dass 0,40 Wasser und $x' = 0{,}60$ Kilogr. Dampf in der Gewichtseinheit Mischung enthalten seien. Ich finde dann die Dampf- und Flüssigkeitsmenge im schädlichen Raum $M' = 0{,}00328$; die Masse, welche vom Kessel herbeizuführen ist $M_\iota = 0{,}1831$ und die spezifische Dampfmenge bei Beginn der Expansion $x_2 = 0{,}862$; die beiden letzten Werthe, auf die es hier vorzüglich ankommt, sind kaum verschieden von denen, die vorhin für $x' = 1$ gefunden wurden. Es ist hiernach zu schliessen, dass die Anwesenheit von Wasser im schädlichen Raum unter den gewöhnlichen Verhältnissen von ganz untergeordnetem Einfluss auf die Leistungsverhältnisse ist.

Das geht aber auch unmittelbar aus den Formeln (405) bis (408) hervor; in der erstern kann man immer den verhältnissmässig kleinen Werth $q_2 - q'$ vernachlässigen, man erhält dann:

$$M_e x r_2 = V_1 \frac{r_2}{u_2} + V'' \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho'}{u'}\right)$$

und

$$(M_e + M') x_2 u_2 = V_1 + V''$$

Hiernach ist M_e fast nur vom Volumen V'', nicht von der Füllungsart des schädlichen Raumes abhängig und x_2 wird, da M' gegen M_e immer sehr klein ist, wenig von x abweichen.

Wir haben nun noch zu zeigen, in welcher Weise bei einer Dampfmaschine mit schädlichen Raum die einzelnen Effectverluste und der Wirkungsgrad bestimmt werden können.

Wir legen zu diesem Zwecke im Uebrigen zunächst dieselben Annahmen zu Grunde, die auf S. 451 erwähnt wurden und führen eine Rechnung aus, ähnlich derjenigen auf S. 452.

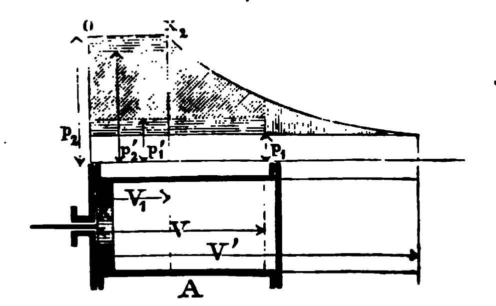
Bei Beginn der Expansion befindet sich nach der vorhin angegebenen Bezeichnung die Dampf- und Flüssigkeitsmasse $M_e + M'$ im Cylinder, die spezifische Dampfmenge ist x_2 und daher das Volumen dieser Masse $(M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma)$; bei Beginn des Dampfeinströmens ist der schädliche Raum mit der Masse M' gefüllt und daher dessen Inhalt auch $M'(x' u' + \sigma)$; daher folgt das Volumen, welches der Dampfkolben während des Dampfeintrittes beschreibt:

$$V_1 = (M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x' u' + \sigma)$$

und die Dampfarbeit L' während der Admission:

$$L' = \left[(M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x' u' + \sigma)\right] p_2 \qquad (413)$$

Fig. 49.



Setzen wir nun die Expansion so weit fort, bis der Druck auf den Werth p_1 des äussern Druckes gesunken ist, so folgt die Expansionsarbeit wie in Gl. (368) auf S. 452.

$$L'' = \frac{(M_e + M')}{A}\left[q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_1 \varrho_1\right] \qquad (414.$$

Endlich folgt die Dampfgegenarbeit L''', weil der Kolben beim Rückgange den Raum

$$M_e + M')\,(x_1 u_1 + \sigma) - M'\,(x' u' + \sigma)$$

beschreibt:

$$L''' = \left[\,(M_e + M')\,(x_1 u_1 + \sigma) - M'\,(x' u' + \sigma)\,\right] p_1 \qquad (415$$

Die ganze Arbeit, welche pro Kolbenschub gewonnen wird, ist daher in Wärmeeinheiten gemessen:

$$A L = A\,(L' + L'' - L''')$$

und diese Arbeit wird durch die g a n z e schraffirte Fläche der Fig. 49 dargestellt.

Substituiren wir die Werthe von L', L'' und L''' in vorstehende Formel, so ergiebt sich die Arbeit dieser Maschine mit schädlichen Raum unter den günstigsten Verhältnissen pro Schub, wenn wir gleich von vorn herein die Glieder, welche den Werth σ enthalten, als sehr klein vernachlässigen:

$$A L = (M_e + M')\left[q_2 - q_1 + r_2 x_2 - r_1 x_1\right] - A M' x' u' (p_2 - p_1)$$

Ersetzen wir nun die spezifische Dampfmenge x_1 am Ende der Expansion durch den Werth, der sich dafür aus Gl. (372) S. 453 ergiebt und subtrahiren wir dann den Werth $A L$ von der disponibeln Arbeit $A L_m$ Gl. (411), so ergiebt sich nach entsprechenden Reductionen der Arbeitsverlust $A L_1$, welcher der Unvollkommenheit des Prozesses u n d dem Einflusse des schädlichen Raumes entspricht:

$$A L_1 = \frac{M_e}{T_2}\left[(q_2 - q_0)\,(T_2 - T_1) + T_1 T_2\,(\tau_2 - \tau_1) - T_2\,(q_2 - q_1)\right]$$

$$+ M'\left[A x' u'\,(p_2 - p_1) - \frac{r_2 x_2}{T_2}\,(T_2 - T_1) - (q_2 - q_1) + T_1\,(\tau_2 - \tau_1)\right]$$

$$- M_e \frac{(x_2 - x)\,r_2}{T_2}\,(T_2 - T_1) \qquad (416$$

Das erste Glied der rechten Seite ist aber identisch mit Gl. (378) auf S. 459, es repräsentirt sonach den Arbeitsverlust

der allein nur der Unvollkommenheit des Kreisprozesses der Maschine entspricht, während die beiden andern Glieder den Arbeitsverlust ausdrücken, der aus der Anwesenheit des schädlichen Raumes entspringt. Spalte ich die Formel in der angegebenen Weise in zwei Theile und dividire ich durch die disponible Arbeit $A L_m$ nach Gl. (411), so führt das erste Glied auf den auf S. 460 angegebenen Weg, auf den Effectverlust ζ_1, welcher der Unvollkommenheit des Prozesses entspricht

$$\zeta_1 = \frac{T_1}{x r_2 + q_2 - q_0} \cdot \frac{T_2 (\tau_2 - \tau_1) - T_0 (q_2 - q_1)}{T_2 - T_1} . \qquad (417)$$

Dieser Effectverlust berechnet sich also immer nach der gleichen Formel, mag die Maschine einen schädlichen Raum besitzen oder nicht, wenn man nur unter x die spezifische Dampfmenge der aus dem Kessel herbeiströmenden Flüssigkeits- und Dampfmasse versteht.

Würden wir hingegen die andern beiden Glieder der Gl. (416) durch $A L_m$ dividiren, so würde sich der Arbeitsverlust ergeben, der durch den schädlichen Raum allein erzeugt wird. Bevor wir aber diese Division ausführen, können wir den Werth $M_2 (x_2 - x) r_2$ durch den Werth ersetzen, der dafür aus Gl. (409) resultirt. Wir erhalten

$$M_2 (x_2 - x) r_2 = M' \left[x' (\varrho' + A p_2 u') - (q_2 - q') - x_2 r_2 \right]$$

Substituire ich diesen Werth im dritten Gliede der Gl. (416) und fasse ich die beiden letzten Glieder zusammen, so ergiebt sich nach verschiedenen Umformungen, zum Theil ähnlicher Art, wie diejenigen, die bei Ueberführung der Gl. (379) in die Form (381) angegeben wurden, der Effectverlust ζ_7 in Folge des schädlichen Raumes:

$$\zeta_7 = \frac{M'}{A T_2 L_m} \Big\{ x' \left[A T_2 u' (p_2 - p_1) - (\varrho' + A p_2 u') (T_2 - T_1) \right] + T_1 T_2 (\tau_2 - \tau_1) - T' (q_2 - q_1) \Big\} \qquad (418)$$

Für die gewöhnlichen praktischen Fälle kann man aber die Differenz der beiden letzten Glieder der rechten Seite dieser Gleichung als sehr klein gegen das erste Glied vernachlässigen, ersetzt man überdies $M' x' u'$ durch das Volumen V', so ergiebt

sich auch, so lange man im Werthe $(x' u' + \sigma)$ die Grösse σ vernachlässigen darf:

$$[\text{illegible}] = \frac{V''}{L_m}\left[(p_2 - p_1) - \left(\frac{\varrho'}{u'} + A p_2\right)\frac{(T_2 - T_1)}{A T_2}\right] \quad (418)$$

Streng genommen umschliessen diese Formeln allerdings nicht den ganzen Einfluss des schädlichen Raumes, weil nämlich auch die Expansionswirkung des Dampfes von der Grösse des schädlichen Raumes mit abhängt; ich ziehe jedoch vor, diesen Einfluss bei Berechnung des Effectverlustes in Folge der unvollständigen Expansion mit in Rechnung zu bringen. Was nun den soeben erwähnten Effectverlust betrifft, so haben wir diesen noch näher zu untersuchen.

Die spezifische Dampfmenge x_2 bei Beginn der Expansion ist nach Obigem als bekannt anzusehen, ebenso das Volumen der Mischung $V'' + V_1$ und in gleicher Weise das Volumen $V'' + V$ derselben am Ende der Expansion. Bezeichnen wir den, der Dampfmenge x_2 entsprechenden, durch Gl. (259) bestimmten Exponenten der Gleichung der adiabatischen Curve mit μ', so ist nach Gl. (258) S. 341 die Expansionsarbeit:

$$\frac{(V_1 + V'')\, p_2}{\mu' - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1 + V''}{V + V''}\right)^{\mu' - 1}\right]$$

Die Arbeit des Dampfes, während des Dampfeintrittes:

$$V_1\, p_2$$

und die Gegendruckarbeit:

$$V\, p_1$$

Fassen wir die drei Werthe entsprechend zusammen und bezeichnen wir, wie früher das Expansionsverhältniss $V_1 : V$ mit ε, hingegen das Verhältniss des schädlichen Raumes zum Cylindervolumen $V'' : V$ mit ε', so ergiebt sich die Dampfarbeit L' pro Schub:

$$L' = V p_2\left[\varepsilon + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')}{\mu' - 1}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right)^{\mu' - 1}\right) - \frac{p_1}{p_2}\right] \quad (419)$$

Für vollständige Expansion wurde vorhin $L = L_m - L_1$ gefunden, wobei L_1 nach Gl. (416) zu bestimmen wäre. Subtrahiren wir davon L', so erhalten wir den Arbeitsverlust in Folge unvoll-

ständiger Expansion pro Kolbenschub $L_m - L_1 - L'$ und daher den entsprechenden Effectverlust ζ_2:

$$\zeta_2 = 1 - \frac{L_1}{L_m} - \frac{L'}{L_m}$$

Nun ist aber $L_1 : L_m$ nach vorstehenden Untersuchungen nichts weiter als $\zeta_1 + \zeta_7$, diese Werthe den Gln. (417) und (418) entnommen: wir erhalten daher für diese Maschine den Effectverlust in Folge der unvollständigen Expansion:

$$\zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \zeta_7 - \frac{Vp_2}{L_m}\left[\varepsilon + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\mu' - 1}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right)^{\mu' - 1}\right) - \frac{q_1}{p_2}\right] \quad (420)$$

und damit sind unsere Untersuchungen geschlossen, denn die übrigen Effectverluste berechnen sich genau wie bei einer Maschine ohne schädlichen Raum nach den Gln. (399) bis (401); nur ist dort L_m durch den Werth der Gl. (411) zu ersetzen.

Eine Vervollständigung könnten die Untersuchungen höchstens dadurch noch gewinnen, dass wir auch die Compression des Dampfes hinter dem Kolben und den daraus entspringenden Arbeitsverlust und Effectverlust berechnen. Eine Erweiterung in dieser Richtung ist aber so leicht zu bewerkstelligen, dass ich hier nicht weiter darauf eingehe. Es sei nur bemerkt, dass dadurch die gegebenen Formeln keine Aenderungen ihrer Form nach erleiden; nur die Masse M' im schädlichen Raum, ihr Druck p' und ihre spezifische Dampfmenge x' werden andere Werthe annehmen: und ebenso wird die disponible Arbeit der Maschine eine andere, weil sich das Gewicht M_t der Mischung von Dampf und Wasser erhöht.

Es mögen nun auch die vorstehenden Formeln durch ein Zahlenbeispiel nähere Erläuterung finden, und zwar wähle ich hierzu die schon oben berechnete Maschine von angeblich 30 Pferdestärken (S. 476). Wir setzen für den schädlichen Raum $\varepsilon = 0{,}05$, den Druck daselbst $p' = 0{,}2$ Atmosphären und nehmen an, es sei $x' = 1$, d. h. bei Beginn des Dampfeintrittes nur gesättigter Dampf ohne Wasser im schädlichen Raum vorhanden.

Für diese Verhältnisse fand sich schon vorhin das Gewicht der Flüssigkeits- und Dampfmasse, welches pro Kolbenschub vom Kessel geliefert wird

$$M_t = 0{,}1820 \text{ Kilogr.}$$

und die Dampfmenge beträgt $M_e x = 0.1547$ Kilogr. Beide Werthe gelten, da die Maschine 30 Umdrehungen in der Minute macht, auch für die Sekunde.

Das Gewicht der Mischung im schädlichen Raum fand sich $M' = 0.00197$ und die spezifische Dampfmenge im Cylinder bei Beginn der Expansion $x_2 = 0.871$. Endlich war die disponible Arbeit pro Schub

$$L_m = 9912.68 \text{ Meterkilogr.}$$

und diejenige pro Sekunde

$$N_m = 132.169 \text{ Pferdestärken.}$$

Für den Werth $x_2 = 0.871$ findet sich zunächst der Exponent μ' in der Gleichung für die adiabatische Curve nach Gl. 259 $\mu' = 1.122$.

Nun berechnet sich ganz auf dem schon auf S. 478 angedeuteten Weg:

1) Der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Prozesses nach Gl. (417) $\zeta_1 = 0.0882$
2) Der Effectverlust in Folge des schädlichen Raumes nach Gl. 418 $\zeta_r = 0.0414$
3) Der Effectverlust in Folge unvollständiger Expansion nach Gl. (420) $\zeta_2 = 0.2358$
4) Der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen Kessel- und Admissionsdruck nach Gl. (399) $\zeta_3 = 0.0174$
5) Der Effectverlust in Folge der Differenz zwischen Gegendruck und äussern Druck Gl. 400 $\zeta_4 = 0.0308$
6) Der Effectverlust in Folge des **constanten** Widerstandes in der Maschine nach Gl. 401 $\zeta_5 = 0.0216$
7) Der Effectverlust in Folge des **veränderlichen** Widerstandes, wie früher $\zeta_6 = 0.0850$

Addirt man alle Effectverluste und subtrahirt man ihre Summe von Eins, so folgt der wahre Wirkungsgrad dieser Dampfmaschine

$$\eta_e = 0.4970$$

und ihre effective Leistung:

$$N_e = \eta_e N_m = 65.69 \text{ Pferdestärken.}^{*)}$$

*) Berechnet man dieselbe Maschine nach der bekannten Formel von Pambour, welche, unsere Bezeichnung benutzt, lautet:

Für dieselbe Maschine fand sich oben S. 480 unter der Voraussetzung, dass sie keinen schädlichen Raum besitze: $\eta = 0{,}5496$ und $N_e = 57{,}873$ Pferdestärken. Die Dampfmenge stündlich pro Pferdestärke (effectiv) findet sich für diese Maschine

$$\frac{3600\, M_e x}{N_e} = 8{,}478 \text{ Kilogr.}$$

und die Wärmemenge, welche stündlich pro Pferdestärke in den Kessel zu führen ist:

$$\frac{3600\, M_e\, (x r_2 + q_2 - q_0)}{N_e} = 5287{,}1 \text{ Calorien}$$

(vergl. die entsprechenden Angaben S. 482).

Nehmen wir noch an, dass der Kessel mit Steinkohlen geheizt wird, deren Heizkraft 7500 Calorien beträgt, und setze ich den praktischen Erfahrungen entsprechend voraus, dass von der Wärmemenge, welche auf dem Roste bei vollkommenster Verbrennung frei werden würde, der Theil 0,527 in den Kessel tritt,*) so beträgt diese letztere Wärmemenge pro 1 Kilogr. Steinkohlen $0{,}527 \,.\, 7500 = 3952{,}5$ Calorien und daher würde folgen die Brennmaterialmenge (Steinkohlen) stündlich pro Pferdestärke:

$$\frac{5287{,}1}{3952{,}5} = 1{,}338 \text{ Kilogr.}$$

Dieser Werth erscheint gegen die gewöhnlichen Angaben klein, es erklärt sich das aber aus dem Umstande, dass wir eine sorgfältig construirte Maschine zu Grunde legten, die mit starker

---

$$N_e = \frac{F c\,(\varepsilon + \varepsilon')\,(a + p_2)}{75\,(1 + \delta)} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon'} + \text{logn.} \frac{1 + \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{a + f + p'}{(\varepsilon + \varepsilon')\,(a + p_2)}\right]$$

setzt man nach Pambour's Annahmen $a = 3019$, $f = 766$ und $\delta = 0{,}14$ und nimmt man überdies $p' = 2650$, so folgt:

$$N_e = 65{,}13 \text{ Pferdestärken,}$$

also wiederum recht gute Uebereinstimmung. Ich werde übrigens weiter unten zeigen, dass die Formeln von Pambour und auch diejenigen von Morin und Poncelet aus meinen Gleichungen sich leicht als Näherungsformeln ableiten lassen.

*) Vergl. des Verfassers Aufsatz: »Ueber die Anwendung der Ventilatoren als Zugmittel bei Dampfkesselfeuerungen.« Civilingenieur. B. IV. S. 127.

sechsfacher Expansion und mit Condensation arbeitet: überdies ist ohne Zweifel auch der berechnete Wirkungsgrad und die effective Leistung noch etwas zu gross, weil wir nicht alle Arbeitsverluste berücksichtigen konnten wie z. B. die Dampf- und Wärmeverluste und die berechneten Effectverluste auch nicht sicher genug bestimmt sind, da mir noch die erforderlichen experimentellen Grundlagen mangeln.

Zum Zwecke der Vergleiche und zur Discussion sind aber die Rechnungsresultate schon vollkommen brauchbar.

Zunächst zeigt sich, dass unsere Maschine eine grössere effective Leistung entwickelt, wenn sie einen schädlichen Raum besitzt: es erklärt sich das, was übrigens auch die Formeln Pambour's ergeben, einfach aus der verstärkten Expansionswirkung: die expandirende Dampfmenge ist grösser und daher nähert sich die adiabatische Curve weniger rasch der Abscissenaxe. Der Wirkungsgrad einer Maschine mit schädlichen Raum stellt sich aber jederzeit um so kleiner heraus, je grösser der schädliche Raum ist: am grössten ist er unter sonst gleichen Umständen bei einer Maschine ohne schädlichen Raum: in unserm Beispiele beträgt die Differenz der Wirkungsgrade 0,5496 — 0,4970 = 0,053 und das ist der eigentliche, dem schädlichen Raum entsprechende Verlust. Der Werth, der dafür in obiger Zusammenstellung unter 2 angegeben ist, umschliesst, wie ich schon hervorgehoben habe, nicht den ganzen Verlust. Der schädliche Raum ändert, wie obige Rechnungen zeigen, fast die Werthe aller Effectverluste, einige erhöht er, besonders den, welcher der unvollständigen Expansion entspricht, andere zieht er herab. Ich habe aber doch gefunden, dass die von mir gewählte Darstellung übersichtlicher ist, als wenn ich den ganzen Einfluss des schädlichen Raumes durch einen Ausdruck hätte darstellen wollen.

Was nun den Wirkungsgrad unserer der Betrachtung zu Grunde gelegten Maschine betrifft, die ich schon als eine sorgfältig construirte bezeichnet habe, so stellt sich der Werth

$$\eta = 0,497$$

als ein Werth heraus, wie er etwa bei mittelmässig construirten Turbinen anzunehmen ist; ich schliesse daraus, dass unsere Dampfmaschinen ganz wohl noch verbesserungsfähig sind.

Ein Blick auf obige Zusammenstellung der einzelnen Effectverluste giebt uns aber über diese Frage schon genügend Aufschluss und zeigt uns, dass die Praxis mit ihren Bestrebungen in der Verbesserung der Dampfmaschinen sich auf dem richtigen Wege befand.

Am stärksten tritt der »Effectverlust in Folge der unvollständigen Expansion« hervor: es war daher ganz sachgemäss, dass man zunächst an die Herstellung von Dampfmaschinen dachte (System von Woolf, Sims, Legavrian), die eine möglichst starke Expansion zuliessen; ebenso sachgemäss ist es aber auch, dass man in neuester Zeit die Frage nach dem vortheilhaftesten Expansionsverhältniss speziell erörtert; bei Maschinen ohne Condensation ist eine vollständige Expansion, wie sie die Theorie verlangt, schon ausführbar, nicht so bei Maschinen mit Condensation (Mitteldruck); hier führt die Bedingung vollständiger Expansion auf unförmliche Cylinderdimensionen und daher entsteht die Frage, wo die Grenze liegt; hier tritt nicht allein die Frage nach der vortheilhaftesten Benutzung der Wärme und des Brennmateriales auf, sondern auch die nach dem Anlagecapital und dessen Verzinsung*).

Weitere Bestrebungen der Praxis gingen dahin, die Maschine so einfach wie möglich zu construiren, um die constanten und variabeln Reibungswiderstände herabzuziehen, ferner die Dampfzu- und Dampfableitung, vor Allem aber die Steuerung so herzustellen, dass die Effectverluste herabgezogen werden, welche aus der Differenz der Pressungen im Kessel, Cylinder und Condensator hervorgehen. Endlich hat man auch in neuester Zeit, bei den Corliss-Maschinen mit Vortheil den schädlichen Raum möglichst vermindert. Man kann also sagen, dass die Praxis eine Verbesserung der Dampfmaschinen dadurch zu erzielen suchte, dass sie alle einzelnen Effectverluste gleichzeitig, wenn auch jeden einzelnen nur wenig herabzuziehen suchte und das ergiebt sich jetzt auch vom theoretischen Standpunkte aus, als der richtige Weg. Gerade in diesem Umstande erblicke ich den besten Beweis der Richtigkeit der von mir im Obigen entwickelten Sätze.

---

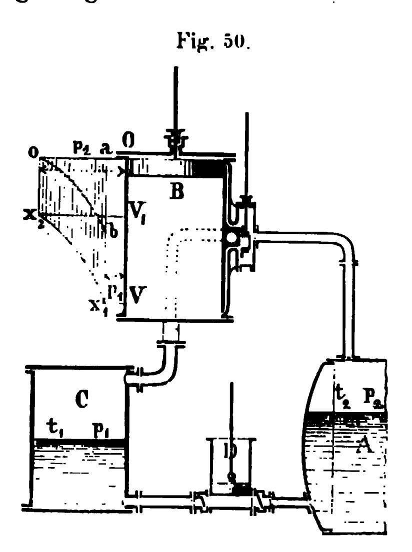
*) Vergl. hierüber die vortrefflichen Arbeiten von Völckers und Gustav Schmidt. — Völckers. Indicator. — G. Schmidt. Referat über Völckers Indicator in der Zeitschrift des österr. Ingen.-Vereins. XV. Jahrg. S. 193 u. 217.

Nur *ein* Effectverlust ist es, den man bis jetzt nicht ins Auge gefasst hat und nicht beachten konnte, ich meine denjenigen, der aus der Unvollkommenheit des Kreisprozesses der ausgeführten Dampfmaschinen entspringt. Vergleichen wir die einzelnen Effectverluste, die wir für unsere Maschine auf S. 494 zusammengestellt haben, unter einander, so zeigt sich, dass dieser mit ζ_1 bezeichnete Effectverlust neben den andern Verlusten ziemlich stark hervortritt. Ich glaube daher, *dass es sich doch vielleicht lohnen würde, die Frage näherer Prüfung zu unterwerfen, ob es nicht möglich wäre, den wirklichen Kreisprozess der Dampfmaschinen so zu verändern, dass er dem vollkommenen Prozesse, den uns die Theorie vorschreibt, näher kommt.*

Ich halte es für möglich und will hier meine Ideen über diese prinzipielle Verbesserung noch aussprechen: vor Allem kommt es darauf an, das Fehlerhafte klar darzulegen; liegen die Mängel einmal offen vor und zeigen sie sich wirklich von der Art, dass ihre Beseitigung wünschenswerth ist, dann wird man auch bald auf Mittel kommen, diese Mängel gänzlich oder wenigstens theilweise zu entfernen.

Kehren wir noch einmal zur Betrachtung einer unter den günstigsten Verhältnissen (S. 451) arbeitenden Maschine zurück.

Fig. 50.



Ich habe schon oben S. 465 erwähnt, dass die Benutzung des Dampfes *vor* dem Kolben (Eintritt und Expansion) bei unsern Dampfmaschinen richtig ist; dass aber das Fehlerhafte des wirklichen Prozesses in der Behandlung des Dampfes hinter dem Kolben liegt. In der Indicatorfläche aox_2x_1b (Fig. 50) sollte die Ecke aob wegfallen, die, wie gezeigt wurde (S. 462), die ganze Unvollkommenheit des Prozesses enthält.

Die wirklichen Indicatordiagramme enthalten diese

Flächenstück allerdings nicht, wenigstens nicht in der hier dargestellten Form; diese Diagramme haben wirklich beinahe die Gestalt $x_2 x_1 b o$, auf die auch der vollkommene Kreisprozess führt. Es wäre aber ganz unrichtig, aus der grossen Aehnlichkeit des wirklichen, mit dem, einem vollkommenen Prozesse entsprechenden Indicatordiagramm zu schliessen, dass auch der Prozess an unsern Dampfmaschinen vollkommen wäre.

Der Unterschied besteht im Folgenden. Bei den ausgeführten Dampfmaschinen schieben wir nicht die ganze hinter dem Kolben befindliche Dampfmenge in den Condensator oder in's Freie, sondern nur einen Theil; der Austrittscanal wird dann (speziell bei Maschinen mit Schiebersteuerung) abgesperrt und die zurückgebliebene Dampfmasse comprimirt. Das hat zur Folge, dass beim Beginn des Dampfeintrittes der schädliche Raum mit Dampf von höherm, als dem gewöhnlichen Gegendruck gefüllt ist und dass daher zur Füllung dieses schädlichen Raumes weniger frischer Dampf nöthig ist und daher der Effectverlust, welcher aus der Anwesenheit dieses Raumes entspringt, herabgezogen wird. Man hat dann weiter geschlossen, dass es vortheilhaft sein müsse, das Compressionsverhältniss so zu wählen, dass bei Beginn des Dampfeintrittes der schädliche Raum mit Dampf erfüllt sei, dessen Druck mit dem des frisch herbeikommenden übereinstimmt. Es kann sein, wir werden das noch näher prüfen, dass diese in der angegebenen Weise ausgeführte Compression den Effectverlust in Folge des schädlichen Raumes fast zum Verschwinden bringt, aber man darf nicht übersehen, dass hier ein neuer Arbeitsverlust, nämlich der aus der Compression hervorgehende, hinzutritt und daher entsteht noch die Frage, ob dieser Verlust nicht den beabsichtigten Gewinn vollständig aufhebt. Hierzu tritt noch ein anderer Punkt; um den schädlichen Raum in der angegebenen Art wirkungslos zu machen, genügt es nicht allein, die Compression so anzuordnen, dass schliesslich der Dampfdruck im schädlichen Raum mit dem Kesseldruck identisch wird, sondern es fragt sich noch, ob auch das Mischungsverhältniss x' im schädlichen Raum mit dem (x) des frischen Dampfes übereinstimmt. In den meisten Fällen ist aber dieser Dampf, der im schädlichen Raume sich vorfindet, wahrscheinlich überhitzt. Geht der Dampfkolben auf dem Wege $x_1 b$ (Fig. 50) zurück, so wird das diesem Wege entsprechende Dampfvolumen aus dem Cylinder

entfernt und bei der Kolbenposition b wird der zurückgebliebene Dampf wohl nur wenig Wasser beigemischt enthalten; wird dann diese Mischung comprimirt, so wird im Allgemeinen mit der Compression ein Verdampfen eines Theiles oder vielleicht des ganzen anfänglich vorhandenen Wassers verbunden sein (vergl. S. 325), und hiernach könnte es kommen, dass am Ende der Compression der Dampf im schädlichen Raum überhitzt ist; der Vorgang der Mischung dieses überhitzten Dampfes mit dem frisch herbei kommenden gesättigten Dampfe lässt sich leider bis jetzt noch nicht verfolgen; auf diese Frage kommt es aber auch hier zunächst nicht an, die Hauptsache war mir, zu zeigen, dass bei der Compression in unsern Dampfmaschinen ein Verdampfen des beigemischten Wassers stattfindet und dass unter Umständen hierbei selbst der zurückgebliebene Dampf in den überhitzten Zustand übergehen kann.

Ganz anders sind die Verhältnisse bei einer vollkommenen Maschine. Hier wird die Dampfmasse hinter dem Kolben auf dem Wege $x_1 b$ (Fig. 50) nicht theilweise aus dem Cylinder entfernt, sondern es soll die ganze Masse im Cylinder zurückgehalten und derselben, während der Kolben den Weg $x_1 b$ beschreibt, bei constantem Drucke p_1 Wärme entzogen werden (S. 431), so dass bei der Kolbenposition b eine Mischung im Cylinder sich befindet, die, wenn sie dann ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme comprimirt wird, vollständig in **Wasser** verwandelt wird. Mit kurzen Worten, beim vollkommenen Prozess muss in der Compressionsperiode aller noch vor handene Dampf niedergeschlagen werden und das erforde weiter nichts, als ein ganz bestimmtes Mischungsverhältniss bei der Kolbenposition b, welches sich leicht aus Gl. (349) S. 4 berechnet.

Nehmen wir z. B. eine Dampfmaschine ohne Condensat an ($p_1 = 1$ Atmosphäre), die mit Dampf von 5 Atmosphä arbeitet, so ergiebt für diesen Fall die angezogene Formel (ve S. 326)

$$x_4 = 0{,}0927$$

Es müsste also die Gewichtseinheit Mischung hinter Kolben bestehen aus 0,0927 Kilogr. Dampf und 0,9073 Ki Wasser. Es drängt sich hier unwillkürlich die Frage au wir nicht wirklich dieses Mischungsverhältniss hinter dem I

künstlich erzeugen und dann die Compression stattfinden lassen könnten, wie es die Theorie verlangt. Auf dem Wege $x_1 b$ des Kolben schiebt man das entsprechende Dampfquantum in den Condensator oder ins Freie und sperrt bei der Position b den Austritt ab. Nun würde sichs darum handeln, diese Dampfmenge hinter dem Kolben durch ein gleiches Gewicht Wasser zu ersetzen und gleichzeitig das erforderliche Mischungsverhältniss x_4 herzustellen. Es liesse sich das dadurch erreichen, dass man bei der Kolbenposition b diese Wassermenge in den Cylinder spritzt, und die Temperatur dieser Einspritzwassermenge so wählt, dass das erforderliche Mischungsverhältniss entsteht. Ich brauche nicht weiter hervorzuheben, dass dieser Vorschlag praktisch unausführbar ist, wir kämen damit im Grunde genommen auf die älteste Art der Condensations-Dampfmaschinen zurück, bei denen man die Condensation des Dampfes durch Einspritzen von kaltem Wasser im Dampfcylinder selbst vornahm. Ich glaube aber, es liesse sich in anderer Weise der wirkliche Kreisprozess der Dampfmaschinen verbessern und dem vollkommenen Prozess näher bringen und zwar einfach dadurch, dass man die Speisepumpe gleichzeitig als Compressionspumpe thätig sein liesse. Man könnte z. B. bei einer Condensationsmaschine den Dampf hinter dem Kolben während des Kolbenweges $x_1 b$ (Fig. 50) in den Condensator schieben, gleichzeitig müsste die Speisepumpe eine gleiche Gewichtsmenge Wasser aus dem Condensator an sich saugen. Bei der Kolbenposition b würde die Verbindung zwischen Condensator und Dampfcylinder aufgehoben, dafür aber die Verbindung zwischen Dampfcylinder und dem Cylinder der Speisepumpe hergestellt. Es würde nun, während der Kolben der Speisepumpe Raum machend noch weiter zurückgeht, der Rest der Dampfmenge im Cylinder nach dem Speisepumpencylinder geschoben und dort beim nächsten Schube durch Compression in Wasser verwandelt und dieses mit dem schon angesaugten Wasser in den Kessel zurückgepresst.

Nach meiner Idee bestände sonach die ganze Veränderung unserer Dampfmaschinen darin, dass man die Speisepumpe doppeltwirkend herstellt und ihren Cylinder grösser als bisher macht, weil hier diese Pumpe nicht blos Wasser, sondern in der zweiten Hälfte des Hubes auch Dampf anzusaugen hat. Bei Maschinen ohne Condensation müsste das Wasser, welches die Speisepumpe

ansaugt, womöglich bis 100° durch die abziehenden Gase vorgewärmt sein.

Mir scheint die Idee praktisch ganz wohl ausführbar und der nähern Ueberlegung und Weiterverfolgung werth. Das nächste Bedenken könnte nur sein, dass die Speisepumpe zu grosse Dimensionen erhält und daher die Widerstände bedeutend erhöht würden, ich glaube das jedoch nicht; der Cylinder der Speisepumpe braucht keineswegs das Volumen zu haben, welches dem Kolbenwege ba (Fig. 50) entspricht, da man den Dampfrest im Cylinder schon bis auf ein gewisses Maass comprimiren und dann erst nach dem Cylinder der Speisepumpe schieben könnte. Der Grundgedanke, der hier fest zu halten ist, besteht nur darin, durch Compression von Dampf das Speisewasser bis nahe auf die Kesseltemperatur vorzuwärmen und diese Erwärmung nicht durch Zuführung der entsprechenden Wärmemenge $M(q_2-q_1)$ im Kessel selbst zu bewerkstelligen.

Die Weiterverfolgung des hier gemachten Vorschlages würde mich zu weit von dem Ziele abführen, das ich mir in diesem Buche gesteckt habe, ich glaube aber doch, man wird später auf dem hier angedeuteten oder auf ähnlichem Wege eine weitere Vervollkommnung unserer Dampfmaschinen anstreben müssen.

Dagegen soll zum Schluss der Einfluss der Compression bei den wirklich ausgeführten Maschinen noch etwas näher betrachtet werden, damit sich ein Einblick in die Frage ergiebt, ob es zweckmässig ist, den Dampfaustrittskanal noch vor Ende des Kolbenhubes abzusperren und die zurückgebliebene Dampfmenge zu comprimiren. Es soll aber nur der Fall betrachtet werden, in welchem die Compression gerade so weit fortgesetzt wird, dass schliesslich der eingesperrte Dampf genau den Druck p_2 im Kessel erreicht; das erfordert allerdings eine bestimmte Grösse des schädlichen Raumes; es

Fig. 51.

mag jedoch im Weitern einfach angenommen werden, die entsprechende Bedingung sei erfüllt.

Es stelle in Fig. 51 (eine Figur, die wir oben S. 429 bei einer andern Untersuchung schon benutzten) der schraffirte Raum links vom Kolben K den schädlichen Raum dar; der Druck p' daselbst sei mit dem Kesseldruck p_2 identisch, die Dampf- und Flüssigkeitsmenge daselbst sei M' und die spezifische Dampfmenge x'.

Hier giebt zunächst Gl. (405) S. 484 wegen $t' = t_2$ einfach

$$M_e = M$$

d. h. im vorliegenden Falle ist das Gewicht von Dampf- und Flüssigkeit, welches pro Schub in den Cylinder tritt, gerade so gross, wie wenn gar kein schädlicher Raum vorhanden wäre. Unter Benutzung vorstehender Relation giebt dann Gl. (408) zur Berechnung der spezifischen Dampfmenge x_2 am Ende des Dampfeintrittes

$$M(x - x_2) = M'(x_2 - x') \qquad (421)$$

woraus sich bestimmt:

$$x_2 = \frac{Mx + M'x'}{M + M'}$$

Man sieht also, dass auch in diesem Falle der schädliche Raum eine Veränderung der spezifischen Dampfmenge während des Dampfeintrittes erzeugt; nur dann wenn $M' = 0$ oder $x = x'$ ist, was sich leicht in Worten aussprechen lässt, ergiebt sich $x_2 = x$, also keine solche Veränderung.

Wir denken uns nun wieder eine Dampfmaschine die unter den günstigsten, und zwar unter folgenden Verhältnissen arbeitet: 1) der Dampfdruck im Cylinder während des Dampfeintrittes ist gleich dem Kesseldruck p_2; 2) der Dampfdruck hinter dem Kolben ist mit dem äussern Druck identisch; 3) die Expansion ist eine vollständige, d. h. der Enddruck der Expansion ist gleich dem äussern Drucke; 4) die Maschine besitzt einen schädlichen Raum und die Compression des Dampfes wird so weit fortgesetzt, dass der Enddruck mit dem Kesseldruck identisch wird.

Das Indicatordiagramm dieser Maschine wird durch die Fläche $o x_2 x_3 x_4$ (Fig. 51) dargestellt, und es handelt sich nun darum, den Inhalt dieser Fläche oder was dasselbe ist, die Arbeit dieser Maschine pro Schub zu berechnen.

Nach der hier eingeführten Bezeichnung befindet sich bei Beginn der Expansion $M + M'$ Kilogr. Mischung im Cylinder. und das Volumen ist $(M + M')(x_2 u_2 + \sigma)$, während das Volumen des schädlichen Raumes $M'(x' u_2 + \sigma)$ ist, es folgt daher die Volumenzunahme mit dem Drucke multiplicirt, für die Arbeit L' während des Dampfeintrittes (in Wärmeeinheiten)

$$AL' = Ap_2 \left[(M + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x' u_2 + \sigma)\right]$$

(Vergl. S. 489.)

Die Arbeit der Expansion nach der Curve $x_2 x_3$ ist, wenn x_3 die spezifische Dampfmenge am Ende der Expansion darstellt nach Früherem:

$$AL'' = (M + M')\left[q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_3 \varrho_1\right]$$

Am Ende der Expansion ist das Volumen $(M + M')(x_3 u_1 + \sigma)$, dagegen bei Beginn der Compression (Fig. 51), in welchem Momente die spezifische Dampfmenge x_4 und die im Cylinder zurückgebliebene Dampf- und Flüssigkeitsmasse M' ist, $M'(x_4 u_1 + \sigma)$: hiernach folgt die Arbeit **während des Dampfaustrittes**:

$$AL''' = - Ap_1 \left[(M + M')(x_3 u_1 + \sigma) - M'(x_4 u_1 + \sigma)\right]$$

Endlich folgt die Arbeit der Compression:

$$AL'''' = - M' \left[q_2 - q_1 + x' \varrho_2 - x_4 \varrho_1\right]$$

Die Addition dieser vier Formeln giebt nun die ganze Arbeit L pro Schub und zwar folgt nach einigen leicht zu verfolgenden Reductionen:

$$\begin{aligned} AL = M &\left[q_2 - q_1 + x_2 r_2 - x_3 r_1 + A\sigma(p_2 - p_1)\right] \\ &+ M'\left[(x_2 - x') r_2 - (x_3 - x_4) r_1\right] \end{aligned} \quad (422)$$

Nun gelten aber für die beiden adiabatischen Curven ox_4 und $x_2 x_3$ nach S. 322 die beiden Gleichungen

$$\frac{x_3 r_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2$$

$$\frac{x_4 r_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{x' r_2}{T_2} + \tau_2$$

Aus der ersten dieser Gleichungen bestimmt sich $x_3 r_1$ und die Differenz beider führt auf die Beziehung:

$$(x_3 - x_4)\frac{r_1}{T_1} = (x_2 - x')\frac{r_2}{T_2}$$

und die Substitution in Gl. (422) giebt dann, wenn wir zugleich das Glied $A\sigma\,(p_2 - p_1)$ als sehr klein vernachlässigen:

$$AL = M\left[\frac{x_2 r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right] + \frac{M'(x_2 - x')r_2}{T_2}(T_2 - T_1)$$

Benutzen wir hier noch die Beziehung (421), so folgt endlich:

$$AL = M\left[\frac{x r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right] \qquad (423)$$

und diese Gleichung führt auf einen sonderbaren und interessanten Satz. Die Gleichung ist nämlich identisch mit Gl. (374), die wir für den auf S. 451 angenommenen Fall entwickelt haben; hier ist x die spezifische Dampfmenge der aus dem Kessel herbeikommenden Mischung, für welche Dampfmenge wir dort die Bezeichnung x_2 verwendet haben.

Wir finden also folgenden Satz: »Führt man bei einer gewöhnlichen Dampfmaschine die Compression des Dampfes hinter dem Kolben so weit fort, bis schliesslich die im schädlichen Raume eingeschlossene Mischung den Kesseldruck erreicht, so ist eine solche Maschine zu beurtheilen, wie eine Maschine *ohne* schädlichen Raum, bei der aber der Dampfaustritt *während des ganzen Schubes* stattfindet.« Die Compression ist also *keine* Verbesserung des eigentlichen Prozesses; obgleich das Indicatordiagramm der Gestalt nach mit dem einer vollkommenen Dampfmaschine übereinstimmt, so ist doch daraus allein *nicht* zu schliessen, dass auch der Prozess unserer Maschine ein vollkommener wäre; das *wahre* Indicatordiagramm, welches zugleich die Art des Kreisprozesses selbst erläutert, ist identisch mit dem in Fig. 46 S. 451 angegebenen.

Die Zusammenstellung der beiden Reihen von Zahlenwerthen für das auf S. 479 behandelte Beispiel gilt also zugleich auch für eine und dieselbe Dampfmaschine *mit* schädlichem Raum unter der Voraussetzung, dass sie einmal *mit* Compression (vollständiger), das andere Mal ohne Compression arbeitet.

Für die Praxis folgt daraus die Regel, dass die Compression des Dampfes hinter dem Kolben anzuwenden ist, am besten so weit, bis der Druck im schädlichen Raum den Kesseldruck erreicht; die effective Leistung der Maschine wird dadurch allerdings herabgezogen, der Wirkungsgrad aber wird erhöht. Man darf aber, ich wiederhole das, daraus nicht auf eine Vervollkommnung des eigentlichen Kreisprozesses schliessen. Eine Vervollkommnung in dieser Richtung kann nur auf dem von mir auf S. 501 vorgeschlagenen Wege erzielt werden.

Berechnung neu zu erbauender Dampfmaschinen.

Obgleich ich bemüht war, alle im Vorhergehenden entwickelten Formeln auf die einfachste Form zurückzuführen, so sind doch die Gleichungen nicht geeignet zur Berechnung neu zu erbauender Maschinen. Es unterliegt aber gar keiner Schwierigkeit, auf den gleichen Grundlagen fussend diesen zweiten Theil der Aufgabe zu lösen.

Ich lege hier das Diagramm Fig. 49 (S. 489) zu Grunde, wie es auch von Pambour, überhaupt bis jetzt allgemein geschehen ist. Setzen wir den ganzen Raum, den der Kolben pro Schub beschreibt V, den Kesseldruck p_2, den äussern Druck p_1, das Expansionsverhältniss ε und das Verhältniss des schädlichen Raumes zum Cylinderinhalt ε', so ergiebt sich nach Gl. 419 S. 492 die Dampfarbeit pro Schub, wenn ich von jetzt an, der Einfachheit wegen, den bekannten Exponenten in der Gleichung der adiabatischen Curve mit μ statt mit μ' bezeichne:

$$L' = V p_2 \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\mu - 1} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'} \right)^{\mu - 1} \right) - \frac{p_1}{p_2} \right] \tag{424}$$

Um nun die wahre, effective Arbeit L der Maschine zu erhalten, sind auf der rechten Seite dieser Gleichung folgende Arbeitsverluste in Abzug zu bringen:

1) Der Arbeitsverlust in Folge der Differenz des Admissions- und Kesseldruckes nach Gl. (399) S. 474

$$L_3 = \zeta_3 L_m = a V_1 p_2$$

oder da $V_1 = \varepsilon V$ ist:

$$L_3 = \alpha V \varepsilon p_2$$

2) Der Arbeitsverlust in Folge der Differenz zwischen Gegendruck und äusserm Druck nach Gl. (400)

$$L_4 = \zeta_4 L_m = \beta V p_1$$

3) Der Arbeitsverlust in Folge des constanten Widerstandes in der Maschine nach Gl. (401)

$$L_5 = \zeta_5 L_m = V f$$

Endlich 4) den Arbeitsverlust in Folge des veränderlichen Widerstandes nach den Angaben auf S. 473

$$L_6 = \zeta_6 L_m$$

oder für vorliegende Zwecke, wenn man den Coefficienten δ von Pambour einführt, d. h. diesen Verlust der effectiven Arbeit L proportional setzt

$$L_6 = \delta L \text{ (Vergl. S. 475.)}$$

Führen wir nun in Gl. (424) der Einfachheit wegen folgende Bezeichnung ein

$$\varkappa = \varepsilon + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right)^{\mu - 1}\right] \tag{425}$$

und ziehen wir auf der rechten Seite derselben Gleichung die Summe der vorstehenden Arbeitsverluste ab, so findet sich die Arbeit L dieser Maschine pro Kolbenschub:

$$L = \frac{V p_2}{1 + \delta}\left[\varkappa - \frac{(1 + \beta)\, p_1 + \alpha \varepsilon p_2 + f}{p_2}\right]$$

Macht die Maschine n Umdrehungen in der Minute, so ist ihre Arbeit N in Pferdestärken:

$$N = \frac{2 L n}{60 . 75}$$

Ist ferner s der ganze Kolbenschub und F der Kolbenquerschnitt, so folgt $V = F s$ und die mittlere Kolbengeschwindigkeit c findet sich:

$$c = \frac{2 n s}{60}$$

und daher auch die Arbeit der Maschine in Pferdestärken:

$$N = \frac{L c}{75 . s}$$

oder unter Benutzung vorstehender Gleichung für L:

$$N = \frac{F c p_2}{75 (1 + \delta)} \left[x - \frac{(1 + \beta) p_1 + \alpha \varepsilon p_2 + f}{p_2} \right] \qquad (426$$

Diese Gleichung giebt uns nun unter gleichzeitiger Benutzung von Gl. (425) das Mittel an die Hand, für die gewöhnlich vorgeschriebenen Verhältnisse den Kolbenquerschnitt F des Dampfcylinders zu berechnen.

Die Stärke N der Maschine ist gegeben; die mittlere Kolbengeschwindigkeit c wählt man. Der Druck p_2 ist derjenige im Kessel, p_1 der im Condensator oder der Atmosphärendruck (in Kilogrammen pro Quadratmeter), δ und f sind die beiden Coefficienten, die auch Pambour einführt (vergl. S. 472), die aber in Zukunft auf Grundlage der neuen Formeln neu und schärfer bestimmt werden müssten. Die Grösse α bedeutet das Verhältniss der Differenz des Kessel- und Admissionsdruckes zum Kesseldruck und ist immer ein ächter Bruch; der Werth β ist das Verhältniss der Differenz zwischen Dampfgegendruck hinter dem Kolben und dem äussern Druck (im Condensator oder im Freien) zum äussern Druck und ist im Allgemeinen auch ein ächter Bruch, bei Condensationsmaschinen allerdings nahezu Eins, in einzelnen Fällen vielleicht sogar mehr. Das der Rechnung zu Grunde gelegte Expansionsverhältniss ist ε und das Verhältniss des schädlichen Raumes zum Cylinderinhalt ist ε', für welchen Werth man nach Pambour im Mittel 0,05 setzen kann.

Auf den ersten Blick scheint nun bei der Anwendung vorstehender Formel eine gewisse Schwierigkeit aufzutreten; nach Gl. (425) ist nämlich die Hülfsgrösse x auch von μ abhängig und da dieses nach Gl. (259) S. 342 nach der Formel

$$\mu = 1{,}035 + 0{,}100\, x \qquad (427$$

berechnet werden soll, so müsste man bei Berechnung einer neuen Dampfmaschine die spezifische Dampfmenge x als bekannt voraussetzen, d. h. wissen, welche Wassermenge dem bei Beginn der Expansion im Cylinder befindlichen Dampf beigemischt ist. Glücklicherweise gestaltet sich aber die Sache einfach; ich werde

dann zeigen, dass der Werth x (unter den gewöhnlichen Verhältnissen) von **ganz** untergeordnetem Einfluss auf die Hülfsgrösse $\varkappa$ ist. Zuvor mag jedoch der Werth $\varkappa$ der Gl. (425) durch eine Näherungsformel ersetzt werden. Setze ich vorübergehend

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'} = \varepsilon_1$$

so lässt sich der Werth $\varepsilon_1{}^{\mu - 1}$ auf Grund der bekannten Reihe:

$$a^x = 1 + x \text{ logn. } a + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} \text{ logn.} a^2 + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ logn.} a^3 + \ldots .$$

durch folgenden Ausdruck ersetzen

$$\varepsilon_1{}^{\mu - 1} = 1 + (\mu - 1) \text{ logn.} \varepsilon_1 + \frac{(\mu - 1)^2}{1 \,.\, 2} \text{ logn.} \varepsilon_1{}^2 + \ldots . .$$

Nun ist nach Gl. (427) der Werth $\mu - 1$ jederzeit so klein, dass man sich vielleicht in praktischen Fällen mit den ersten beiden Gliedern dieser Reihe begnügen könnte. Man erhält dann, wenn ε_1 wieder durch seinen Werth ersetzt wird, für Gl. (425) die Näherungsformel:

$$\varkappa = \varepsilon - (\varepsilon + \varepsilon') \text{ logn. } \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}$$

oder auch:

$$\varkappa = \varepsilon + (\varepsilon + \varepsilon') \text{ logn. } \frac{1 + \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \qquad (428)$$

und das ist genau die Formel, welche schon Pambour für $\varkappa$ hinstellt und nach welcher in verschiedenen Werken Tabellen für $\varkappa$ für gewisse Werthe von ε und ε' aufgestellt worden sind. Setzt man diesen Werth von $\varkappa$ in Gl. (426) und nimmt man dort noch näherungsweise $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, so erscheint vollständig die Formel, welche Pambour zur Berechnung und Beurtheilung der Dampfmaschinen gegeben hat; nur schreibt Pambour überdies noch $a + p_2$ und $a + p_1$ statt p_2 und p_1, wobei a eine von ihm bestimmte Constante ist, die dadurch herbeitritt, dass Pambour die Dichtigkeit des Dampfes nach Navier's Formel bestimmt. (Vergl. S. 286.)

Dürfte man den schädlichen Raum ganz vernachlässigen, so fände sich noch einfacher aus Gl. (428)

$$\varkappa = \varepsilon + \varepsilon \text{ logn. } \frac{1}{\varepsilon} \qquad (429)$$

und das ist der Werth, den im Grunde genommen **Morin** dafür annimmt. Setzt man diesen Werth in Gl. (426), nimmt man $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $f = 0$, $\delta = 0$ und corrigirt man den dadurch begangenen Fehler, indem man die rechte Seite der Gleichung mit einem gewissen Faktor (der sonderbarer Weise von Manchen als Wirkungsgrad der Dampfmaschine angegeben wird), so erhält man die Formeln von **Morin-Poncelet**, nach denen man noch heutigen Tages fast alle Dampfmaschinen berechnet.

Man ersieht also, worauf schon oben hingewiesen wurde, dass sich die Gleichungen von **Pambour** und die von **Morin-Poncelet** aus meinen Formeln als Näherungsformeln ableiten lassen, und dass sonach nun auch der Zusammenhang der ältern Dampfmaschinentheorien mit der mechanischen Wärmetheorie dargelegt ist.

Um über die Zulässigkeit der für $\varkappa$ angenommenen Näherungsformeln zu entscheiden, ist noch folgende Tabelle berechnet worden, bei der ich durchgängig für den schädlichen Raum $\varepsilon' = 0{,}05$ gesetzt habe. Die ersten 4 Columnen geben nach Gl. (425) die Werthe von $\varkappa$ für die spezifische Dampfmenge $x = 1$; $0{,}9$; $0{,}8$; $0{,}7$, d. h. für die Annahme, dass der von der Maschine benutzte Kesseldampf beziehungsweise 0, 10, 20, 30% Wasser mechanisch beigemengt enthält.

Die der Grösse x entsprechenden Werthe von μ sind nach Gl. (427) berechnet.

			Werth[e] $\varepsilon' =$
Expansionsverhältniss ε	$x = 1$ $\mu = 1.135$	0.9 1.125	0.8 1.115
$^1/_6$	0.47465	0.47679	0.47937
$^1/_5$	0.52617	0.52844	0.53074
$^1/_4$	0.59578	0.59788	0.59996
$^1/_3$	0.69448	0.69627	0.69806
$^1/_2$	0.84055	0.84166	0.84277
$^2/_3$	0.93348	0.93396	0.93445
$^3/_4$	0.96363	0.96388	0.96419

Columne 5 giebt $\varkappa$ nach Gl. (428) nach Pambour und Col. 6 diejenige nach Morin-Poncelet Gl. (429).

Vergleichen wir zunächst die Werthe von $\varkappa$, welche demselben Expansionsverhältniss aber verschiedenen Werthen von x entsprechen, so erkennt man, dass die dem Dampfe (bei gewöhnlichen Verhältnissen) beigemischte Wassermenge von sehr untergeordnetem Einfluss ist. Man dürfte sich daher bei Berechnung neuer Maschinen ganz wohl erlauben, für μ einen constanten Mittelwerth, vielleicht $\mu = 1{,}120$ in Rechnung zu bringen, unter dieser Voraussetzung $\varkappa$ nach Gl. (425) berechnen und den erhaltenen Werth in Gl. (426) benutzen.

Die Werthe von $\varkappa$ nach Pambour weichen ziemlich stark ab, es hat das seinen Grund darin, dass ich bei der obigen Reihenentwicklung nur die ersten beiden Glieder benutzt habe; man sollte, wenn man den Ausdruck für $\varkappa$ durch die Reihe ersetzen will, wenigstens bei kleinem Werthe von ε noch das dritte Glied der Reihe verwenden. Ich glaube jedoch, es ist an der Zeit, die Formeln von Pambour überhaupt ganz zu verlassen.

Die Werthe von $\varkappa$ nach Morin-Poncelet schliessen sich, wie man sieht, näher an unsere genauen Werthe an. Natürlich ist das mehr zufällig: bei grösserem oder kleinerem schädlichen Raum als $\varepsilon' = 0{,}05$ wird auch die Abweichung grösser. Immerhin aber können wir bei den gewöhnlichen mittlern Verhältnissen

on $\varkappa$ .05			
0.7 1.105	Nach Pambour	Nach Morin-Poncelet	Expansionsverhältniss ε
0.48178	0.50861	0.46530	$^1/_6$
0.53307	0.55877	0.52189	$^1/_5$
0.60217	0.62583	0.59657	$^1/_4$
0.69986	0.71959	0.69953	$^1/_3$
0.84383	0.85564	0.84657	$^1/_2$
0.93498	0.94039	0.93698	$^2/_3$
0.96447	0.96754	0.96576	$^3/_4$

von diesem Zufall Nutzen ziehen, d. h. x nach Gl. (429) berechnen und in Gl. (426) substituiren.

Die letztere Gleichung giebt dann:

$$N = \frac{F c p_2 \varepsilon}{75\,(1+\delta)} \left[1 + \text{logn.} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{(1+\beta)\,p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{\varepsilon p_2} \right] \qquad (430)$$

Freilich fordert auch diese Gleichung noch die Bestimmung der Werthe δ, α, β und f; so lange über diese Grössen nichts Bestimmtes vorliegt, wird man in der Praxis doch bei der Formel von Morin-Poncelet verbleiben, d. h. diese Grössen Null setzen und den Fehler, den man dadurch begeht, durch einen Faktor φ corrigiren, der mit der Stärke der Maschine variirt, also wie Morin schreiben:

$$N = \varphi \cdot \frac{F c p_2 \varepsilon}{75} \left[1 + \text{logn.} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon} \right] \qquad (431)$$

Jedenfalls sollte man aber unterlassen, die Grösse φ mit dem Namen »Wirkungsgrad«, der ihrem Wesen gar nicht entspricht, zu bezeichnen, weit besser ist der Name »Constructionscoefficient«.

Sind die Hülfsgrössen δ, α u. s. w. durch Versuche einmal näher bestimmt, dann wird man aber besser die Dampfmaschinen nach den Gln. (425) und (426) berechnen.

Die Beurtheilung einer berechneten oder bestehenden Maschine sollte man aber nicht mehr nach den zuletzt gegebenen Formeln vornehmen; hier, denke ich, wird man in Zukunft den von mir durch die obigen Untersuchungen vorgezeichneten Weg einschlagen.

Es wäre mir leicht alle meine Untersuchungen noch weiter auszudehnen, auch würden mir schon die schönen Versuche Völcker's Anhaltepunkte genug geben, die Constanten meiner Formeln schärfer zu bestimmen. Ich begnüge mich aber mit dem Gegebenen; es konnte bei dem Zwecke, den ich mit dem vorliegenden Werke verband, nicht in meiner Absicht liegen, eine vollständige Dampfmaschinentheorie zu schreiben, ich konnte hier nur die Grundlagen einer solchen geben und wollte nur den Beweis liefern, dass die mechanische Wärmetheorie schon bei ihrer jetzigen Ausbildung uns vollkommen in den Stand setzt, den Bedürfnissen der mechanischen Technik zu entsprechen.

VIERTER ABSCHNITT.

Untersuchungen über das Verhalten

fester und flüssiger Körper.



Umformung der Hauptgleichungen für feste und flüssige Körper.

Die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie konnten bis jetzt nur in einigen wenigen Fällen bei Untersuchung der Wärmeerscheinungen bei festen und flüssigen Körpern Anwendung finden, weil uns noch die erforderlichen Versuchsresultate fehlen. Die wenigen theoretischen Untersuchungen, die übrigens zum Theil von James Thomson zuerst angestellt wurden, führten aber allein schon auf so merkwürdige und interessante Entdeckungen, dass wir nicht unterlassen dürfen, einen Theil derselben hier anhangsweise beizufügen, um so mehr als dieselben als weitere Beweise der Richtigkeit der neuern Anschauung über die Wärme dienen können, da ein Theil dieser Untersuchungen auf experimentellem Wege schon volle Bestätigung gefunden hat.

Man muss bei der Untersuchung des Verhaltens fester und flüssiger Körper in gleicher Weise, wie dies oben bei Gasen und Dämpfen der Fall war, unterscheiden, ob der in Betrachtung stehende Körper während der Versuche den Aggregatzustand ändert oder nicht.

Wir betrachten zunächst den letzteren Fall, indem wir voraussetzen, der Körper bleibe im Laufe der mit ihm vorgenommenen Veränderungen fest oder flüssig.

Die allgemeinen Gleichungen von S. 77 gelten auch hier, doch sollen sie zunächst, bevor wir von denselben Gebrauch machen, in einer andern Weise geschrieben werden. Es sei wieder v das Volumen der Gewichtseinheit des Körpers, t seine Temperatur nach Celsius gemessen und $T = a + t = 273 + t$ dessen absolute Temperatur; ferner sei p der spezifische Druck,

denselben in dem auf S. 24 angegebenen Sinne aufgefasst. Gerade bei festen und flüssigen Körpern ist es zweckmässig, sich den Körper mit einer Hülle versehen zu denken, die gegen dessen Oberfläche überall den gleichen Druck p ausübt: bei Gasen und Dämpfen, bei denen wir gewöhnt sind, sie uns in abgeschlossenen Räumen zu denken, war es unnöthig, ausdrücklich noch auf diesen Umstand hinzuweisen; bei festen Körpern ist es aber nothwendig, da bei diesen sehr häufig der Fall auftritt, dass seine Oberflächentheile verschiedenen äussern Druck erleiden. Bei Flüssigkeitsmassen haben wir, wenn wir vom Einflusse des Gewichts absehen, den Fall, wie bei Gasen und Dämpfen, da sie einen äussern Druck nach allen Seiten gleichmässig fortpflanzen und in Gefässe eingeschlossen werden müssen.

Bei allen Körpern besteht nun eine Beziehung zwischen Volumen, Druck und Temperatur:

$$t = f(p, v)$$

die bekannt sein muss, wenn wir von den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie Gebrauch machen wollen. Bei Gasen und gesättigten Dämpfen ist über diese Beziehung so viel bekannt, dass wir im Obigen sehr gründliche Untersuchungen über diese Art von Körpern anstellen konnten, aber schon bei Betrachtung der überhitzten Dämpfe scheiterten wir an der Unkenntniss dieser Beziehung. Wenig günstiger gestaltet sich die Sache bei festen und flüssigen Körpern, hier wissen wir nur, dass unter atmosphärischem Drucke das Volumen v der Gewichtseinheit nahe gleichmässig mit der Temperatur t wächst, d. h. dass der Ausdehnungscoefficient unter diesen Umständen innerhalb gewisser Grenzen constant angenommen werden kann; nur das Verhalten des Wassers ist in dieser Beziehung, aber ebenfalls nur unter atmosphärischem Drucke, etwas genauer bekannt.

Die Differentiation obiger Gleichung giebt:

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv$$

Wir werden nun aber, um in den weitern Untersuchungen Verwechslungen zu vermeiden, die beiden partiellen Differentialquotienten etwas schärfer dadurch bezeichnen, dass wir denselben als Index immer diejenige Grösse beifügen, w[illegible] der [illegible]

tiation als constant angesehen wurde. Wir schreiben daher die vorstehende Gleichung künftig in der Form:

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right)_v dp + \left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv \tag{432}$$

Die Differentiation obiger Beziehung führt überhaupt auf folgende sechs partielle Differentialquotienten:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v \quad \left(\frac{dt}{dp}\right)_v \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_p \quad \left(\frac{dt}{dv}\right)_p \quad \left(\frac{dp}{dv}\right)_t \quad \left(\frac{dv}{dp}\right)_t$$

von denen aber die beiden mit gleichem Index versehenen in folgender bekannten Beziehung zu einander stehen:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{dp}{dt}\right)_v} \; ; \; \left(\frac{dt}{dv}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)_p} \; ; \; \left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_t} \tag{433}$$

Die drei Paare von Diffenrentialquotienten stehen in einem weitern Zusammenhang.

Setzen wir z. B. p als Funktion von t und v voraus, so ist

$$dp = \left(\frac{dp}{dt}\right)_v dt + \left(\frac{dp}{dv}\right)_t dv$$

Ist p constant, so folgt $dp = 0$ und aus Gl. (432)

$$dt = \left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv$$

Die Substitution dieses Werthes dt in vorstehende Formel giebt, da $dp = 0$ ist:

$$0 = \left(\frac{dp}{dt}\right)_v \left(\frac{dt}{dv}\right)_p + \left(\frac{dp}{dv}\right)_t \; .$$

und wenn man diesen Werth mit $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t$ dividirt und die dritte der unter (433) angegebenen Beziehungen benutzt, findet sich:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v \left(\frac{dt}{dv}\right)_p \left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -1 \tag{434}$$

ifferentialquotienten umkehren kann

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_v \left(\frac{dv}{dt}\right)_p \left(\frac{dp}{dv}\right)_t = -1\text{ *)}$$

Von diesen Formeln werden wir im Weitern nützlichen Gebrauch machen. Die Hauptgleichungen S. 77 schreiben sich nun auch in folgender Gestalt:

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1 \qquad \text{I}$$

$$Y\left(\frac{dt}{dp}\right)_v - X\left(\frac{dt}{dv}\right)_p = T \qquad \text{II}$$

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A\left[X dp + Y dv\right] \\ &= A\left(\frac{dp}{dt}\right)_v \left[X dt + T dv\right] \\ &= A\left(\frac{dv}{dt}\right)_p \left[Y dt - T dp\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{III}$$

Führen wir nun, wie es bei der Betrachtung der permanenten Gase (S. 114) geschehen ist, die spezifische Wärme des Körpers bei constantem Drucke und die bei cônstantem Volumen ein. beide wie dort mit c_p und c_v bezeichnet, so lassen sich die beiden Funktionen X und Y bestimmen. Man hat nur im Weitern im Auge zu behalten, dass die spezifischen Wärmen nicht mehr. wie bei Gasen, als constant anzusehen sind, sondern dass man sie als Funktionen von p und v oder von t und v oder p und t aufzufassen hat.

Wird die Gewichtseinheit eines Körpers bei constantem Drucke um dt erwärmt, so ist die erforderliche Wärmemenge dQ_p nach der gewöhnlichen Schreibweise:

$$dQ_p = c_p\, dt$$

Wird er hingegen bei constantem Volumen erwärmt, so ist:

$$dQ_v = c_v\, dt$$

---

*) Vergl. Clausius: Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme For-men der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Viertel[illegible] der naturf. Gesellschaft in Zürich. 1865. — Die Haupt[illegible] übrigens dort nicht in der von mir benutz[illegible]

Für den erstern Fall ergiebt aber auch die dritte der Gleichungen III, weil $dp = 0$ ist:

$$dQ_p = A\,Y\left(\frac{dv}{dt}\right)_p dt$$

und für den andern Fall die zweite Gleichung unter III, weil $dv = 0$ ist:

$$dQ_v = A\,X\left(\frac{dp}{dt}\right)_v dt$$

Durch Gleichsetzen folgt dann unter Benutzung der Beziehungen (433)

$$X = \frac{c_v}{A}\left(\frac{dt}{dp}\right)_v \tag{435}$$

$$Y = \frac{c_p}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right)_p \tag{436}$$

Benutzen wir die vorstehenden Werthe in obigen fünf Hauptgleichungen, so ergiebt sich:

$$A = \frac{d}{dp}\left[c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)_p\right] - \frac{d}{dv}\left[c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)_v\right] \qquad \text{I}^a$$

$$A\,T = (c_p - c_v)\left(\frac{dt}{dv}\right)_p\left(\frac{dt}{dp}\right)_v \qquad \text{II}^a$$

$$\left.\begin{aligned} dQ &= c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)_v dp + c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv \\ dQ &= c_v dt + A\,T\left(\frac{dp}{dt}\right)_v dv \\ dQ &= c_p dt - A\,T\left(\frac{dv}{dt}\right)_p dp \end{aligned}\right\} \qquad \text{III}^a$$

Diese Gleichungen gelten allgemein, wenn der Körper seinen Aggregatzustand nicht ändert und seine Zustandsänderung auf umkehrbarem Wege erfolgen. Die Wärmecapacitäten c_p und c_v sind dabei als Veränderliche angesehen; da bis jetzt von diesen beiden Werthen nür die spezifische Wärme c_p bei constantem Drucke, hauptsächlich durch Regnault's Versuche, für feste und flüssige Körper näher bekannt ist, so sind wir im Gebrauche dieser Formeln noch sehr beschränkt, um so mehr, als c_p auch

nur für den Fall bestimmt ist, dass der Körper unter atmosphärischem Drucke steht und hier wiederum nur bekannt ist, dass der Werth langsam mit der Temperatur zunimmt. Das, was hierüber bekannt ist in Verbindung mit den Resultaten von Versuchen über Ausdehnung der Körper durch die Wärme und über deren Volumenänderung durch verstärkten äussern Druck erlaubt uns mit Hülfe obiger Gleichungen einige Probleme zu lösen.

Von der Wärmecapacität der Körper.

Für feste und flüssige Körper liegen für die spezifische Wärme bei constantem Drucke eine Reihe von Bestimmungen vor; nicht so für die spezifische Wärme bei constantem Volumen: es lässt sich aber, wie ich zeigen werde, auf ähnlichem Wege wie es bei Betrachtung der permanenten Gase geschehen ist, auch bei festen und flüssigen Körpern diese Grösse wenigstens näherungsweise bestimmen.

Auf Grund bekannter Versuche lassen sich zwei der in obigen allgemeinen Formeln vorkommenden Differentialquotienten als ermittelt ansehen.

Denken wir zunächst an eine tropfbare Flüssigkeit und nennen wir das Volumen der Gewichtseinheit bei 0° Temperatur: v_0, so schreibt man gewöhnlich das Volumen v für die Temperatur t:

$$v = v_0 (1 + \alpha t) \qquad (437)$$

Man nennt dabei α den Ausdehnungscoefficienten und denkt sich ausdrücklich Erwärmung und Ausdehnung finde bei constantem Drucke statt. Die gewöhnlichen Bestimmungen des Ausdehnungscoefficienten gelten allerdings speziell für atmosphärischen Druck und daher erscheint es zweckmässig, bis auf Weiteres bei Anwendung der letzten Gleichung noch auszusprechen, dass sie für constanten, atmosphärischen Druck gültig sei. Ferner betrachten wir den Ausdehnungscoefficienten α als eine Funktion der Temperatur, in vielen Fällen ist allerdings der Erfahrung gemäss α constant oder nahezu constant zu setzen.

Differentiirt man die letzte Gleichung und deuten wir durch Hinzufügen von p als Index an, dass eben p constant ist, so folgt:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = v_0\left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right) \tag{438}$$

Der eine der in obigen Formeln stehenden Differentialquotienten lässt sich sonach unter den angegebenen Verhältnissen als berechenbar ansehen.

Eine andre Reihe von Versuchen giebt uns das Mittel an die Hand, die Volumenänderung dv zu ermitteln, wenn der äussere Druck p um dp wächst und wenn dabei die Temperatur t constant oder wenigstens im Anfange und am Ende der Volumenänderung gleich gross ist. Denken wir zunächst wieder an einen flüssigen Körper, so wird im Allgemeinen mit einer Erhöhung des äussern Druckes eine Volumenverminderung verbunden sein. Ist v das Volumen beim Druck p und der Temperatur t, so lässt sich auf Grund der angestellten Versuche die Gleichung

$$dv = -\beta v dp$$

aufstellen, wobei β der Compressionscoefficient genannt werden mag; derselbe stellt das Verhältniss der Volumenänderung zum Gesammtvolumen entsprechend einer gewissen Druckzunahme dar, und dieser Werth ist für einige Fälle bekannt. Da hierbei ausdrücklich die Temperatur t als constant vorausgesetzt wurde, so schreibt sich die Formel besser in folgender Art:

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\beta v$$

oder wenn wir noch annehmen, der Körper stand ursprünglich unter atmosphärischem Druck, und wenn wir hiernach Gl. (437) benutzen:

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\beta v_0 (1 + \alpha t) \tag{439}$$

Gewöhnlich ist allerdings α so klein, dass man in dieser Gleichung das Glied αt vernachlässigen kann.

Setzen wir nun zunächst die beiden Differentialquotienten der Gln. (438) und (439) in Gl. (434), so erhalten wir:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \frac{\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}}{\beta(1+\alpha t)} \qquad 440)$$

und diese neue Formel setzt mich in den Stand, wenigstens näherungsweise zu berechnen, wie gross die Druckzunahme dp ist, wenn ein Körper bei constantem Volumen um dt erwärmt wird.

Denke ich mir z. B. eine Flüssigkeit ringsum von einem Gefässe eingeschlossen und übt die Flüssigkeit gegen die Gefässwände den Druck von einer Atmosphäre aus, so würde bei einer Temperaturerhöhung dt dieser Druck um dp wachsen, wenn diese flüssige Masse bei constantem Volumen erwärmt würde, d. h. wenn die Gefässwände dem Drucke nicht nachgeben würden. So ist z. B. für flüssiges Quecksilber für die Temperaturgrenzen $0 - 100^0$ der Ausdehnungscoefficient nach Regnault $\alpha = 0{,}00018153$; ferner nach Grassi der Compressionscoefficient unter der Voraussetzung, dass die Druckzunahme in Atmosphären gemessen wird: $\beta = 0{,}000\,00295$, daher ergiebt die Formel 440) für flüssiges Quecksilber von mittlerer Temperatur:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = 61{,}5$$

Setzen wir die Wachsthümer endlich und nehmen wir die Temperaturzunahme $dt = 1^0$ Celsius, so nimmt also in Folge

Flüssigkeit	1 Temperatur t Celsius	2 Compressionscoefficient β nach Grassi	3 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = \left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right)$
Wasser . .	0^0	0.000 0503	— 0.000 061 045
» . .	25	0.000 0456	+ 0.000 254 858
» . .	50	0.000 0441	+ 0.000 444 895
Aether . .	0	0.000 111	+ 0.001 480 260
» . .	14	0.000 140	+ 0.001 594 220
Alkohol . .	7.3	0.000 0828	+ 0.001 055 647
» . .	13.1	0.000 0904	+ 0.001 070 990
Quecksilber.	0^0	0.000 00295	+ 0.000 179 054

dieser geringen Temperaturerhöhung der Druck des Quecksilbers gegen die Gefässwände, vorausgesetzt, die Wandungen wären vollkommen starr und unnachgiebig von 1 auf 61,5 Atmosphären zu. Ich nenne den Werth $\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$ die spezifische Druckzunahme bei constantem Volumen und werde sie auch im Weitern in Atmosphären messen, da die von Grassi*) angegebenen Werthe des Compressionscoefficienten für den Fall gelten, dass die Druckänderugen in Atmosphären gemessen werden. Die folgende Zusammenstellung enthält u. A. die Werthe des Com-

---

*) »Grassi, Sur la compressibilité des liquides.« Annales de chimie et de physique. IIIme Série. t. 31.

Vergl. auch:

»Krönig« Journal für Physik und phys. Chemie des Auslandes. B. 2. Berlin 1851.

»Wüllner«, Lehrbuch der Experimentalphysik. B. 1. S. 187.

Die Angaben von Grassi bestätigen übrigens recht gut die ältern Angaben von Aimé:

»Annales de chim. et de phys.« S. III, T. VIII, pag. 257.

»Poggendorff's Annalen« 2. Ergänzungsband S. 228;

sowie die Bestimmungen von Colladon und Sturm:

»Mémoires de l'académie des sciences« (Paris 1827). Tome V des savants étrangers.

»Sur la compression des liquides.« Gekrönte Preisschrift.

4 $\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\beta(1+\alpha t)\,v_0$	5 $\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$ nach Gl. (440)
— 0.000 0503 v_0	— 1.213
— 0.000 0457	+ 5.576
— 0.000 0446	9.975
— 0.000 111	13.335
— 0.000 140	11.387
— 0.000 0834	12.657
— 0.000 0916	11.692
— 0.000 00295	60.695

pressionscoefficienten β nach Grassi für Wasser, Aether. Alkohol und Quecksilber.

Der Ausdehnungscoefficient α ist nach der Formel

$$\alpha = a + bt + ct^2$$

angenommen worden, woraus sich:

$$\alpha + t\frac{d\alpha}{dt} = a + 2bt + 3ct^2$$

$$1 + \alpha t \quad = 1 + at \quad + bt^2 + ct^3$$

berechnet, wenn man nach Kopp's Angaben substituirt:

für **Wasser:**	a	b	c
0 — 25°;	— 0,000 061 045;	+ 0,000 007 7183;	— 0,000 000 037 34
25 — 50°;	— 0,000 065 415;	+ 0,000 007 7587;	— 0,000 000 035 49
für **Aether:**	+ 0,001 480 26;	+ 0,000 003 503 16;	+ 0,000 000 027 06
für **Alkohol:**	+ 0,001 041 39;	+ 0,000 000 7836;	+ 0,000 000 017 61

Die Werthe der letzten Columne geben »die spezifische Druckzunahme bei constantem Volumen:« bei Wasser wächst dieser Werth mit der Temperatur; denkt man sich also Wasser von 25° oder 50° Temperatur unter atmosphärischem Druck und erhöht man die Temperatur bei constantem Volumen um 1° Celsius, so wächst der Druck gegen die Gefässwände beziehungsweise um 5,57 und 9,97 Atmosphären; bei einer Temperatur unter 4° Celsius verliert der Werth seine Bedeutung, da hier mit der Temperaturerhöhung eine Zusammenziehung, eine Verminderung des Volumens verbunden ist.

Bei Quecksilber ist die spezifische Druckzunahme bei constantem Volumen weit grösser, als bei Wasser, und bei Aether und Alkohol scheinen die Werthe mit der Temperatur abzunehmen; während sich bei Wasser gerade das Entgegengesetzte zeigt. Es hängt das mit der merkwürdigen Erscheinung zusammen, dass der Compressionscoefficient β bei Wasser mit wachsender Temperatur abnimmt, während er nach Grassi bei den andern von ihm untersuchten Flüssigkeiten wächst. Grassi vermuthet sogar, dass bei Wasser

barkeit, eine ähnliche Ar

Dichtigkeit; in der

gewissen Temperatur (ca. $1,5^0$) der Compressionscoefficient am grössten zu sein.

Die Werthe der drei in vorstehender Zusammenstellung angegebenen Differentialquotienten können wir nun in die allgemeinen Gleichungen, I^a, II^a u. III^a S. 519 einsetzen und erhalten dadurch das Mittel, für die aufgeführten Flüssigkeiten noch eine Reihe interessanter Fragen zu beantworten. Zunächst soll die spezifische Wärme bei constantem Volumen (c_v) berechnet werden, diejenige für constanten Druck ($c_p = dq : dt$) ist aus Regnault's Versuchen und nach dessen empirischen Formeln (S. 262) leicht zu ermitteln.

Gl. II^b giebt sofort:

$$c_v = c_p - AT\left(\frac{dv}{dt}\right)_p\left(\frac{dp}{dt}\right)_v \tag{441}$$

Benutzen wir in dieser Gleichung obige Werthe, indem wir aber die Werthe der letzten Columne mit 10334 multipliciren, weil in vorstehender Formel dp in Kilogrammen pro Quadratmetern und nicht in Atmosphären zu setzen ist, so ergeben sich die Grössen der folgenden Zusammenstellung. Es wurde dabei überdies bei der Berechnung $T = 273 + t$; $A = 1 : 424$ gesetzt und nach den Gln. 190, 191, 192 S. 262 c_p bestimmt, durch die Formeln:

Für Wasser: $c_p = \frac{dq}{dt} = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2$

» Aether: $= 0{,}52901 + 0{,}000\,5918\,t$

» Alkohol: $= 0{,}54754 + 0{,}00\,22436\,t + 0{,}000\,006618\,t^2$

» Quecksilber: $= 0{,}03332$

Ferner ist hier das spezifische Volumen v_0 der Flüssigkeit bei 0^0 Temperatur mit den auf S. 288 angegebenen Werthen von σ identisch.

Flüssigkeit	Temperatur t	Spezifische Wärme bei constantem Drucke (Regnault) c_p	Spezifische Wärme bei constantem Volumen c_v	$\frac{c_p}{c_v}$
Wasser . . .	0°	1.0000	0.9995	1.0005
" . . .	25	1.0016	0.9913	1.0104
" . . .	50	1.0042	0.9693	1.0360
Aether . . .	0	0.5290	0.3583	1.476
" . . .	14	0.5373	0.3722	1.443
Alkohol . . .	7.3	0.5643	0.4456	1.266
" . . .	13.1	0.5781	0.4646	1.244
Quecksilber . .	0	0.03332	0.0280	1.190

Neu sind in dieser Tabelle die Werthe der spezifischen Wärme bei constantem Volumen und die Werthe $c_p : c_v$; man erkennt, dass auch hier wieder das Wasser sich anders, als die andern der angegebenen Flüssigkeiten verhält; bei Wasser nimmt c_v entschieden mit der Temperatur ab, während c_p und das Verhältniss $c_p : c_v$ mit der Temperatur wächst; bei Aether und Alkohol verhält es sich mit c_v und $c_p : c_v$ gerade umgekehrt*).

Da die oben entwickelten Formeln allgemein gültig sind, so könnten wir sie nun im Weitern auch für feste Körper in Anwendung bringen und beispielsweise für einzelne Metalle die spezifische Wärme bei constantem Volumen ermitteln. Man stösst

---

*) Die Wärmecapacität bei constantem Volumen für Wasser und Quecksilber wurde vom Verfasser zuerst in der ersten Auflage vorliegender Schrift berechnet. Die dort gegebenen Werthe weichen etwas ab von den oben angeführten, theils weil andere Versuchsresultate zu Grunde gelegt wurden, theils auch, weil die Rechnungen eine Ungenauigkeit enthalten, die allerdings von ganz geringem Einfluss auf die Resultate sind. Es wurden dort die Differentialquotienten $\left(\frac{dv}{dp}\right)_t$ und $\left(\frac{dv}{dp}\right)$, letzterer für den Fall $dQ = 0$ genommen, [illegible] wechselt; beide sind aber bei Wasser nahezu gleich.

Später ist nur Clausius (Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Vergl. das Citat S. 518) auf die Frage zurückgekommen, berechnet c_v für Wasser und findet dafür Werthe, die [illegible] denen des Textes und mit [illegible] früher von mir berechneten übereinstimmen.

aber hier auf eine gewisse Unbestimmtheit. Für den Ausdehnungscoefficienten α des festen Körpers müsste man die cubische Ausdehnung ins Auge fassen, während die Versuche direct auf die lineare Ausdehnung führten. Hierin liegt aber keine Schwierigkeit, da leicht der Ausdehnungscoefficient für cubische Ausdehnung aus dem der linearen bestimmt werden kann; anders steht es aber mit dem Compressionscoefficienten β. In obigen Formeln bedeutet p den spezifischen Druck, der an allen Theilen der Oberfläche gleich gross angenommen wird; wenn wir daher an Compression, an Zusammendrücken eines festen Körpers denken, so müssen wir voraussetzen, der feste Körper werde von allen Seiten her einem erhöhten Drucke ausgesetzt und es müsste nun durch Versuche bekannt sein, welche Volumenänderung eine gewisse Druckerhöhung bei constanter Temperatur hervorbringt.

Die Versuche über die Elasticität fester Körper sind aber in anderer Weise ausgeführt: man hat prismatische Körper nur in der Längenrichtung gewissen Pressungen (auf Zug- oder Druck-) ausgesetzt und die Längenänderungen beobachtet. Es fragt sich daher, ob man aus diesen Beobachtungen auf die Volumenänderungen schliessen kann, welche dieselbe Druckerhöhung hervorbringen würde, wenn sie an der ganzen Oberfläche und nicht blos an den beiden Endflächen des prismatischen Körpers wirken würde.

Ist l die Länge eines prismatischen Stabes und λ dessen Verkürzung, wenn an den Endflächen pro Quadrateinheit die Kraft p wirkt, so besteht, wenn der Elasticitätsmodul des Materiales mit E bezeichnet wird, die Beziehung:

$$p = \frac{\lambda}{l} E$$

Nun zeigte früher Poisson, dass die cubische Zusammendrückbarkeit, wenn der Druck p auf jeder Flächeneinheit der ganzen Oberfläche des Prismas wirkt $\frac{3}{2}\frac{\lambda}{l}$ gesetzt werden soll. Es wäre sonach, wenn v das Volumen und δv die Volumenverminderung darstellt:

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{l} = \frac{3}{2}\frac{p}{E}$$

In neuerer Zeit hat jedoch **Wertheim** gefunden, cubische und lineare Zusammendrückbarkeit als gleich men sind; man könnte daher für feste Körper (innerl Elasticitätsgrenze) annehmen:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{E}$$

woraus folgt, wenn wir, was genau genug ist, statt v d fische Volumen v_0 für 0° Temperatur einsetzen:

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\frac{v_0}{E}$$

Setzen wir ferner den cubischen Ausdehnungscoeffic constant, so folgt nach Gl. (438)

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = \alpha v_0$$

und durch Substitution in Gl. (434)

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \alpha E$$

Das wäre für einen festen Körper die »spezifische D nahme bei constantem Volumen«. Sollte dp in Atmosphär messen werden, so wäre die rechte Seite der letzten Gle noch durch 10334 zu dividiren.

Benutzen wir diese Formeln in Gl. II^a S. 519 so ergieb

$$c_p - c_v = A T v_0 \alpha^2 E$$

Ist noch γ die Dichtigkeit, d. h. das Gewicht von 1 C meter Wasser (1000 Kil.), ε das spezifische Gewicht des Kö in Hinsicht Wasser, so folgt

$$v_0 = \frac{1}{\gamma\varepsilon}$$

und sonach auch:

$$c_p - c_v = \frac{A T \alpha^2 E}{\varepsilon\gamma}$$

und mit Hülfe dieser Formel lässt sich die spezifische Wär für constantes Volumen berechnen.

So ist z. B. für Silber der lineare Ausdehnungscoefficient nach Laplace 0,000 019 097; hiernach für die cubische Ausdehnung das dreifache genommen: $\alpha = 0{,}000\,057\,291$, was freilich nur näherungsweise richtig ist.

Der Elasticitätscoefficient (pro 1 Quadratmeter Querschnitt) ist für Silberdraht

$$E = 7357 \cdot 1000^2$$

Das spezifische Gewicht setze ich $\varepsilon = 10{,}511$ und berechne nun den Ausdruck auf der rechten Seite vorstehender Gleichung für $t = 0$, d. h. $T = 273^\circ$.

Man erhält hiernach für Silber:

$$c_p - c_v = 0{,}00148$$

Da nun nach Regnault $c_p = 0{,}05701$ gesetzt werden soll, so fände sich für die spezifische Wärme des Silbers bei constantem Volumen $c_v = 0{,}05553$ und hiernach $c_p : c_v = 1{,}0266$. Edlund*) fand in neuester Zeit auf ganz anderm Wege für das letztere Verhältniss 1,0203.

Auf grosse Genauigkeit machen die obigen Formeln aus naheliegenden Gründen keinen Anspruch, wir unterlassen es daher, in der gleichen Richtung hier weiter vorzugehen und werden auch im Weitern unser Augenmerk mehr auf das Verhalten der Flüssigkeiten richten, da diese den Bedingungen, unter denen obige Formeln gelten, besser entsprechen.

Ueber die Erwärmung der Körper durch Compression.

Bei den Betrachtungen, die wir bis jetzt über die Compression der Körper angestellt haben, wurde vorausgesetzt, dass die Temperatur während der Zusammendrückung constant erhalten werde oder dass wenigstens im Anfange und am Ende der Beobachtung die Temperatur die gleiche sei. Diese Bedingung ist es, welche bei den Compressionsversuchen, deren Resultate wir oben benutzt haben, erfüllt worden ist und sie

*) Poggendorff's Annalen. B. 126. S. 566.

setzt voraus, dass dem Körper während des Ueberganges Wärme von Aussen mitgetheilt oder entzogen wurde. Wir wollen aber nun das Verhalten der Körper bei der Compression unter der Voraussetzung prüfen, dass während der Compression, d. h. während des Ueberganges aus einem Zustand in den andern dem Körper Wärme weder mitgetheilt noch entzogen werde.

Zur Lösung der hier vorkommenden Fragen haben wir in den Gleichungen IIIa einfach $dQ = 0$ zu setzen und erhalten daher, wie sich leicht übersieht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dp} &= -\frac{c_v}{c_p}\left(\frac{dt}{dp}\right)_v\left(\frac{dv}{dt}\right)_p \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{c_v}{AT}\left(\frac{dt}{dp}\right)_v \\ \frac{dt}{dp} &= +\frac{AT}{c_p}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p \end{aligned}\right\} \quad (446)$$

Die Verhältnisse der linken Seite dieser Gleichungen gelten nun unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass $dQ = 0$ ist, wir wollen das dadurch andeuten, dass wir die Quotienten in Klammern schreiben und Q als Index ansetzen. Die erste dieser drei Gleichungen giebt dann, wenn wir Gl. (434) benutzen:

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q = \frac{c_v}{c_p}\left(\frac{dv}{dp}\right)_t \quad (447)$$

Nach dieser Gleichung lässt sich jetzt die Volumenverminderung dv für eine gewisse Druckzunahme dp für $dQ = 0$ berechnen, wenn dasselbe Verhältniss für $t =$ Const. bekannt ist. Das Letztere ist aber nach Obigem der Fall; benutzen wir Gl. (439), so berechnet sich direct:

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q = -\frac{c_v}{c_p}\beta v_0 (1 + \alpha t) \quad (448)$$

Für die in der Tabelle auf S. 522 angenommenen Fälle hat man einfach die Werthe der vierten Columne durch die Werthe $c_p : c_v$ der Tabelle auf S. 526 zu dividiren.

Uebrigens verdient bemerkt zu werden, dass der reciproke Werth:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_Q$$

die Richtung der adiabatischen Curve des Körpers, entsprechend dem Punkte v, t, p angiebt, während $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t$ die Richtung der isothermischen Curve bezeichnet.

Die zweite der Gleichungen (446) giebt ferner unter Benutzung von Gl. (440)

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_Q = -\frac{\beta c_v (1 + \alpha t)}{A T \left(\alpha + t \frac{d\alpha}{dt}\right)} \tag{449}$$

und diese Formel bestimmt die nöthige Volumenänderung dv, wenn man durch Compression ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme eine bestimmt vorgeschriebene Temperaturerhöhung dt hervorbringen will. Auch diese Formel lässt sich leicht für die in den beiden letzten Tabellen aufgeführten Flüssigkeiten benutzen.

Die dritte der Gl. (446) ergiebt endlich

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{AT}{c_p} \left(\frac{dv}{dt}\right)_p \tag{450a}$$

oder unter Benutzung von Gl. (438)

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{A T v_0}{c_p} \left(\alpha + t \frac{d\alpha}{dt}\right) \tag{450b}$$

Ist der Ausdehnungscoefficient α, wie man gewöhnlich annehmen kann, constant, so folgt:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{A T v_0 \alpha}{c_p} \tag{450c}$$

und diese letztere Gleichung ist es, welche zuerst von W. Thomson gegeben worden ist; diese Gleichungen erlauben uns, die Temperaturzunahme dt zu berechnen, wenn bei einem Körper der äussere Druck um dp erhöht wird und wenn während des Ueberganges Wärme weder zu- noch abgeleitet wird.

Mit Hülfe der Gln. (448) und (450b) sind für dieselben Flüssigkeiten, die wir schon oben betrachtet haben (Tabelle S. 522)

die Werthe $\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q$ un $\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt: um die Druckerhöhung dp in Atmosphären auszudrücken, war vor dem Gebrauche die rechte Seite der beiden angezogenen Gleichungen mit 10334 zu multipliciren.

Flüssigkeit.	1 Temperatur t	2 $\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q$	3 $\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q$
Wasser . . .	0°	— 0.000 0503 v_0	— 0.0004062
„ . . .	25°	— 0.000 0452	+ 0.0018481
„ . . .	50°	— 0.000 0430	+ 0.0034877
Aether . . .	0°	— 0.000 0752	+ 0.0094012
„ . . .	14°	— 0.000 0970	+ 0.0110380
Alkohol . . .	7.3°	— 0.000 0658	+ 0.0060572
„ . . .	13.1°	— 0.000 0736	+ 0.0060834
Quecksilber . . .	0°	— 0.000 00248	+ 0.0026290

Die Werthe der 2. Columne geben die Volumenänderung der Volumeneinheit und die der 3. Columne die Temperaturerhöhung Celsius, wenn der äussere Druck der eine Atmosphäre beträgt, um eine Atmosphäre wächst; immer vorausgesetzt, die Compression geschehe ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme.

Die Richtigkeit der Werthe der letzten Columne ist durch besondere Versuche von Joule*) mit Wasser ausser allen Zweifel gesetzt. Die folgende Zusammenstellung zeigt die vortreffliche Uebereinstimmung zwischen Rechnungs- und Versuchsresultaten.

---

*) »On the Thermal Effects of Compressing Fluids.« Phil. Magazin. V. 17. 1859. Mai.

Anfangs-temperatur des Wassers t^0 C.	Druckerhöhung in Atmosphären	Temperaturerhöhung	
		Nach Gleichung 450 b.	Nach Joule's Experiment
1.2	24.34	— 0.0069°	— 0.0083°
5	24.34	+ 0.0025	+ 0.0044
11.69	24.34	+ 0.0193	+ 0.0205
18.38	24.34	+ 0.0363	+ 0.0314
30	24.34	+ 0.0547	+ 0.0544
31.37	14.64	+ 0.0344	+ 0.0394
40.4	14.64	+ 0.0434	+ 0.0450

Die merkwürdige Erscheinung, dass das Wasser bei ohngefähr 4° ein Dichtigkeitsmaximum zeigt, hat zur Folge, dass bei einer Anfangstemperatur unter 4° die Compression eine Temperatur-Abnahme erzeugt. Eine nähere Begründung dieser Erscheinung, gestützt auf die innere Beschaffenheit des Wassers, vermögen die benutzten Formeln nicht zu geben.

In neuester Zeit hat Edlund*) durch eine Reihe schöner Versuche nachgewiesen, dass die Thomson'sche Formel (150c) auch durch das Verhalten fester Körper (Metalle) bestätigt wird. Die Metalle wurden in Drahtform angewandt; die Drähte wurden vertical am einen Ende aufgehangen, mit dem andern Ende am Ende eines einarmigen Hebels befestigt, auf welchem ein Laufgewicht verschoben werden konnte. Befand sich das Gewicht am äussern Hebelende, so war der Draht gespannt; befand sich das Gewicht über der Axe des Hebels, so war der Draht entlastet. Bei den Versuchen befand sich zunächst das Laufgewicht am äussern Ende, der Draht war sonach gespannt; nun wurde das Gewicht rasch nach der Hebelaxe verschoben, was zur Folge hatte, dass der Draht sich zusammenzog und zwar unter Verrichtung äusserer Arbeit. Diese Zusammenziehung war mit einer Temperaturänderung und zwar Temperaturerhöhung

*) Edlund Quantitative Bestimmung der bei Volumenveränderung der Metalle entstehenden Wärmephänomene etc. Poggendorff's Annalen. B. 114. S. 1 und B. 126. S. 539.

des Drahtes verbunden, die mit Hülfe einer thermoelektrischen Säule besonderer Construction gemessen wurde.

Edlund vergleicht nun diese Temperaturänderungen mit denjenigen, auf welche die Thomson'sche Formel (450c) führt, und findet, wie folgende Uebersicht zeigt, zwischen den relativen Werthen der beobachteten und berechneten Temperaturänderungen vorzügliche Uebereinstimmung:

	Beobachtet	Berechnet	Differenz
Silber	29.74	29.71	— 0.03
Stahl	31.91	31.96	+ 0.05
Kupfer	29.78	27.82	— 1.96
Messing	35.46	35.77	— 0.69
Platin	7.40	8.03	+ 0.63
Gold	12.67	12.78	+ 0.11

Die Uebereinstimmung erstreckt sich jedoch nicht auf die absoluten Werthe der Temperaturvariationen, vielmehr ergeben die Edlund'schen Untersuchungen für die hier angeführten in Drahtform angewandten Metalle, dass man die rechte Seite der Thomson'schen Gleichung mit dem constanten Faktor

$$\frac{424}{682,73} = 0{,}62104$$

multipliciren, also schreiben müsse:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = 0{,}62104 \cdot \frac{A\,T v_0\,\alpha}{c_p}$$

um die Uebereinstimmung hervorzubringen.

Eine vollständige Erklärung dieser Abweichung lässt sich noch nicht geben, nur so viel ist klar, dass die Thomson'sche Formel auf Grund ihrer Ableitung nicht ohne Weiteres, d. h. ohne weitere Correction zur Beurtheilung der Edlund'schen Versuche anwendbar ist. In der Formel ist α ausdrücklich der Ausdehnungscoefficient für cubische, aber nicht für lineare Ausdehnung, während Edlund den Werth α in der letztern Bedeutung substituirt.

Edlund hat seine Versuche noch weiter ausgedehnt, indem er den Draht auch plötzlich entlastete durch rasches Abheben des Gewichtes vom Hebelende. In diesem Falle zog sich der

Draht ohne Verrichtung von äusserer Arbeit zusammen und das hatte den Beobachtungen gemäss stärkere Temperaturvariationen zur Folge, die in gleicher Weise, wie oben angegeben, gemessen wurden. Für diese Temperaturänderung liesse sich ebenfalls eine Formel aufstellen, denn im vorliegenden Falle ist offenbar die innere Arbeit U constant, also im Anfange und am Ende gleich gross.

Ich unterlasse jedoch ein weiteres Vorgehen in der angezeigten Richtung, da die experimentellen Grundlagen zur Prüfung der Formeln, die sich auf dem angedeuteten Wege ergeben, noch nicht vollständig genug erscheinen. Es sei nur noch bemerkt, dass Edlund (a. a. O.) aus den Resultaten seiner beiden Versuchsreihen das mechanische Wärmeaequivalent ableitet und dabei auf sehr befriedigende Uebereinstimmung mit dem von Andern auf anderm Wege gefundenen Werthe gelangt.

Uebergang fester Körper in den flüssigen Zustand.

Bisher nahmen wir an, der Körper ändere während der mit ihm vorgenommenen Veränderungen seinen Aggregatzustand nicht: im Folgenden soll nun auch der andere Fall betrachtet werden.

Der Uebergang eines flüssigen Körpers in einen dampfförmigen ist im dritten Abschnitte vollständig behandelt worden: es bleibt daher nur noch übrig, den Uebergang eines festen Körpers in den flüssigen Zustand, das Schmelzen zu untersuchen; dabei soll aber der Kürze des Ausdruckes wegen zunächst nur der Uebergang des Eises in Wasser behandelt werden; die allgemeinen hierher gehörigen Untersuchungen gelten auch für das Schmelzen jedes andern Körpers.

Denken wir uns in einem Gefässe gerade ein Kilogramm Eis, von der Temperatur 0^0 und zwar unter dem Drucke von einer Atmosphäre; führt man diesem Eise Wärme zu, während der Druck constant erhalten wird, so geht das Eis nach und nach in Wasser über, die Temperatur bleibt aber dabei so lange 0^0, bis alles Eis in Wasser verwandelt ist.

Erst von diesem Momente an beginnt eine Temperaturerhöhung, wenn die Wärmezuführung weiter fortgesetzt wird. Die

Wärmemenge, welche dazu gehört, um unter constantem Drucke von einer Atmosphäre gerade ein Kilogr. Eis von 0° Temperatur vollständig in Wasser von 0° zu verwandeln, ist durch Versuche bekannt und zwar beträgt sie nach den sichersten Versuchen von De la Provostaye:

$$79{,}01$$

und nach denen Regnault's

$$79{,}06 \qquad \text{Wärmeeinheiten.}$$

Wir benutzen im Folgenden den Mittelwerth und bezeichnen ihn mit r, setzen also

$$r = 79{,}035$$

Diesen Werth nennt man gewöhnlich, wie bei dem Dampfe, die »latente Wärme«.

Man erkennt aus dieser Darstellung sofort, dass die Erscheinung beim Schmelzen genau der gleicht, wie sie sich beim Verdampfen zeigte; während des Ueberganges aus dem einen in den andern Aggregatzustand unter constantem Drucke ändert sich die Temperatur nicht, obgleich dem Körper eine bedeutende Wärmemenge zugeführt wird. Wir müssen daraus schliessen, dass auch im Uebrigen der Vorgang beim Schmelzen ganz analog dem beim Verdampfen ist, dass sonach ein Theil der zugeführten Wärme r zu innerer Arbeit, der andere zu äusserer Arbeit verbraucht wird, weil während dieses Vorganges bekanntlich Volumenveränderungen stattfinden.

Ferner muss man schliessen, dass ebenso, wie beim Verdampfen, der Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand unter verschiedenem Drucke auch bei verschiedenen Temperaturen stattfindet und dass auch hier die Temperatur nur eine Funktion des Druckes, nicht gleichzeitig des Volumens der Masse ist, so lange diese aus Eis und Wasser gleichzeitig besteht.

Wir können daher eben so gut, wie beim Dampfe, gesättigtes und überhitztes oder ungesättigtes Wasser unterscheiden. Gesättigtes Wasser ist solches, welches sich sofort bei der geringsten Wärmeentziehung zum Theil in Eis verwandelt: ist der Druck z. B. eine Atmosphäre, so ist das Wasser gerade bei 0° Temperatur gesättigt; muss hingegen bei con-

stantem Drucke dem Wasser erst eine gewisse Wämemenge entzogen werden, ehe es sich in Eis zu verwandeln beginnt, so ist es ungesättigt oder überhitzt; Wasser, welches unter dem Drucke von einer Atmosphäre eine Temperatur besitzt, die über 0° liegt, ist daher immer ungesättigt.

Ist der Druck, unter dem das Wasser steht, ein anderer, als eine Atmosphäre, dann ist auch die Sättigungstemperatur, oder wie man gewöhnlich sagt, die »Schmelztemperatur« eine andere; beide, Druck und Temperatur stehen aber in einer unbekannten, gewissen Beziehung zu einander und entsprechende Versuche müssten für gesättigtes Wasser eine ähnliche Curve geben, wenn man die Schmelztemperatur als Abscisse und den Druck als Ordinate aufträgt, wie dies beim gesättigten Dampf der Fall ist. Der Verlauf dieser Curve für gesättigtes Wasser ist aber, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, wesentlich von der des Dampfes verschieden.

Dass die Schmelzungstemperatur des Eises, oder wie ich es nennen werde, die »Sättigungstemperatur des Wassers«, mit dem Drucke variirt und zwar dass vom Gefrierpunkte an, bei weiterem Sinken der Temperatur der Sättigungsdruck wächst, d. h. dass mit Erhöhung des Druckes eine Erniedrigung des Gefrierpunktes verbunden ist, wurde zuerst von James Thomson*) und dann von Clausius**) theoretisch nachgewiesen und von William Thomson***) durch Versuche vollkommen bestätigt. In gleicher Weise bestätigen diese merkwürdigen Thatsachen auch die Versuche von Bunsen am Wallrath und Paraffin und von Hopkins an Wallrath, Wachs, Schwefel und Stearin. Die folgenden Betrachtungen werden unter Anderem auch auf den zuerst von James Thomson gegebenen Ausdruck führen.

Da wir es hier zum Theil mit Temperaturen unter 0° C. zu thun haben, und somit die Temperatur t theils negativ, theils positiv wäre, so ist es zweckmässig, den Nullpunkt der Thermo-

---

*) »Transactions der königlichen Gesellschaft zu Edinburgh.« Vol. XVI. »Cambridge and Dublin Mathematical Journal« 1850.

**) »Poggendorff's Annalen.« Bd. 81, S. 168.

***) »Proceedings of the Roy. Soc. of Edinb.« 1850. »Philosoph. Magazine« 1850. Bd. XXXVII, S. 123. »Poggendorff's Annalen.« Bd. 81, 1850, S. 163.

meterscala tiefer zu legen, und zwar eignet sich hierzu am besten der absolute Nullpunkt: ich zähle daher von jetzt an die Temperaturen von -273^0 ab und bezeichne die Temperatur mit T, so dass wie früher $T = a + t = 273 + t$ ist und die Temperatur des Gefrierpunktes des Wassers unter einer Atmosphäre Druck bei 273^0 liegt.

Denke ich mir nun in einem Gefässe ein Kilogr. Eis unter dem Drucke p (pr. Quadrateinheit gerechnet stehend: die Temperatur sei T_0, hingegen die Schmelzungstemperatur, welche dem Drucke p entspricht, sei T, so lässt sich fragen, welche Wärmemenge erforderlich ist, das Eis bei constantem Drucke vollständig in Wasser von der Temperatur T zu verwandeln.

Setzen wir die spezifische Wärme des Eises bei constantem Drucke c_0, so ist offenbar die Wärmemenge um das Eis erst von T_0 auf T zu erwärmen.

$$\int_{T_0}^{T} c_0 \, d\, T$$

Ferner sei die Wärme, um aus 1 Kilogr. Eis von T_0 Temperatur Wasser von T_0 bei dem constanten Drucke p zu bilden, r, wo r wahrscheinlich von T in ähnlicher Weise abhängig ist, wie dies bei der Verdampfungswärme der Fall ist. Wie schon erwähnt, nennt man r die »latente Wärme«, ich werde dafür den Namen »Schmelzwärme« gebrauchen.

Die Wärmemenge λ, welche das Eis erfordert, um unter den gemachten Annahmen in Wasser überzugehen, ist sonach:

$$\lambda = \int_{T_0}^{T} c_0 \, d\, T + r$$

und diese können wir analog, wie dies beim Dampfe geschah, die »Gesammtwärme« nennen.

Bei diesem Uebergange wird äussere Arbeit verrichtet, ... deren Bestimmung es hier zunächst ... Eis von T_0 auf T erwärmt wird, ... wird schon dabei eine Volum... windung des äusseren Dr... finden. Wir werden di... vernachlässigen, d...

stattfindet, sonach bleibt nur noch die Arbeit zu bestimmen übrig, welche während des Schmelzens verrichtet wird.

Bezeichnet, wie früher σ das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei der Temperatur T und ist σ_e das des Eises, so ist das Volumen v von einem Kilogramm Mischung von x Kilogr. Wasser und $(1-x)$ Kilogr. Eis:

$$v = x\sigma + (1-x)\,\sigma_e$$

oder:

$$v = \sigma_e + x\,(\sigma - \sigma_e)$$

Wir wollen nun wieder analog frühern Bezeichnungen die Differenz $\sigma - \sigma_e$ mit u bezeichnen und erhalten daher:

$$v = \sigma_e + xu \tag{452}$$

in welcher Formel σ_e und u nur als Funktionen der Temperatur oder des Druckes anzusehen sind; es folgt daher durch Differentiation, unter Voraussetzung constanter Temperatur:

$$dv = u\,dx \tag{453}$$

also die in Wärme ausgedrückte äussere Arbeit bei der Bildung von dx Kilogr. Wasser:

$$dL = Ap\,dv = Apu\,dx \tag{454}$$

Hieraus folgt dann, wenn der Uebergang, wie wir voraussetzten, bei constantem Drucke erfolgt, durch Integration:

$$L = Apux$$

und wenn gerade ein Kilogr. Eis in Wasser übergeführt werden, also $x = 1$ sein soll:

$$L = Apu$$

Dieser Werth ist die äussere latente Wärme des gesättigten Wassers, entsprechend dem äussern Drucke p und der zugehörigen Temperatur t.

Subtrahirt man diesen Werth von der Schmelzwärme r und bezeichnen wir die Differenz mit ϱ, so folgt im Weitern:

$$\varrho = r - Apu \tag{455}$$

und diese Grösse stellt die »innere latente Wärme« des gesättigten Wassers dar; ist die äussere latente Wärme Apu ermittelt — und die Aufstellung einer Formel zur Berechnung derselben unter-

liegt, wie sich gleich zeigen wird, keinen Schwierigkeiten, — so ist sogleich auch die innere latente Wärme ϱ bekannt.

Die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um unter constantem Druck dx Kilogr. Eis in Wasser zu verwandeln, ist

$$dQ = r\,dx$$

oder wenn dx aus Gl. (453) bestimmt wird:

$$dQ = \frac{r}{u}\,dv$$

Da hierbei $dt = 0$ und $dp = 0$ ist, so folgt für dieselbe Wärmemenge nach den Hauptgleichungen III S. 77 auch:

$$dQ = A\,Y\,dv$$

und

$$dQ = \frac{AT}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv$$

und aus der Verbindung dieser drei Gleichungen, wenn wir noch beachten, dass die Temperatur t hier nur eine Funktion des Druckes p und unabhängig vom Volumen der Mischung ist:

$$Y = \frac{r}{Au} = T\frac{dp}{dt} \tag{456}$$

und hieraus berechnet sich jetzt die äussere latente Wärme:

$$Apu = \frac{pr}{T\frac{dp}{dt}} \tag{457}$$

und dann nach Gl. (455) auch die innere latente Wärme ϱ.

Die vorstehenden Entwickelungen bilden die Grundlage bei Beurtheilung des Vorganges beim Schmelzen. Leider stehen uns nur sehr wenige Versuchsresultate zu Gebote, um mit Hülfe derselben und den obigen Gleichungen weiter zu schliessen; soweit es die bekannten Versuche gestatten, sollen im Folgenden die theoretischen Untersuchungen ausgedehnt werden.

Unter dem Drucke von 1 Atmosphäre ist die Schmelzungstemperatur 0^0 oder $T = 273^0$.

Das Volumen der Gewichtseinheit Wasser ist bei dieser Temperatur:

$$\sigma = 0{,}001$$

Das Volumen der Gewichtseinheit Eis ist hingegen:

$$\sigma_e = 0{,}001087$$

Ferner ist nach Obigem die Schmelzungswärme für diese Temperatur:

$$r = 79{,}035$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich nun zunächst

$$u = \sigma - \sigma_e = -0{,}000087$$

also negativ.

Setzen wir diese Werthe in Gl. (456) ein, so folgt für $T = 273^0$ oder für den Schmelzpunkt unter atmosphärischem Drucke, wenn wir zugleich dp in Atmosphären, statt in Druck pro Quadrateinheit einführen.

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{79{,}035 \cdot 424}{0{,}000087 \cdot 273 \cdot 10334} \text{ oder}$$

$$\frac{dp}{dT} = -136{,}53 \text{ und} \tag{458}$$

$$\frac{dT}{dp} = -0{,}007324 \tag{459}$$

Die letzte Gleichung ist diejenige, welche J. Thomson zuerst entwickelt hat (Thomson giebt $\frac{dT}{dp} = -0{,}0075$), und zeigt also das überraschende Resultat, dass mit einem Wachsen des Druckes p (in der Nähe des sogenannten Gefrierpunktes) eine Abnahme der Schmelztemperatur verbunden ist; d. h. unter höherem Drucke als einer Atmosphäre gefriert das Wasser erst bei einer Temperatur unter 0^0 Celsius.

Die Richtigkeit dieser Vorhersagung ist durch die Versuche von W. Thomson ausser allen Zweifel gesetzt. Dieser fand, dass bei einer Vermehrung des Druckes auf 8,1 und 16,8 Atmosphären die Schmelztemperatur des Eises resp. um 0,059 und $0{,}129^0$ unter 0^0 lag; für eine Atmosphäre Druckerhöhung giebt das eine Temperaturerniedrigung von resp. 0,00727 und 0,00767, was mit den obigen Entwickelungen im schönsten Einklange steht. Mousson*) hat mit Hülfe eines eigenthümlichen Apparates Wasser selbst noch bei -20^0 flüssig erhalten, indem er dasselbe einem

*) »Poggendorff's Annalen.« Bd. 105, S. 161.

sehr hohen Drucke (einige tausend Atmosphären) aussetzte; auch dieser Versuch ist ein Beweis der Richtigkeit der obigen Betrachtungen. Denken wir uns jetzt die Temperaturen T als Abscissen und den zugehörigen Druck p als Ordinate aufgetragen, so würde sich die Spannungscurve für gesättigtes Wasser ergeben. Von dieser Curve ist bis jetzt nur der Lauf eines Elementes bekannt und zwar desjenigen, dessen Abscisse $T = 273^0$ und dessen Ordinate $p = 1$ Atmosphäre ist.

Aus der Gl. (458) findet sich aber:

$$dp = -136{,}53 \cdot dT$$

und daraus schliesst man, dass die Tangente an diesem Punkt nahezu normal zur Abscissenaxe steht, dass also die Curve sehr steil abfällt und zwar sich mit wachsender Abscisse der Abscissenaxe nähert.

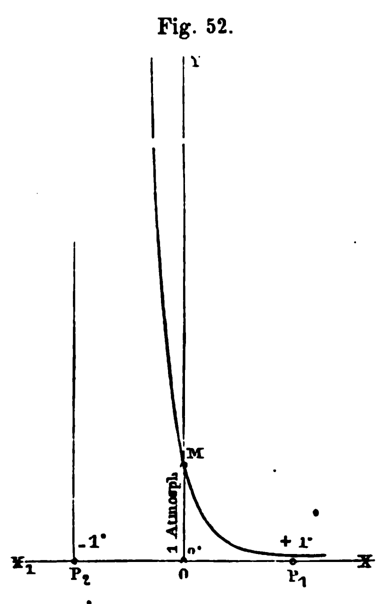
Die Spannungscurve für gesättigten Dampf zeigt gerade das entgegengesetzte Verhalten.

Dürfte man annehmen, dass Gl. (458) noch bis zu einer Temperaturerniedrigung von 1° gültig ist, so würde sich schliessen lassen, dass das Wasser ungefähr unter einem Drucke von 136 Atmosphären stehen müsste, damit es erst bei — 1° C. gefriere. Diese Betrachtung zeigt, dass jedenfalls der Nullpunkt der Thermometer sehr stabil ist; es gehören schon sehr starke Druckveränderungen dazu, um bei der Bestimmung desselben bemerkbare Differenzen zu erhalten. Bekanntlich ist das mit dem Siedepunkt nicht der Fall, bei dessen Bestimmung an Thermometern die gewöhnlichen Variationen im Atmosphärendruck beachtet werden müssen.

Steht das Eis unter einem Drucke, der weniger als eine Atmosphäre beträgt, so muss der Schmelzpunkt erhöht werden. Unter dem Recipienten einer Luftpumpe beginnt das Gefrieren des Wassers also schon bei höherer Temperatur und das müsste sich beobachten lassen, wenn man eine Mischung von Eis und Wasser unter den Recipienten bringt, indem dann einfach die Temperatur dieser Mischung sich erhöhen würde. Dass bis jetzt diese Erscheinung unbeachtet geblieben ist, erklärt sich dadurch, dass diese Erhöhung selbst im fast luftleeren Raum wahrscheinlich ausserordentlich gering ist, und durch eine thermoelektrische Säule gemessen werden müsste.

Die Spannungscurve des Wassers hat jedenfalls einen Verlauf, wie es nebenstehende Figur (52) andeutet. O ist der Anfangspunkt der Coordinaten; als Abscissen sind die Temperaturen aufgetragen und zwar entspricht der Punkt P_1 gerade $+ 1^0$ C. und P_2 der Temperatur $- 1^0$. Die Ordinate im Nullpunkt O sei $OM = 1$ Atmosphäre; dann ist nach Obigem die der Temperatur $- 1^0$ C. entsprechende Ordinate etwa 136; während die für $+ 1^0$ nahezu 0 ist. Experimente zur Feststellung des Laufes der Curve zwischen 0^0 bis 1^0 sollten wohl nicht zu schwierig sein, und würden gewiss in Verbindung mit den gegebenen Formeln zu interessanten Aufschlüssen führen.

Fig. 52.



Denken wir uns gesättigtes Wasser im Zustand M (Fig. 52) also unter dem Drucke von einer Atmosphäre stehend und von der Temperatur 0^0 C., so gilt nach Gl. (459) die Beziehung

$$dt = - 0{,}007324 \cdot dp$$

Setzen wir das Wachsthum des Druckes endlich und zwar eine Atmosphäre, so müsste die Temperatur

$$- 0{,}007324^0 \text{ Celsius}$$

betragen, damit das Wasser bei dem neuen Drucke (2 Atmosphären) wieder gesättigt, d. h. zum Gefrieren bereit sei.

Nun haben wir aber früher (s. Tabelle S. 532) gefunden, dass die Temperatur des Wassers von 0^0 C., welches unter einer Atmosphäre Druck steht, um

$$- 0{,}000\,4062^0 \text{ Celsius}$$

sich ändert, wenn durch Compression ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme der Druck um eine Atmosphäre gesteigert wird.

Man erkennt hieraus, dass das Wasser unter den gemachten

Voraussetzungen durch einfache Compression in den überhitzten oder ungesättigten Zustand übergeht (genau, wie das auch bei reinem, gesättigten Wasserdampf der Fall ist) und dass man der Gewichtseinheit Wasser am Ende der Compression unter dem Drucke von 2 Atmosphären eine Wärmemenge von

$$0{,}00\,7324 - 0{,}000\,406 = 0{,}00\,6918 \text{ Calorien}$$

entziehen müsste, damit das Wasser bei dem neuen Drucke wieder gesättigt sei.

Leider liegen keinerlei Beobachtungen vor, die uns erlauben, ähnliche Schlüsse auch für andere Anfangstemperaturen zu ziehen.

Benutzen wir nun im Weitern Gl. (458) in Formel (457) und setzen wir dort $p = 10334$ und $T = 273$, so findet sich für Wasser von 0^0 C. und einer Atmosphäre Druck die äussere latente Wärme

$$Apu = -\,0{,}00212 \text{ Calorien.}$$

Während des Schmelzens von 1 Kilogr. Eis unter gewöhnlichen Verhältnissen wird also nicht wie beim Verdampfen ein Theil der zugeführten Wärme zu äusserer Arbeit verbraucht, sondern das Eis nimmt beim Uebergang äussere Arbeit auf. Die Arbeit selbst beträgt

$$pu = 0{,}899 \text{ Meterkilogramm.}$$

Die innere latente Wärme findet sich dann nach Gl. (455) für 0^0 Temperatur und atmosphärischen Druck

$$\varrho = 79{,}035 + 0{,}002 = 79{,}037$$

Die Differenz zwischen r und ϱ fällt daher noch vollständig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Ferner berechnet sich mit Hülfe der gleichen Grundlagen nach Gl. (456):

$$\frac{r}{u} = 57{,}91$$

und dann:

$$\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap = 63{,}54$$

Aus dem Angegebenen geht hervor, dass die Hauptgleichungen für Eis- und Wassermischungen dieselben sind, die oben auf S. 295 bis S. 302 für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen aufgestellt wurden.

Anhang.

Theorie der überhitzten Wasserdämpfe.

(Aus der »Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure«. B. XI. S. 1. 1866.)

Es ist schon oft darauf hingewiesen worden, dass die Anwendung der **überhitzten** Dämpfe, statt der **gesättigten**, bei den Dampfmaschinen mit wesentlichen Vortheilen verbunden sein müsse; die Beobachtungen und entsprechenden Versuche, unter denen die schönen und bekannten Versuche von **Hirn** *) obenan stehen, deuten auch entschieden darauf hin, dass die Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe der Vortheile wegen, welche sie hinsichtlich des Brennmaterialverbrauches bieten, mehr und mehr in Anwendung kommen werden.

Seit länger als einem Jahrzehnt hat man, besonders in Amerika, Beobachtungen über die Vortheile der überhitzten Dämpfe gemacht und, wenn man die ganz ausserordentlich günstigen Resultate betrachtet, welche **Wethered** mit **gemischten** Dämpfen (Mischung von gesättigtem und überhitztem Dampfe) gefunden haben will, hat man Grund zu erstaunen, dass die Ueberhitzung der Dämpfe für Dampfmaschinen nicht weit allgemeiner in Anwendung gekommen ist **).

Abgesehen von gewissen praktischen Schwierigkeiten, auf die man, wenigstens bei Anwendung **hoch** überhitzter Dämpfe stösst, findet das Gesagte aber eine Erklärung in dem Umstande, dass alle bisher angestellten Versuche zusammen genommen zwar auf

*) Sur la théorie de la surchauffe dans les machines à vapeur. Bulletion de la société industrielle de Mulhouse. . t. XXVIII. 1857.

) Vergl. **Dinse: Ueber die Verwendung des überhitzten Dampfes in den Dampfmaschinen (Zeitschrift d. Vereins deutscher Ing. Bd. IX. S. 373).

Vortheile der Anwendung der überhitzten Dämpfe hindeuten, dass aber der Grad der Erhöhung des Nutzens überhitzter Dämpfe gegenüber gesättigten Dämpfen noch keineswegs festgestellt ist. Die Resultate der Versuche widersprechen sich in dieser Beziehung ausserordentlich, und einzelne solcher Angaben sind nicht ohne gerechte Zweifel aufgenommen worden.

Ueber solche Zweifel werden uns noch so zahlreiche Versuche nicht hinweghelfen: denn über derartige Fragen kann nur eine gründliche Kenntniss der physikalischen Eigenschaften der Dämpfe überhaupt entscheiden. Eine Theorie der überhitzten Dämpfe ist aber auch von hoher wissenschaftlicher Bedeutung: bis jetzt kannte man das Verhalten dieser Dämpfe nur für die beiden Grenzzustände, nämlich für ihren Condensationspunkt, wenn sie eben in den Sättigungszustand übergehen, oder für den Zustand höchster Ueberhitzung, in welchem ihre Eigenschaften vollständig mit denen der permanenten Gase übereinstimmen.

Die Formeln, welche die mechanische Wärmetheorie für die beiden Grenzzustände der Luftarten hinstellt, sind der Ableitung und dem Baue nach ganz von einander verschieden, und es war bisher nicht möglich, aus den Gleichungen, welche sich auf gesättigte Dämpfe, sowie auf Dampf- und Flüssigkeitsmischungen beziehen, diejenigen für die permanenten Gase abzuleiten und umgekehrt, oder das Verhalten der Dämpfe auf dem Uebergange von einem in den anderen Grenzzustand darzulegen.

Theoretische Untersuchungen über das Verhalten der überhitzten Dämpfe wurden bis jetzt nur von Hirn*) angestellt. In der vorliegenden Abhandlung will ich die Resultate meiner eignen Untersuchungen mit gleichzeitiger Anwendung auf die wichtigsten technischen Aufgaben vorführen. Ich beschränke mich aber nur auf Untersuchung der Wasserdämpfe; es wird keinen Schwierigkeiten unterliegen, auf dem von mir angezeigten Wege auch überhitzte Dämpfe anderer Art der Untersuchung zu unterwerfen.

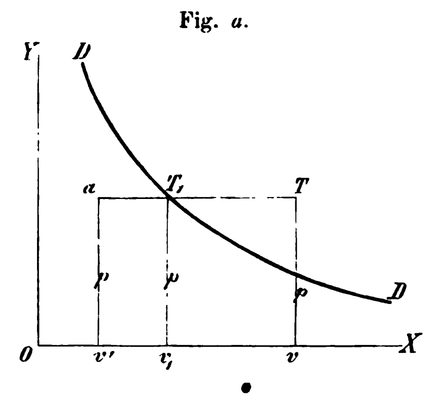
Voruntersuchungen.

Bezeichnen wir mit v das spezifische Volumen, d. h. das Volumen der Gewichtseinheit (eines Kilogrammes) Dampf, mit p

*) Hirn: Théorie mécanique de la chaleur. Première partie. Seconde édition. Paris, 1865.

den spezifischen Druck (Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter) und mit t die Temperatur nach Celsius, so lässt sich, wenn Druck und Volumen bekannt sind, sehr leicht entscheiden, ob man es in einem bestimmten Falle mit reinem gesättigtem Dampfe, oder mit überhitztem Dampfe, oder mit der Gewichtseinheit Mischung von Dampf und Flüssigkeit zu thun hat. Bei dem gesättigten Dampfe, dessen Volumen wir speziell mit v_1 bezeichnen wollen, stehen bei einer gewissen Dampfart Druck und Volumen in einer bestimmten und bekannten Beziehung; wenigstens lässt sich nach den Lehren der mechanischen Wärmetheorie das dem Drucke p entsprechende Volumen v_1 berechnen. Trägt man für reinen gesättigten Dampf (ohne Beimischung von Flüssigkeit) für verschiedene Pressungen das Volumen v_1 als Abscisse und den Druck p als Ordinate auf (Fig. a), so erhält man eine Curve DD, welche ich die »Grenzcurve« nenne, und deren Verlauf für Wasserdämpfe unten weiter besprochen werden wird. Jedem Punkte der Curve oder jedem Drucke entspricht eine bestimmte Temperatur t_1 oder, wenn wir die Temratur, was in der Folge immer geschehen soll, vom absoluten Nullpunkte ab rechnen, die absolute Temperatur $T_1 = 273 + t_1$, und diese Temperatur ist auf Grund von Versuchen für jeden Druck bekannt. Trägt man nun in einem gegebenen Falle das Volumen (der Gewichtseinheit) als Abscisse und den Druck als Ordinate auf und fällt der Punkt in die Grenzcurve, so ist das ein Beweis, dass wir es mit reinem gesättigtem Dampfe zu thun haben; fällt dagegen der Endpunkt a der Ordinate in den Raum zwischen Grenzcurve und Coordinatenaxen, so ist bei gleichem Drucke p die Temperatur T_1 die nämliche, das Volumen aber kleiner; die Gewichtseinheit Masse enthält neben Dampf auch Flüssigkeit. Der Dampf ist von gleicher Beschaffenheit, wie vorhin: ist x die spezifische Dampfmenge, d. h. die Dampfmenge in der Gewichtseinheit Mischung, so ist $(1 - x)$

Fig. a.



das Gewicht der Flüssigkeit, und wenn σ das spezifische Volumen der Letzteren ist, so ist das Volumen v' der Mischung:

$$v' = xv_1 + (1 - x)\sigma$$

und hieraus berechnet sich leicht das Mischungsverhältniss x für das gegebene Volumen v'.

Fällt dagegen der Endpunkt der Ordinate in den Raum ausserhalb der Grenzcurve DD, etwa nach T (Fig. a), so ist das ein Beweis, dass die gegebene Dampfmasse überhitzt ist; in diesem Falle ist die entsprechende Temperatur $T > T_1$ und nicht durch den Druck p allein bestimmt, sondern hängt auch noch vom Volumen v ab. Die Beziehung:

$$T = F(p, v)$$

ist es eben, die bis jetzt für überhitzte Dämpfe unbekannt war, und die ich zunächst feststellen werde. Wir werden in der Folge nach dem Vorschlage Bauschinger's die im Vorstehenden angedeutete Beziehung die »Zustandsgleichung« nennen. Bis jetzt vermuthete man von dieser Beziehung nur, dass sie in die Form

$$pv = RT \tag{1}$$

übergehe, die für permanente Gase gilt, und in welcher R eine von der Gasart abhängige Constante ist, wenn der Punkt T (Fig. a) sehr weit von der Grenzcurve abliegt, d. h. der Dampf sehr stark überhitzt ist.

Bei der Ableitung der Zustandsgleichung für überhitzte Wasserdämpfe gehe ich nun von folgendem Satze der Wärmetheorie aus, den ich a. a. O. abgeleitet habe*).

Sind für die Gewichtseinheit eines Körpers der Druck p_2 und das Volumen v_2 gegeben, und dehnt sich derselbe ohne Zu- und Ableitung von Wärme aus oder wird derselbe comprimirt, ohne dass gleichzeitig eine Mittheilung oder Entziehung von Wärme erfolgt, so beschreibt der Endpunkt der Ordinate eine Curve A_2A_2 (Fig. b), die ich mit Rankine die adiabatische Curve nenne. Befindet sich derselbe Körper im Zustande a_1, durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 gegeben, so entspricht dem Punkte a_1 eine zweite adiabatische Curve A_1A_1. Soll der Körper aus dem

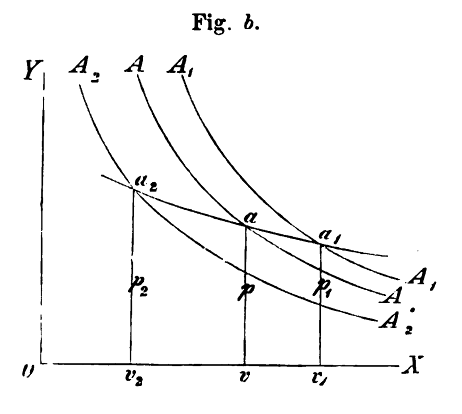
*) Vergl. S. 84 vorliegenden Buches.

Zustande a_2 in den Zustand a_1 übergeführt werden, so ist hierzu die Mittheilung einer gewissen Wärmemenge erforderlich; ist dQ die Wärmemenge für eine unendlich geringe Zustandsänderung, so habe ich nun a. a. O. bewiesen, dass das Integral

$$\int \frac{dQ}{AT}$$

in welchem A das Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit ist, d. h. die Wärmemenge, welche der Arbeit von **einem** Meterkilogramm entspricht ($A = \frac{1}{424}$), dass dieses Integral immer auf denselben Werth führt, wenn der Uebergang von einer bestimmten Curve $A_2 A_2$ nach einer zweiten vorgeschriebenen adiabatischen Curve $A_1 A_1$ erfolgt, gleichgültig wie sich auf dem Uebergange $a_2 a_1$ der Druck p mit dem Volumen v ändert, d. h. welches auch die Uebergangscurve $a_2 a_1$ sein mag, fernerhin gleichgültig, wo der Ausgangspunkt a_2 auf der ersten und der Endpunkt a_1 auf der zweiten adiabatischen Curve liegt. Der Einfachheit wegen bezeichne ich den Werth des Integrales mit P; den Werth selbst nenne ich aus Gründen, die ich a. a. O. näher dargelegt habe*), das **Wärmegewicht**. Wir wollen nun das Wärmegewicht sogleich für eine Mischung von Wasser und Wasserdampf entwickeln.

Fig. *b*.



Befinden sich in der Gewichtseinheit Mischung x Kilogrm. Dampf und beträgt der Druck p und ist t die Temperatur; ist ferner c die spezifische Wärme des Wassers — nach **Regnault** ist zu setzen:

$$c = 1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2 \qquad (2)$$

und ist r die Verdampfungswärme, welche nach **Regnault** sich nach der Gleichung

*) S. S. 68.

$$r = 606{,}5 + 0{,}305\, t - \int_0^t c\, dt \tag{3}$$

berechnet, so findet sich nach **Clausius***) die **Wärmemenge** dQ für eine unendlich geringe Zustandsänderung:

$$dQ = c\, dt + T d\left(\frac{x r}{T}\right)$$

Dividirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $A T$, so ist die Integration ausführbar; setzen wir der Einfachheit wegen

$$\int_0^t \frac{c\, dt}{T} = \tau \tag{4}$$

so folgt, wenn man die Werthe, welche dem Zustande a_2 (Fig. b) entsprechen, mit dem Index 2 und die des Endzustandes mit dem Index 1 versieht, das Wärmegewicht:

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \frac{1}{A}\left[\left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right) - \left(\tau_2 + \frac{x_2 r_2}{T_2}\right)\right] \tag{5}$$

Nehme ich nun an, der Uebergang geschehe auf der Grenzcurve DD (Fig. c), so ist für diesen Uebergang $x_1 = x_2 = 1$, weil hier der Dampf gesättigt und ohne Beimischung von Flüssigkeit ist; ich erhalte daher für diesen Uebergang

$$A P = \left(\tau_1 + \frac{r_1}{T_1}\right) - \left(\tau_2 + \frac{r_2}{T_2}\right) \tag{6}$$

und dieser Werth lässt sich sonach für gegebene Anfangs- und Endtemperatur leicht ermitteln.

Der Einfachheit wegen soll bis auf Weiteres die Bezeichnung

$$\varphi = \tau + \frac{r}{T} \tag{7}$$

eingeführt werden; wir haben dann:

$$A P = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{8}$$

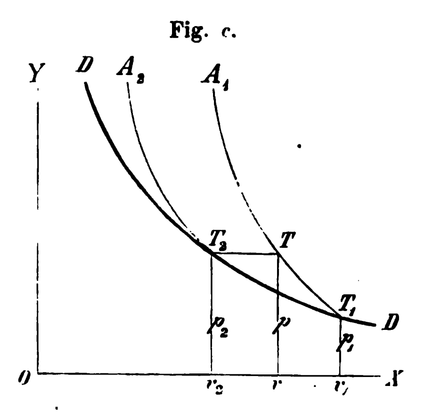
Unter Benutzung der Gleichungen (2), (3) und (4) habe ich den Werth φ für eine Reihe von Werthen der Dampfspannung

*) S. S. 300.

nach Gl. (7) berechnet und in der 3. Columne der auf Seite 554 folgenden Tabelle 1 aufgeführt.

Ich lege jetzt durch die beiden Punkte T_2 und T_1 der Grenzcurve DD (Fig. *c*) die beiden adiabatischen Curven A_2 und A_1; von beiden Curven ist, da sie sich nach dem Raume hin erstrecken, welcher den überhitzten Dämpfen entspricht, der Verlauf noch unbekannt; erwärme ich nun den gesättigten Dampf von der Temperatur T_2 bei constantem Drucke $p_2 = p$ so weit, bis die zweite adiabatische Curve im Punkte T erreicht ist, so beträgt das Wärmegewicht, wenn die spezifische Wärme des Dampfes bei constantem Drucke mit c_p bezeichnet und constant angenommen wird, und T die Temperatur des Dampfes am Ende des Ueberganges ist:

Fig. *c*.



$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \int_{T_2}^{T} \frac{c_p\, dT}{AT} = \frac{c_p}{A} \text{logn.} \frac{T}{T_2}$$

Da das Wärmegewicht für den Uebergang zwischen denselben adiabatischen Curven auf dem Wege $T_2 T_1$ nach dem oben angeführten Grundsatze das gleiche ist, so erhalten wir in Verbindung mit Gl. (8) die Beziehung:

$$c_p \text{ logn. } \frac{T}{T_2} = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{9}$$

Diese Formel gilt allerdings nur unter der ausdrücklichen Annahme, dass die spezifische Wärme c_p bei constantem Drucke für Wasserdampf als constant angesehen werden darf; dass diese Annahme erlaubt ist, darauf deuten zunächst die Versuche von Regnault hin. Regnault findet durch 4 Versuchsreihen:

$$c_p = 0{,}46881;\ 0{,}48111;\ 0{,}48080;\ 0{,}47963$$

und erklärt nur den ersten dieser Werthe für nicht ganz zuverlässig; als Mittel aus den übrigen findet sich

$$c_p = 0{,}4805$$

und diesen Werth wollen wir ebenfalls als zuverlässig allen weiteren Untersuchungen zu Grunde legen: es wird sich unten zeigen, dass die obige Hypothese der Unveränderlichkeit des Werthes der spezifischen Wärme bei constantem Drucke und die Annahme der Richtigkeit des Regnault'schen Versuchswerthes wohl gerechtfertigt sind.

Mit Hülfe der Gl. (9) könnte man, wenn die Temperaturen T_1 und T_2 gegeben sind, sehr leicht die Temperatur T des überhitzten Dampfes, entsprechend dem Punkte p, v, T der Fig. c berechnen oder auch durch Einführung verschiedener Werthe der Temperatur T_2 für eine ganze Reihe von Punkten der durch T_1 gehenden adiabatischen Curve A_1 die Temperatur T des überhitzten Dampfes berechnen. Damit wäre aber nicht viel gewonnen. und der wirkliche Verlauf der Curve A_1 dadurch noch keineswegs gegeben. Vielmehr handelt es sich zunächst um weitere Umformung der Gl. (9). Wird auf der linken Seite dieser Gleichung c_p logn. T_1 addirt und subtrahirt, so findet sich

$$c_p \text{ logn. } \frac{T}{T_1} = \varphi_1 - \varphi_2 - c_p \text{ logn. } \frac{T_1}{T_2} \tag{10}$$

Man kann also hieraus auch das Verhältniss der absoluten Temperaturen $T : T_1$ zweier Punkte berechnen, die auf der gleichen adiabatischen Curve A_1 (Fig. c) liegen. Würde diese Curve einem permanenten Gase entsprechen, so würde zwischen Druck und Temperatur beider Punkte die Beziehung

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{11}$$

gültig sein, in welcher Gleichung der Werth $\varkappa$ constant ist und das Verhältniss der spezifischen Wärme des Gases bei constantem Drucke zu der bei constantem Volumen darstellt.

Ich stelle nun die Hypothese auf, dass für überhitzte Dämpfe, wenigstens zunächst für Wasserdämpfe die Gl. (11) ebenfalls gültig ist, und dass auch hier der Werth $\varkappa$ als constant angesehen werden darf. Nur die eben angeführte Bedeutung des Werthes $\varkappa$ für Gase verlasse ich vorläufig bei der Anwendung der Gl. (11) auf überhitzte Dämpfe und über-

lasse es den Resultaten der weiter folgenden mathematischen Entwicklungen, die allgemeinere Bedeutung des Werthes $\varkappa$ in's Licht zu setzen.

Substituire ich Gl. (11) in Gl. (10) und beachte ich, dass nach der ganzen Entwickelung und nach Fig. c der Druck p mit p_2 identisch ist, so folgt nach einigen leichten Reductionen:

$$\varphi_1 + c_p \,\text{logn.}\, \frac{p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T_1} = \varphi_2 + c_p \,\text{logn.}\, \frac{p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T_2}$$

und hieraus ist zu schliessen, dass im Falle der Richtigkeit meiner Hypothese allgemein der Werth

$$\varphi + c_p \,\text{logn.}\, \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T}$$

für gesättigte Wasserdämpfe eine constante Grösse sein müsste; bezeichne ich diese Constante mit φ_0, so fände sich statt der früher gegebenen Gl. (7) auch die Formel

$$\varphi = c_p \,\text{logn.}\, \frac{T}{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} + \varphi_0 \qquad (12)$$

Dass diese Formel bei richtiger Wahl der Constanten $\varkappa$ und φ_0 wirklich die Werthe von φ mit grosser Genauigkeit wiedergiebt, wird sich durch die Ergebnisse der folgenden Rechnungen zeigen.

Setze ich $\varkappa = \frac{4}{3} = 1{,}3333$, sonach $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ und $\varphi_0 = 1{,}0933$, sowie statt des natürlichen den Brigg'schen Logarithmus, so ergiebt sich zur Berechnung von φ die Formel:

$$\varphi = 0{,}2766 \log._{10} \frac{T^4}{p} - 1{,}0933 \qquad (13)$$

wobei der Druck p in Atmosphären zu setzen und die Temperatur t nach Celsius den Tabellen von Regnault zu entnehmen ist.

Wie gut diese Formel den Werth von φ wiedergiebt, zeigt folgende Tabelle 1, welche in der 4. Columne φ nach Gl. (13) und in Columne 3 nach Gl. (7) berechnet angiebt.

Ich hätte die Uebereinstimmung sogar noch etwas erhöhen

können, wenn ich den Werth $\varkappa$ nur wenig verschieden von $\frac{4}{3}$ angenommen hätte; ich ziehe jedoch vor, diesen runden Werth zu adoptiren, weil dadurch die numerischen Rechnungen im Weiteren ausserordentlich vereinfacht werden.

Tabelle 1.

1 Druck in Atmosphären p	2 Temperatur t (C.) nach Regnault	3 $\varphi = \tau + \frac{r}{T}$	4 φ nach Gl. (13)
0.1	46.21	1.9548	1.9538
0.2	60.45	1.8929	1.8912
0.5	81.71	1.8116	1.8111
1	100.00	1.7519	1.7520
2	120.60	1.6940	1.6946
3	133.91	1.6612	1.6619
4	144.00	1.6384	1.6391
5	152.22	1.6209	1.6217
6	159.22	1.6071	1.6076
7	165.34	1.5955	1.5958
8	170.81	1.5856	1.5858
9	175.77	1.5769	1.5769
10	180.31	1.5691	1.5691
11	184.50	1.5625	1.5621
12	188.41	1.5563	1.5557
13	192.08	1.5506	1.5503
14	195.53	1.5454	1.5445

Die hohe Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit der Hypothese, welche vorstehenden Formeln zu Grunde liegt, lässt sich auch in folgender Art darlegen.

Differentiirt man Gl. (12), so folgt:

$$d\varphi = c_p \frac{dt}{T} - c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{dp}{p} \tag{14}$$

Differentiirt man dagegen Gl. (7), indem man die Bedeutung von τ nach Gl. (4) beachtet, so folgt:

$$d\varphi = \frac{1}{T}\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right) dt$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber eine Funktion, deren Werth sich leicht berechnen lässt, und die ich a. a. O. die Clausius'sche Temperaturfunktion*) genannt habe. Bezeichnen wir diese Funktion, welche in der Theorie der gesättigten Dämpfe eine sehr merkwürdige Rolle spielt, mit h, so folgt auch

$$d\varphi = \frac{h}{T}\, dt \qquad (15).$$

Die Verbindung mit Gl. (14) giebt dann die Beziehung:

$$h = c_p - c_p \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T dp}{p dt} \qquad (16)$$

Diese Formel lässt sich nun ebenfalls zur Prüfung meiner Hypothese verwenden.

So berechnet sich z. B. bei Wasserdampf für die Temperaturen 0^0, 100^0 und 200^0 beziehungsweise:

$$h = -1{,}9166; \; -1{,}1333; \; -0{,}6766$$

Ferner findet sich aus den Regnault'schen Formeln, welche die Beziehung zwischen Druck und Temperatur geben**), beziehungsweise:

$$\frac{T dp}{p dt} = 19{,}520; \; 13{,}344; \; 9{,}851$$

Setze ich diese Werthe in Gl. (16) ein und setze ich zuerst voraus, es sei c_p constant und zwar nach Regnault 0,4805, so findet sich für die angenommenen Temperaturwerthe:

$$\varkappa = 1{,}3434; \; 1{,}3362; \; 1{,}3234$$

Setze ich dagegen, wie es im Weiteren wie oben geschehen soll, $\varkappa = \frac{4}{3} = 1{,}3333$, so berechnet sich aus Gl. (16) umgekehrt:

$$c_p = 0{,}49397; \; 0{,}48514; \; 0{,}46255$$

und das Mittel aus den letzteren Werthen ist 0,4805, also sonderbarer Weise ganz genau mit Regnault's Mittelwerth in Uebereinstimmung.

---

*) S. S. 312. **) Vergl. Tab. 1 am Schlusse dieses Werkes.

Aus dem Vorstehenden ist zu schliessen, dass sich die Grössen x und c_p, im Falle sich eine davon oder beide durch spätere genauere Untersuchungen als Veränderliche herausstellen sollten, was wahrscheinlich ist, nur sehr langsam ändern und dass es bis auf Weiteres erlaubt ist, sie als constant anzusehen. Die Resultate der folgenden Untersuchungen werden diese Annahme weiter rechtfertigen.

Ableitung der Zustandsgleichung für überhitzte Wasserdämpfe.

Die Zustandsgleichung stellt die Beziehung zwischen den Grössen p, v und t oder $T = 273 + t$ dar. Betrachtet man die absolute Temperatur als eine Funktion des Druckes und Volumens gegeben, so ist:

$$d\,T = \left(\frac{d\,T}{dp}\right) dp + \left(\frac{d\,T}{dv}\right) d\,v$$

oder auch, weil man $d\,T$ durch $d\,t$ ersetzen kann,

$$d\,T = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) d\,v \qquad 17$$

Die beiden partiellen Differentialquotienten lassen sich nun aber darstellen, wenn man von den Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie Gebrauch macht. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei und setzen wir die spezifische Wärme bei constantem Volumen c_v, so sind diese Gleichungen für irgend einen Körper, vorausgesetzt, derselbe ändere während der Wärmemittheilung seinen Aggregatzustand nicht, folgende*):

$$A = \frac{d}{dp}\left[c_p \left(\frac{dt}{dv}\right)\right] - \frac{d}{dv}\left[c_v \left(\frac{dt}{dp}\right)\right] \qquad \text{I}$$

$$A \cdot T = (c_p - c_v) \left(\frac{dt}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right) \qquad \text{II}$$

*) S. S. 519.

$$\left.\begin{aligned} dQ &= c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)dp + c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)dv \\ dQ &= c_v\,dt + AT\left(\frac{dp}{dt}\right)dv \\ dQ &= c_p\,dt - AT\left(\frac{dv}{dt}\right)dp \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Dividire ich die letzte Gleichung durch T, so folgt:

$$\frac{dQ}{T} = c_p\,\frac{dt}{T} - A\left(\frac{dv}{dt}\right)dp$$

Wie aus der in Gl. (5) und (8) angeführten Bezeichnung hervorgeht, ist aber $dQ : T$ mit $d\varphi$ identisch, und für den letzteren Werth fand sich nach Gl. (14)

$$d\varphi = c_p\,\frac{dt}{T} - c_p\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\cdot\frac{dp}{p}$$

Aus der Vergleichung beider Formeln folgt daher die erste neue Beziehung für überhitzte Wasserdämpfe:

$$c_p\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{A\varkappa p}{(\varkappa - 1)} \tag{18}$$

Setze ich diesen Ausdruck in Gl. (I), so ist ferner, weil c_p und $\varkappa$ constant sind:

$$\frac{d}{dv}\left[c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)\right] = \frac{A}{\varkappa - 1}$$

und hieraus durch Integration:

$$c_v\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{Av}{\varkappa - 1} \tag{19}$$

wobei ich freilich die Annahme mache, dass die Integrationsconstante, die im Allgemeinen eine Funktion von p sein könnte, Null sei. Diese Annahme wird aber durch die Uebereinstimmung der folgenden Rechnungsresultate mit der Beobachtung vollständig bestätigt.

Benutzt man nun Gl. (18) und (19) in Gl. (II), so ergiebt sich ferner nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + c_p\,\frac{(\varkappa - 1)^2}{\varkappa}\cdot\frac{T}{Apv} \tag{20}$$

Bestimmen wir aus dieser Formel c_v und benutzen wir den Werth in Gl. (19), so folgt:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{Av}{c_p\,(\varkappa - 1)} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T}{p} \qquad (21)$$

während Gl. (18) ergiebt:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{A\varkappa p}{c_p\,(\varkappa - 1)} \qquad (22)$$

Die Substitution dieser beiden Differentialquotienten in Gl. 17 giebt alsdann:

$$dT = \frac{A}{c_p\,(\varkappa - 1)}\,(v\,dp + \varkappa\,p\,dv) + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T}{p}\,dp \qquad (23)$$

und das ist das Differential der **Zustandsgleichung der überhitzten Wasserdämpfe.**

Die Integration dieser Gleichung unterliegt keiner Schwierigkeit. Man erhält:

$$pv = BT - Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \qquad (24)$$

in welcher Gleichung B und C constante Werthe sind, von denen der erstere Werth sich aus der Gleichung

$$B = \frac{c_p\,(\varkappa - 1)}{A\varkappa} \qquad (25)$$

berechnet. Für überhitzte Wasserdämpfe war nach Obigem $c_p = 0{,}4805$ und $\varkappa = 1{,}333$; man hat daher für diese Dämpfe $B = 50{,}933$; die andere Constante C bestimmt sich ebenfalls leicht, wie das Folgende ergeben wird.

Gl. (24) ist es denn nun, die ich als Zustandsgleichung der überhitzten Wasserdämpfe hinstelle. Mit grösster Leichtigkeit lässt sich mit Hülfe dieser Gleichung, wenn von drei Grössen p, v und T zwei gegeben sind, die dritte berechnen. Diese Zustandsgleichung unterscheidet sich von der Gleichung der permanenten Gase

$$pv = RT$$

nur durch das Glied $Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$, welches wegen des Werthes von $\varkappa$ bei überhitzten Wasserdämpfen in die Form $C\sqrt[4]{p}$ übergeht.

Prüfung der neuen Zustandsgleichung.

Soll die angegebene Gleichung für überhitzte Wasserdämpfe richtig sein, so muss sie auch für den Grenzzustand, nämlich für den Fall gelten, dass der Dampf in den gesättigten Zustand übergeht; die Gleichung muss also, wenn man die einem gewissen Drucke p entsprechende Temperatur t substituirt, das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes geben. Diese Voraussetzung führt zunächst auf den Werth der Constanten C.

Die mechanische Wärmetheorie giebt z. B. für gesättigten Wasserdampf von **einer** Atmosphäre Druck ($p = 10334$) und $t = 100^0$, $T = 373^0$ das Volumen v von einem Kilogramm Dampf $v = 1{,}6506$ Cubikmeter. Benutze ich diese Werthe in Gl. (24), so findet sich:

$$C = 192{,}50$$

Ist nun die Gleichung richtig, so muss sie auch für jeden anderen Druck das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes ergeben; wie weit sich das bestätigt, zeigt die folgende Tabelle 2 auf Seite 560.

Die 2. Columne giebt das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes für verschiedene Pressungen, berechnet nach den Grundformeln der mechanischen Wärmetheorie; die 3. Columne ist nach Gl. (24) berechnet, wobei nur zu bemerken ist, dass die oben gegebenen Werthe von B und C für den Fall gelten, dass der Druck p in Kilogrammen pro Quadratmeter substituirt wird. Setzen wir bei numerischen Rechnungen p in Atmosphären, so haben wir in der Formel:

$$\left.\begin{array}{c} pv = BT - C\sqrt[4]{p} \\ B = 0{,}0049287 \text{ und } C = 0{,}187815 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

anzunehmen.

Die Tabelle enthält in der letzten Columne noch die Werthe $\frac{C}{B}\sqrt[4]{p}$, von denen in der Folge noch mehrfach Gebrauch gemacht wird.

Man ersieht, dass die Uebereinstimmung der Werthe beider Zahlenreihen eine sehr befriedigende ist, und dass man obige Gleichung zugleich auch für reine gesättigte Dämpfe in Anwendung bringen kann. Nur für Dampfspannungen von **weniger**

Tabelle 2.

Druck in Atmosphären	Spezifisches Volumen des gesättigten Wasserdampfes		Werthe von $\frac{C}{B}\sqrt[4]{p}$
	nach der mechanischen Wärmetheorie	nach Gl. (24)	
0.1	14.552	14.677	21.429
0.2	7.543	7.583	25.483
0.5	3.171	3.181	32.043
1	1.6504	1.6506	38.106
2	0.8598	0.8583	45.316
3	0.5874	0.5861	50.151
4	0.4484	0.4474	53.891
5	0.3636	0.3630	56.982
6	0.3064	0.3060	59.640
7	0.2652	0.2650	61.983
8	0.2339	0.2339	64.087
9	0.2095	0.2096	66.002
10	0.1897	0.1900	67.764
11	0.1735	0.1739	69.398
12	0.1599	0.1604	70.924
13	0.1483	0.1489	72.357
14	0.1383	0.1383	73.711

als einer Atmosphäre treten Abweichungen auf, die schon zu gross erscheinen können. Ich glaube jedoch, dass für solche Pressungen auch die Werthe, auf welche die mechanische Wärmetheorie führt, nicht ganz sicher sind. Durch die geringste Aenderung in den eingeführten Constanten hätte übrigens für solche Dämpfe eine bessere Uebereinstimmung hervorgebracht werden können; man brauchte nur in ähnlicher Weise, wie es Regnault mit seinen Formeln gethan hat, welche die Beziehung zwischen Druck und Temperatur darstellen, Dampf von mehr als einer Atmosphäre von dem zu unterscheiden, dessen Druck geringer als eine Atmosphäre ist. Für unsere weiteren Zwecke genügen jedoch die oben gewählten Constanten vollständig; da ich vor

Allem die Bedürfnisse der Technik im Auge habe, und bei Dampfmaschinen jederzeit höherer Dampfdruck in Anwendung kommt, so sollen an den angenommenen Constanten keine Aenderungen vorgenommen werden.

Nach Gl. (24) oder (26) lässt sich nun leicht das Volumen des überhitzten Dampfes für beliebigen Druck und jede Temperatur berechnen: setzt man $T = 273 + t$ und $t = 100, 110, 120$, u. s. w., sowie $p = 1$ in Gl. (26), so folgen beispielsweise für überhitzten Wasserdampf von einer Atmosphäre Druck für die angenommenen Temperaturen die im Folgenden angegebenen Werthe des spezifischen Volumens:

t	v		t	v	
$t = 100^0$	$v = 1,6506$	Cbkmtr.	$t = 160^0$	$v = 1,9463$	Cbkmtr.
110	1,6999	»	170	1,9956	»
120	1,7492	»	180	2,0449	»
130	1,7984	»	190	2,0942	»
140	1,8477	»	200	2,1435	»
150	1,8970	»	210	2,1927	»

Hirn hat für einige verschiedene Werthe des Druckes und der Temperatur das spezifische Volumen beobachtet. Die folgende kleine Uebersicht zeigt, wie vortrefflich seine Versuchsresultate mit den Ergebnissen unserer Formel übereinstimmen.

Druck in Atmosphären	Temperatur Celsius	Spezifisches Volumen Cubikmeter	
		nach Hirn's Versuch	nach Gl. (26)
1	118.5	1.74	1.7417
1	141	1.85	1.8526
3	200	0.697	0.6947
4	165	0.4822	0.4733
4	200	0.522	0.5164
4	246	0.5752	0.5731
5	162.5	0.3758	0.3731
5	205	0.414	0.4150

Berechnet man für gleichen Druck und gleiche Temperatur das spezifische Volumen v' von atmosphärischer Luft, so giebt das Verhältniss $v' : v$ das spezifische Gewicht des Dampfes in Hinsicht der Luft; so erhält man z. B. für die Temperaturen 100°, 150°, 200° bei einer Atmosphäre Druck beziehungsweise 0,6401, 0,6316 und 0,6250, also mit stärker werdender Ueberhitzung abnehmend.

Zu näherer Prüfung der Zuverlässigkeit unserer Zustandsgleichung für Dämpfe mag nun auch der Ausdehnungscoefficient für überhitzten Dampf bestimmt werden.

Ist α der Ausdehnungscoefficient, so schreibt sich für Gase das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac in folgender bekannten Form:

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

Findet die Ausdehnung bei constantem Drucke statt, so ist $p = p_1$ und man erhält aus vorstehender Formel:

$$\alpha = \frac{v_1 - v}{v t_1 - v_1 t}$$

Findet dagegen die Erwärmung bei constantem Volumen statt, so ist $v_1 = v$ und dieselbe Gleichung giebt dann:

$$\alpha = \frac{p_1 - p}{p t_1 - p_1 t}$$

Die erstere Formel giebt, wie man sich ausdrückt, den Ausdehnungscoefficienten für Volumenänderung, die zweite den für Druckänderung. Geht man zum Differential über, so findet sich aus den gegebenen Formeln für Volumenänderung:

$$\alpha = \frac{1}{v \frac{dt}{dv} - t} \tag{27}$$

und für Druckänderung:

$$\alpha = \frac{1}{p \frac{dt}{dp} - t} \tag{28}$$

Für ein vollkommenes Gas geben beide Formeln den gleichen Werth $\alpha = 0{,}003665$; nicht so bekanntlich bei einem wirklichen Gase oder bei Dämpfen.

Ersetzen wir in Gl. (24) T durch $a + t$, wobei $a = 273$ ist, und setzen wir, indem wir differentiiren, erst v und dann p constant, so folgt, wie sich leicht verfolgen lässt:

$$v \frac{dt}{dv} = \frac{pv}{B}$$

$$p \frac{dt}{dp} = \frac{pv}{B} + \frac{C}{B} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}.$$

Diese Werthe in Gl. (27) und (28) substituirt und pv durch Gl. (24) ersetzt, giebt dann für überhitzte Dämpfe den Ausdehnungscoefficienten α für Volumenänderung:

$$\alpha = \frac{1}{a - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} \tag{29}$$

und für Druckänderung:

$$\alpha = \frac{1}{a - \frac{C}{B\varkappa} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} \tag{30}$$

Beide Werthe sind also verschieden, und zwar ist der letztere Werth, weil $\varkappa > 1$ ist, immer etwas kleiner als der erstere, was mit Regnault's Beobachtungen an Gasen übereinstimmt; dann ist auch α stets grösser als $1 : a = 0{,}003665$, was in gleicher Art die Beobachtung bestätigt. Ferner erscheint α um so grösser, je grösser der Druck p ist; auch dieses Resultat wird durch das Experiment bestätigt. Hat doch Regnault selbst beim Wasserstoffgas, welches in seinem Verhalten einem permanenten Gase am nächsten steht, bei verschiedenem Drucke etwas von einander abweichende Werthe für den Ausdehnungscoefficienten gefunden.

Nach Gl. (29) und (30) sind die folgenden Werthe für einige Werthe des Druckes p für überhitzte Wasserdämpfe berechnet; da p in Atmosphären gilt, so wurde von den bei Gl. (26) angege-

benen Constanten Gebrauch gemacht, überdies wie bisher $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{4}$ gesetzt.

	Ausdehnungscoefficient bei Volumenänderung:	bei Druckänderung:
$p = 0,1$	$\alpha = 0,003975$	$\alpha = 0,003892$
0,5	0,004150	0,004017
1	0,004257	0,004090
5	0,004629	0,004343
10	0,004872	0,004501

Die vorstehenden Formeln bestätigen alle Sätze, auf welche bis jetzt die Versuche, betreffend den Ausdehnungscoefficienten von Gasen und Dämpfen, geführt haben; ich darf daher das Gegebene als einen weiteren Beweis der Zuverlässigkeit der neuen Zustandsgleichung ansehen. Ein neues Resultat geht aber noch aus den Gleichungen (29) und (30) hervor, dass nämlich der Ausdehnungscoefficient α nur vom Drucke p, nicht aber vom Volumen und dem Grade der Ueberhitzung abhängt. Es existirt keine Beobachtung, welche diesen Satz widerlegt; will man ihn nicht in voller Allgemeinheit annehmen, so muss man nach den obigen Entwickelungen wenigstens zugeben, dass er für überhitzte Wasserdämpfe in der Nähe des Condensationspunktes als genau genug angesehen werden darf.

Es mag nun endlich die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes bei constantem Volumen (c_v) näher bestimmt werden. Bei einem vollkommenen Gase ist der oben mit x bezeichnete Werth mit dem Verhältnisse $c_p : c_v$ identisch; nicht so ist es bei Dämpfen. Hier gilt die oben unter Nr. (20) aufgefundene Gleichung:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + c_p \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \cdot \frac{T}{Apv}$$

Benutzen wir hier Gl. (24) und (25), so folgt nach leichter Reduction

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{x-1}{1 - \frac{C}{B} \frac{p^{\frac{x-1}{x}}}{T}} \tag{31}$$

Mit Hülfe dieser Formel findet sich nun für jeden gegebenen Zustand des überhitzten Dampfes das Verhältniss $c_p : c_v$ und hier-

aus, weil c_p bekannt ist, der Werth c_v. Schon aus der Formel ist zu entnehmen, dass mit zunehmender Ueberhitzung der Werth $c_p : c_v$ sich dem Werthe $\varkappa$ nähert: bei kleinem Drucke und sehr grosser Ueberhitzung würde daher bei Wasserdampf $c_p : c_v = \frac{4}{3}$ und hiernach $c_v = 0{,}3604$ sein, und den letzteren Werth betrachte ich als die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Volumen, wenn der Dampf durch starke Ueberhitzung bei geringem Drucke ganz in den Zustand eines permanenten Gases übergegangen ist. Die Gleichung lehrt ferner, dass das Verhältniss $c_p : c_v$ zunimmt und c_v abnimmt, je mehr sich der Dampf dem gesättigten Zustande nähert. So ergiebt z. B. Gl. (31) für gesättigten Wasserdampf von 0,1, 0,5, 1 und 5 Atmosphären Druck folgende Resultate:

$p =$	0,1	0,5	1	5
$\frac{c_p}{c_v} =$	1,3581	1,3664	1,3713	1,3849
$c_v =$	0,3538	0.3516	0,3504	0,3470

Auffallend könnte es scheinen, dass der Werth der spezifischen Wärme c_v bei constantem Volumen wächst, je weiter man, vom gesättigten Zustande des Dampfes ausgehend, mit der Ueberhitzung fortschreitet. Nach der Vorstellung, die man sich von Gasen und Dämpfen macht, erwartet man eher das Umgekehrte. Die weiteren Untersuchungen werden aber unser Resultat bestätigen und erklären.

Die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, angewendet auf überhitzte Dämpfe.

Ist die Gewichtseinheit von überhitztem Dampfe gegeben durch Druck, Volumen und Temperatur, so werden mit der Mittheilung der Wärmemenge dQ Aenderungen dieser Grössen verbunden sein. Die oben aufgeführten Gleichungen (III) geben allgemein die Beziehungen, welche hierbei unter diesen Grössen stattfinden. Für überhitzte Dämpfe ergiebt sich, wenn man die Gleichungen (18) bis (23) entsprechend in den Gleichungen (III) benutzt:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \frac{A}{\varkappa - 1}(v\,dp + \varkappa p\,dv) \\ dQ &= c_p\left(dt - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{T}{p}\,dp\right) \\ dQ &= c_v\left(dt + (\varkappa - 1)\,\frac{T}{v}\,dv\right) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

und diese Gleichungen unterscheiden sich von denen der permanenten Gase **nicht** in der Form, sondern nur dadurch, dass der Werth c_v der spezifischen Wärme bei constantem Volumen hier veränderlich erscheint und nach Gl. (20) zu beurtheilen ist, während er bei Gasen constant ist und zwar sich durch $c_v = c_p : \varkappa$ ermittelt.

Ist die Zustandsänderung umkehrbar, d. h. ist während der Volumenänderungen der Dampfdruck p mit dem äusseren Drucke immer im Gleichgewichte, so ist die Arbeit, welche der Ausdehnung dv entspricht: $p\,dv$, und die entsprechende Wärmemenge $Ap\,dv$; von der mitgetheilten Wärmemenge dQ wird die letztgenannte sonach zu äusserer Arbeit verbraucht, und der Rest wird zur Erhöhung der inneren Arbeit verwendet (zur Veränderung der Schwingungsgeschwindigkeiten und der Stellung der kleinsten Theile). Bezeichnen wir die Veränderung der inneren Arbeit mit dU, so folgt:

$$A\,dU = dQ - Ap\,dv$$

und wenn man dQ durch die erste der Gleichungen (32) ersetzt, nach einfacher Umformung:

$$A\,dU = \frac{A}{\varkappa - 1}\,d\,(pv) \qquad (33)$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man von einem gewissen Anfangszustande ausgeht, so folgt:

$$A\,(U - U_1) = \frac{A}{\varkappa - 1}\,(pv - p_1 v_1)$$

Die Differenz $U - U_1$ giebt den Mehrbetrag der inneren Arbeit, und da hier diese Differenz mit A multiplizirt erscheint, so ist diese Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen. Nehme ich an,

der Anfangszustand sei Wasser von 0° Temperatur, und bezeichne ich die linke Seite vorstehender Gleichung mit J, so schreibt sich die Formel auch

$$J = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p v \tag{34}$$

J_0 bedeutet eine noch zu bestimmende Constante und J giebt nun an, wie viel Wärme im überhitzten oder gesättigten Dampfe vom Drucke p und Volumen v mehr enthalten ist, als im Wasser von 0° Temperatur. Ich nenne J kurz die Dampfwärme.

Die Formel muss für überhitzte und gesättigte Dämpfe gleichzeitig gelten; für die letztere Art von Dämpfen kann man aber nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie die Dampfwärme ermitteln, und daher bietet sich ein Mittel, nicht nur die Constante J_0 zu bestimmen, sondern auch zu erproben, ob die Gl. (34) zunächst für gesättigte Dämpfe von beliebigem Drucke gilt.

Denkt man sich 1 Kilogr. Wasser unter dem Drucke p von 0° auf t° erwärmt, so erfordert das eine Wärmemenge:

$$q = \int_0^t c\,dt$$

wobei c nach Gl. (2) eingesetzt wird; man erhält:

$$q = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3$$

Wird nun das Wasser unter constantem Drucke p vollständig in gesättigten Dampf verwandelt, so ist schliesslich im Dampfe eine gewisse Wärmemenge ϱ mehr enthalten, als vorher im Wasser von gleicher Temperatur; ich nenne ϱ die innere latente Wärme und fand für Wasserdampf*):

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791 \,.\, t$$

Nun ist offenbar für gesättigten Dampf:

$$J = q + \varrho \tag{35}$$

So findet sich z. B. für gesättigten Wasserdampf von einer Atmosphäre Druck ($p = 10334$), weil $t = 100°$ ist, $J = 596{,}80$;

*) S. S. 282.

setzt man diesen Werth in Gl. (34) und überdies $r = 1{,}6506$ nach obiger Tabelle 2, so folgt umgekehrt für die Constante J_0 dieser Gleichung:

$$J_0 = 476{,}11$$

Unter Benutzung der Werthe von r der Tabelle 2 sind dann nach Gl. (34) die Werthe der letzten Columne der folgenden Tabelle berechnet worden, während die der vorletzten der Formel $q + \varrho$ entsprechen.

Tabelle 3.

Druck in Atmosphären	Dampfwärme J für gesättigten Wasserdampf	
	nach Gl. (35)	nach Gl. (34)
1	596.80	596.80
2	601.42	601.62
3	604.47	604.68
4	606.81	606.97
5	608.73	608.81
6	610.39	610.38
7	611.86	611.74
8	613.18	612.96
9	614.38	614.05
10	615.49	615.05

Man erkennt die befriedigende Uebereinstimmung der Werthe beider Zahlenreihen und kann hierin einen neuen Beweis der Zuverlässigkeit der für das Verhalten überhitzter Dämpfe hingestellten Sätze finden.

Zu sehr bemerkenswerthen Resultaten, die zu weiterer Bestätigung der Richtigkeit der von mir aufgestellten Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe führen, gelangt man, wenn man Gl. (24) in Gl. (34) benutzt. Es folgt dann:

$$J = J_0 + \frac{AB}{\varkappa - 1}\left(T - \frac{C}{B}\, p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)$$

oder den Werth B aus Gl. (25) benutzt:

$$J = J_0 + \frac{c_p}{\varkappa}\left(T - \frac{C}{B}\, p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) \qquad (36)$$

Bei kleinem Drucke p und hoher Ueberhitzung kann man nun in der oben gegebenen Gl. (31) das Quadrat des Gliedes

$$\frac{C}{B}\frac{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T}$$

vernachlässigen und erhält dann statt der angezogenen Gleichung:

$$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa + (\varkappa - 1)\frac{C}{B}\frac{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T}$$

Bestimmt man hieraus $c_p : \varkappa$ und führt man den Werth in Gl. (36) ein, so ergiebt sich unter den gleichen Voraussetzungen nach leichter Umformung

$$J = J_0 + \left(1 - \frac{C}{B\varkappa}\frac{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T}\right) c_v \mathrm{T} \qquad (37)$$

Bei sehr kleinem Drucke p und sehr starker Ueberhitzung, wobei der Dampf fast vollständig in den Zustand eines permanenten Gases übergegangen ist, lässt sich noch das zweite Glied in der Klammer vernachlässigen. und man hat dann:

$$J = J_0 + c_v\, T$$

und diese Gleichung ist es, die man auch wirklich für permanente Gase hinstellt. Setzen wir, wie oben $J = A\,U$, wo U die innere Arbeit darstellt, so ist:

$$A\, d\, U = c_v\, d\, T$$

woraus folgt, dass bei der Erwärmung der Gase die Vermehrung der inneren Arbeit der Temperaturerhöhung einfach proportional

ist; ein Satz, von welchem Clausius in seiner Theorie der Gase ausgegangen ist.

Es soll nun schliesslich auch noch für überhitzte Wasserdämpfe der Werth bestimmt werden, den man bei gesättigten Dämpfen die Gesammtwärme nennt, und für welche Regnault die empirische Formel:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t$$

hingestellt hat. Es ist das diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Gewichtseinheit Wasser bei constantem, der Dampftemperatur t entsprechendem Drucke vollständig in gesättigten Dampf zu verwandeln.

Gehen wir weiter, indem wir uns überhitzten Dampf vom Volumen v unter den gleichen Verhältnissen erzeugt denken, so ist bei der Bildung die Arbeit $p\,(v-\sigma)$ verrichtet worden und die Wärmemenge $Ap\,(v-\sigma)$ verschwunden, wenn wir mit σ das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bezeichnen. Man kann aber ohne Bedenken σ gegen v vernachlässigen und erhält daher für die Gesammtwärme λ:

$$\lambda = J + Apv$$

oder unter Benutzung von Gl. (34):

$$\lambda = J_0 + \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1}\, pv \tag{38}$$

und unter Benutzung von (Gl. 24) und (25):

$$\lambda = J_0 + c_p \left(T - \frac{C}{B}\, p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \right) \tag{39}$$

wobei wie oben $J_0 = 476{,}11$ zu setzen ist.

Da diese Gleichung auch für gesättigte Dämpfe gültig ist, so würde, im Falle solche sich wie permanente Gase verhielten, $C = 0$ sein, und dann wäre:

$$\lambda = J_0 + c_p T$$

und der Vergleich mit der Regnault'schen Formel ergäbe dann für die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke $c_p = 0{,}305$, ein Resultat, welches schon von Rankine

auf anderem Wege erhalten wurde. Gl. (39) erklärt jetzt deutlich den Grund der Abweichung von dem richtigen Werthe $c_p = 0{,}4805$.

Die nach Gl. (39) berechneten Werthe von λ für gesättigten Dampf stimmen ganz befriedigend mit denen der Regnault-schen Formel überein. Man erhält z. B. für:

	$p =$	0,5	1	5 Atmosphären,
nach Gl. (39)	$\lambda =$	631,15	637,02	653,05
- Regnault	$\lambda =$	631,42	637,00	652,93

Unsere Gl. (39) hat aber den Vorzug, dass sie allgemein auch für überhitzte Wasserdämpfe gilt.

Anwendungen.

Betrachtet man die von mir aufgestellte Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe, zunächst der Wasserdämpfe, als richtig (und ich glaube, dass durch das oben Gegebene die hohe Wahrscheinlichkeit ihrer Richtigkeit wenigstens für die gewöhnlich vorkommenden Dampfpressungen nachgewiesen ist), so ist nun das Mittel gegeben, eine ganze Reihe von Fragen zu lösen, deren Beantwortung bis jetzt unmöglich war. Vor Allem sind es diejenigen Probleme, die zugleich von technischer Bedeutung sind, welche mit Leichtigkeit gelöst werden können, und eine Theorie der Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe unterliegt nun keiner Schwierigkeit mehr. Es sollen hier nur einige der wichtigsten Fälle untersucht werden, von denen mehrere, weil entsprechende Versuche vorliegen, als weitere Bestätigung des oben Gegebenen dienen sollen.

Adiabatische Curve. Ist die Gewichtseinheit überhitzter Dampf von Druck p_2 und Volumen v_2 gegeben, und dehnt sich derselbe arbeitsverrichtend ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme aus, so giebt die adiabatische Curve das Gesetz der Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v an; diese Curve giebt auch das Gesetz an, nach welchem bei Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe die Expansionscurve im Indicatordiagramm verläuft. Ist der Anfangszustand durch die Werthe p_2, v_2, T_2 und der Endzustand durch p_1, v_1, T_1 gegeben (Fig. d), so lässt sich nach den Gleichungen (32) leicht

die Beziehung zwischen den einzelnen Grössen finden: setzt man dort in den 3 Gleichungen $dQ = 0$, so folgt durch Integration:

$$p_1 v_1^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\varkappa - 1} \tag{40}$$

das sind dieselben Gleichungen wie bei permanenten Gasen: nur ist dort bei atmosphärischer Luft $\varkappa = 1{,}410$, während bei überhitztem Wasserdampfe $\varkappa = 1{,}3333$ sich herausstellte.

Die Arbeit L bei der Ausdehnung, d. i. die Expansionsarbeit der Gewichtseinheit Dampf bei Dampfmaschinen, findet sich aus der Gleichung:

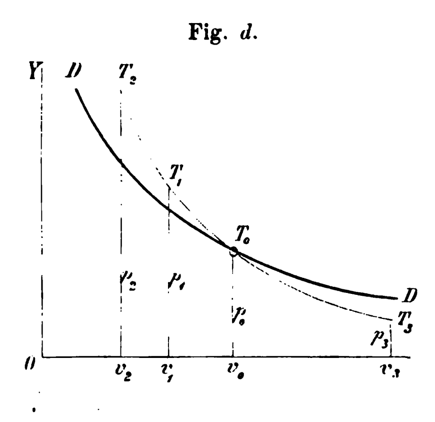
$$L = \int_{v_2}^{v_1} p\, dv$$

und hieraus, wenn man p durch die Formel $p v^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa}$ ausdrückt:

$$L = \frac{p_2 v_2}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\varkappa - 1}\right] \tag{41}$$

Die Anwendung dieser Formel bei Dampfmaschinen setzt allerdings voraus, dass der Dampf während der Expansion überhitzt bleibe. Bei starker Expansion kann es aber vorkommen, dass von einem gewissen Momente an der Dampf gesättigt wird, und von da an findet ein Niederschlagen von Dampf statt, und die Expansionscurve nimmt einen anderen Verlauf an. Im Augenblicke des Ueberganges durchschneidet die adiabatische Curve die Grenzcurve DD im Punkte T_0 (Fig. d). Druck p_0 und Volumen v_0, welche diesem Punkte entsprechen, lassen sich aber ermitteln. Ich habe gezeigt*), dass der Verlauf der Grenzcurve DD genau genug durch die Formel:

Fig. d.



*) S. S. 294.

$$p v^n = D$$

dargestellt werden kann, wobei für Wasserdampf $n = 1{,}0646$, und wenn p in Atmosphären gegeben ist, $D = 1{,}704$ zu setzen ist.

Da nun der Punkt T_0 ($p_0 v_0$) sowohl in der Grenzcurve, als in der adiabatischen Curve des überhitzten Dampfes liegt, so gelten für ihn die beiden Formeln:

$$p_0 v_0^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa} \text{ und } p_0 v_0^n = D$$

und durch Verbindung folgt:

$$\frac{v_0}{v_2} = \left(\frac{p_2 v_2^n}{D}\right)^{\frac{1}{\varkappa - n}} \tag{42}$$

Diese Gleichung giebt uns das Expansionsverhältniss $v_0 : v_2$, wenn der überhitzte Dampf am Ende der Expansion gerade in den gesättigten Zustand übergegangen sein soll. Ist in Wirklichkeit das Expansionsverhältniss $v_1 : v_2$ kleiner, als $v_0 : v_2$ (Fig. *d*), so gilt für die Expansionsarbeit einfach obige Formel (41); ist es dagegen grösser, etwa $v_3 : v_2$ (Fig. *d*); so berechnet man die Arbeit erst für die Strecke $T_2 T_0$, indem man in Gl. (41) v_0 statt v_1 setzt. Für die weitere Strecke $T_0 T_3$ setzt man dagegen in Formel (41) $p_0 v_0$ statt $p_2 v_2$, ferner $v_3 : v_0$ statt $v_2 : v_1$ und endlich $1{,}135$ statt $\varkappa = 1{,}333$, wie ich für gesättigten Dampf, dem Anfangs kein Wasser beigemischt ist, a. a. O. angegeben habe*).

Beispiel. Eine Dampfmaschine arbeitet mit überhitztem Dampfe von 5 Atmosphären Druck und $t_2 = 180^0$ Temperatur; welches ist das Expansionsverhältniss, wenn der Dampf am Ende gerade in den gesättigten Zustand übergegangen sein soll?

Das spezifische Volumen v_2 dieses Dampfes ist nach Gl. (26):

$$v_2 = 0{,}39037 \text{ Cubikmtr.}$$

Gl. (42) giebt dann für das gesuchte Expansionsverhältniss $v_0 : v_2 = 1{,}322$.

Isodynamische Curve. Unter isodynamischer Curve verstehen wir diejenige Curve, nach welcher sich der Druck mit dem Volumen ändert, wenn die innere Arbeit, d. h. bei Dämpfen,

*) S. S. 339.

die Dampfwärme constant sein soll. Ist wieder Druck und Volumen im Anfange p_2 und v_2, so giebt Gl. (34) unter der gemachten Voraussetzung:

$$J = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_2 v_2 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p v$$

woraus folgt:

$$p v = p_2 v_2 \tag{43}$$

Für überhitzte Dämpfe ist sonach die isodynamische Curve eine gleichseitige Hyperbel, genau wie bei permanenten Gasen.

Aus Gl. (36) folgt auf gleichem Wege:

$$T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = T_2 - \frac{C}{B} p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

und hieraus berechnet sich die Temperatur T für jeden anderen Druck p. Mit Ausdehnung und Druckerniedrigung ist daher immer eine Temperaturabnahme verbunden, während bei permanenten Gasen die Temperatur constant bleibt. Für überhitzten Dampf findet sich die Temperaturänderung:

$$t_2 - t = \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) \tag{44}$$

Die letzten Formeln lösen ein interessantes Problem. Wird ein mit Dampf gefülltes Gefäss mit einem luftleeren Raume in Verbindung gesetzt, so breitet sich der Dampf aus, und nachdem er in den Ruhezustand übergegangen ist, befindet er sich in überhitztem Zustande, vorausgesetzt, dass er rein und gesättigt war. Die Gleichungen (43) und (44) geben sogleich über den Endzustand p, v, t Aufschluss, denn die Dampfwärme ist hier im Anfange und am Ende offenbar die gleiche; es findet also bei der Expansion in den luftleeren Raum eine Temperatursenkung statt, während ein vollkommenes Gas keine Temperaturänderung zeigt.

Hält z. B. ein Gefäss die Gewichtseinheit von reinem gesättigtem Wasserdampfe von $p_2 = 5$ Atmosphären, so ist das Volumen $v_2 = 0{,}3630$ und die Temperatur $t_2 = 152{,}22$ (vergl. Tab. I

und 2). Verbindet man diesen Raum mit einem anderen, luftleeren, dessen Inhalt viermal so gross ist, so wird das Endvolumen $v = 5v_2$, und daher ist der Enddruck nach Gl. (43) $p = 1$ Atmosphäre; dann folgt nach Gl. (44) die Temperatursenkung (benutze Tab. 2):

$$t_2 - t = 18{,}876^0$$

und die Temperatur am Ende $t = 133{,}34^0$. Dieser Dampf ist überhitzt, weil seine Temperatur mehr als 100^0 beträgt.

Die isothermische Curve. Dehnt sich die Dampfmasse bei constanter Temperatur aus, so ändert sich der Druck mit dem Volumen nach einer Curve, welche wir die isothermische nennen. Bei einem vollkommenen Gase ist diese Curve mit der isodynamischen identisch, d. h. sie ist auch eine gleichseitige Hyperbel; nicht so ist es bei Dämpfen. Hier ist in unserer Zustandsgleichung

$$pv = BT - Cp^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

T constant, und sonach ist auch sogleich die Beziehung zwischen p und v gegeben. Für den Anfangszustand ist

$$p_2 v_2 = BT - Cp_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

und durch Subtraction folgt daher:

$$pv = p_2 v_2 + C\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \tag{45}$$

während die Gleichung der isodynamischen Curve unter Nr. 43 angegeben ist. Lassen wir beide Curven vom gleichen Punkte ausgehen, so nähert sich die isodynamische Curve rascher der Abscissenaxe, als die isothermische Curve.

Die Wärmemenge Q, welche der Gewichtseinheit Dampf beim Uebergange vom Drucke p_2 zum Drucke p bei constanter Temperatur mitzutheilen ist, findet sich durch die zweite der Gleichungen (32), wenn man $dT = 0$ setzt und integrirt:

$$Q = c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \operatorname{logn.} \frac{p_2}{p} \tag{46}$$

Die Veränderung der Dampfwärme (innerer Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen) ist dagegen nach Gl. (36):

$$J - J_2 = \frac{c_p}{\varkappa} \frac{C}{B} \left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right) \tag{47}$$

Ist L die hierbei vom Dampfe verrichtete Arbeit, so folgt:

$$Q = J - J_2 + A L$$

während bei Gasen einfach $Q = A L$ ist; man sagt daher bei Letzteren, dass bei der Expansion unter constanter Temperatur die ganze zugeführte Wärme in äussere Arbeit verwandelt werde. Vorstehende Untersuchungen zeigen jetzt, dass es bei überhitzten Dämpfen nicht so ist; hier wird nur ein Theil der Wärmemenge Q als Arbeit gewonnen, der andere Theil verschwindet, oder wird zu innerer Arbeit verbraucht, dieser letztere Theil ist in Arbeit gemessen:

$$U = \frac{c_p}{A\varkappa} \frac{C}{B} \left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right)$$

und die äussere Arbeit ist:

$$L = c_p \frac{\varkappa - 1}{A\varkappa} T \operatorname{logn.} \frac{p_2}{p} - \frac{c_p}{A\varkappa} \frac{C}{B} \left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right)$$

Beide Grössen lassen sich also aus dem Anfangs- und Enddrucke berechnen.

Die vorstehenden Resultate stimmen vollständig mit den Vorstellungen überein, welche man sich vom Verhalten der Dämpfe gemacht hat; nur war man bis jetzt nicht im Stande, den Theil der zugeführten Wärme zu ermitteln, der zu innerer Arbeit verbraucht wird.

Expandirt z. B. gesättigter Dampf von 5 Atmosphären bei constanter Temperatur auf 1 Atmosphäre Druck, so findet sich die mitzutheilende Wärme Q, wenn man in Gl. (46)

$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{1}{4}$; $c_p = 0{,}4805$ und $T = 273 + 152{,}22$ substituirt:

$$Q = 82{,}204 \text{ Calorien.}$$

Dagegen nach Gl. (47) die Veränderung der Dampfwärme:

$$J - J_2 = 6{,}803$$

und endlich durch die Differenz beider Werthe die äussere Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$AL = 75{,}401$$

oder die Arbeit selbst:

$$L = 31970 \text{ Meterkilogr.}$$

Dampferzeugung bei constantem Drucke.

Wird die Gewichtseinheit gesättigter oder überhitzter Dampf bei constantem Drucke p aus Wasser von 0° Temperatur erzeugt, so ist nach Gl. (39) die erforderliche Wärmemenge:

$$\lambda = J_0 + c_p\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)$$

und die gewonnene Arbeit ist:

$$pv = BT - Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

Hat die erzeugte Dampfmenge das Gewicht M, so finden sich die erforderliche Wärmemenge und die gewonnene Arbeit, wenn beide Formeln mit M multiplizirt werden.

Die Wärmemenge Q ist:

$$Q = M\left[J_0 + c_p\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)\right] \tag{48}$$

und die Arbeit L ist:

$$L = M\left(BT - Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)$$

Ist die Temperatur des Dampfes bei gleichem Drucke p eine andere, z. B. T_1, und soll die gewonnene Arbeit (also das Gesammtvolumen des erzeugten Dampfes) so gross wie vorhin sein,

so gilt, wenn M_1 das Dampfgewicht ist, nach Vorstehendem die Beziehung:

$$M\left(T - \frac{C}{B}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) = M_1\left(T_1 - \frac{C}{B}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \qquad (49)$$

Wäre also in einem gewissen Falle Druck p und Temperatur T_1 gegeben, und wir wollten diesen Dampf durch anderen von der Temperatur T ersetzen, so berechnet sich für den letzteren Fall das erforderliche Dampfgewicht M nach Gl. (49) und dann die nöthige Wärmemenge Q nach Gl. (48).

Angenommen, wir hätten M_1 Kilogr. gesättigten Dampf von 5 Atmosphären Pressung, also von der Temperatur $t_1 = 152{,}22$, und wir wollten ein gleiches Volumen überhitzten Dampf von gleichem Drucke und der Temperatur $t = 200^0$ herstellen, so wäre nach Gl. (49) (mit Benutzung von Tab. 1 und 2) das Gewicht der nöthigen Wassermenge:

$$M = 0{,}8852 \cdot M_1$$

Für den gesättigten Dampf giebt Gl. (48) die erforderliche Wärmemenge:

$$Q_1 = 653{,}05 \cdot M_1$$

und für unseren überhitzten Dampf:

$$Q = 676{,}00 \cdot M$$

woraus folgt, wenn man die Beziehung von M und M_1 benutzt,

$$Q = 0{,}9163 \cdot Q_1$$

Es erfordert also die Herstellung des überhitzten Dampfes unter sonst gleichen Verhältnissen weniger Wärme, als die Herstellung des gleichen Volumens von gesättigtem Dampfe, und hierin ist der Vortheil derjenigen Dampfmaschinen begründet, welche mit überhitztem Dampfe arbeiten. Vorstehendes Beispiel gilt direkt als Vergleich zweier Dampfmaschinen von gleicher Grösse und gleichem Gange, von denen die eine mit gesättigtem Dampfe, die andere mit überhitztem Dampfe von 5 Atmosphären und 200° Temperatur arbeitet, vorausgesetzt, es finde keine Expansion statt. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, den Vergleich auch auf Expansionsmaschi-

nen auszudehnen; ich werde jedoch auf die Theorie der Dampfmaschinen mit Ueberhitzung bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen. Es sei hier nur bemerkt, dass bei Expansionsmaschinen der Vortheil der Ueberhitzung wieder etwas zurücktritt, weil die adiabatische Curve der überhitzten Dämpfe sich etwas rascher der Abscissenaxe nähert, als die der gesättigten Dämpfe; immerhin ist die Ueberhitzung vom theoretischen Standpunkte aus jederzeit zu empfehlen.

Erwärmung bei constantem Volumen.

Wird der Gewichtseinheit Dampf bei constantem Volumen Wärme mitgetheilt, so dient diese nur zur Veränderung der Dampfwärme, weil äussere Arbeit weder aufgewendet noch gewonnen wird. Wir haben sonach

$$Q = J - J_2$$

wenn der Anfangszustand durch die Grössen p_2, v_2, T_2 gegeben ist oder unter Benutzung der Gleichungen (34) und (36):

$$Q = \frac{A}{\varkappa - 1}(p - p_2)\, v_2 \tag{50}$$

oder

$$Q = \frac{c_p}{\varkappa}(T - T_2) - \frac{c_p}{\varkappa}\frac{C}{B}\left(p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \tag{51}$$

Die erste Gleichung führt uns auf die Beziehung zwischen Enddruck p und der mitzutheilenden Wärmemenge Q; die zweite Formel giebt uns die Endtemperatur T.

Die im Vorstehenden behandelten Probleme lassen sich leicht vermehren; mit Leichtigkeit lassen sich zunächst für überhitzte Dämpfe auch alle Aufgaben lösen, die ich in diesem Buche für gesättigte Dämpfe und Gase behandelt habe; von besonderem Interesse wären noch die Erscheinungen beim Ausflusse überhitzter Dämpfe aus Mündungen und die Veränderungen, welche mit dem Mischen von Dämpfen verbunden sind. Des beschränkten Raumes wegen, der mir hier zu Gebote steht, soll

nur noch folgendes Problem behandelt werden, welches von Wichtigkeit ist, weil Versuche vorliegen, die eine neue Bestätigung meiner Ansichten über das Verhalten der überhitzten Dämpfe geben.

Es befinde sich in einem Cylinder A überhitzter oder reiner gesättigter Wasserdampf vom Drucke p_2, der Temperatur T_2 und dem spezifischen Volumen v_2. Die Masse soll unter constantem Drucke p_2 durch ein Rohr nach einem zweiten Cylinder B hinübergeschoben werden, wo sie sich durch Zurückschieben eines Kolbens unter constantem **kleinerem** Drucke p_1 Raum machen soll. Es fragt sich nun, welche Temperatur T_1 und welches spezifische Volumen v_1 der Dampf in der Vorlage hat, vorausgesetzt, der Gleichgewichtszustand sei dort wieder eingetreten.

Verfolgen wir die Gewichtseinheit Dampf auf dem Wege von A nach B, so ist anfänglich die Dampfwärme J_2, am Ende J_1; in A nimmt der Dampf die Arbeit $p_2 v_2$ auf, und in B wird die Arbeit $p_1 v_1$ verbraucht. Die erstere Arbeit entspricht einer Vermehrung der Dampfwärme um $Ap_2 v_2$, die letztere einer Verminderung um $Ap_1 v_1$. Man hat daher, weil sonst Wärme weder zu- noch abgeleitet wird, die Beziehung:

$$J_2 + Ap_2 v_2 - Ap_1 v_1 = J_1$$

Benutzen wir hier Gl. (34), wonach ist:

$$J_2 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_2 v_2 \text{ und } J_1 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_1 v_1$$

so folgt nach leichter Reduction:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \tag{52}$$

woraus sich zunächst das spezifische Volumen v_1 in der Vorlage berechnet.

Benutzen wir in dieser Formel Gl. (24), so folgt ferner:

$$B T_1 - C p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = B T_2 - C p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

und hieraus, wenn wir die Temperatur nach **Celsius** einführen, die **Temperatursenkung** bei diesem Uebergange

$$t_2 - t_1 = \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) \tag{53}$$

und dadurch ist auch die Temperatur t_1 in der Vorlage bestimmt.

Ist z. B. $p_2 = 13$ Atmosphären und $p_1 = 1$ Atmosphäre, so ist die Temperatursenkung nach Tab. 2 und Gl. (53):

$$t_2 - t_1 = 72{,}357 - 38{,}251 = 34{,}25^0$$

Ist der Dampf im Raume A gesättigt, so ist (Tab. 1) $t_2 = 192{,}08$ und daher die Temperatur in der Vorlage:

$$t_1 = 157{,}83^0$$

Ist dagegen derselbe Dampf schon Anfangs überhitzt, und beträgt die Temperatur $t_2 = 200$, 205 oder 210⁰, so findet sich, weil die Temperatursenkung bei gleichen Pressungen p_2 und p_1 dieselbe bleibt, beziehungsweise:

$$t_1 = 165{,}75^0,\ 170{,}75^0 \text{ und } 175{,}75^0$$

Hirn findet*) durch Versuche für den ersten Fall $t_1 = 155{,}58^0$ und für die letzten drei Fälle $t_1 = 166^0$; $171{,}5^0$; 177^0.

Die Uebereinstimmung mit dem Ergebnisse meiner Rechnungen ist also ganz befriedigend.

Bei kleinerer Anfangspressung p_2 stellen sich etwas grössere Differenzen heraus; so ist z. B., wenn in allen Fällen die Endpressung $p_1 = 1$ Atmosphäre ist, für:

		Rechnung:	Hirn's Versuch:
$p_2 = 5$ Atmosph.	$t_2 = 152{,}22^0$	$t_1 = 133{,}34^0$	$137{,}72^0$
5 -	$= 246^0$	$227{,}12^0$	$238{,}5^0$
3 -	$= 133{,}91^0$	$121{,}87^0$	$128{,}4^0$

Ich schreibe die Abweichungen grösstentheils der Unsicherheit und Schwierigkeit der Versuche zu.

Mit vorliegendem Falle hat man es nämlich zu thun, wenn der Dampf aus einem Dampfkessel in die freie Atmosphäre strömt. Die vorhin mit t_1 bezeichnete Temperatur ist dann die Temperatur des Dampfes, nachdem er sich ausserhalb ausgebreitet hat, zur Ruhe übergegangen, und sein Druck auf eine Atmosphäre gesunken ist. Natürlich ist der Versuch so ohne Weiteres nicht ausführbar, weil die kalte atmosphärische Luft

*) Théorie mécanique de la chaleur. Sec. édition. S. 179 bis 180.

auf den Dampfstrahl erkältend einwirkt. Um das zu umgehen, liess Hirn den Dampf in einen Holzkasten strömen, der von einem zweiten Kasten umgeben war; dieser zweite Kasten befand sich wieder innerhalb eines dritten. Der Dampf strömte, nachdem er sich im inneren ausgebreitet hatte, durch eine weite Oeffnung in den zweiten, von da in den dritten Kasten und von dort erst ins Freie. Die Oeffnungen waren so weit, dass der Druck im inneren Kasten, in welchem die Temperatur t_1 beobachtet wurde, kaum vom äusseren Atmosphärendrucke verschieden war. Es wäre sehr zu wünschen, wenn dieser schöne und sinnreiche Versuch von Hirn in ausgedehnterem Maasse wiederholt würde.

Da für permanente Gase in Gl. (53) $C=0$ zu setzen ist, so findet sich für diese die Temperatursenkung Null, ein Resultat, auf das ich schon auf S. 167 hingewiesen habe, welches aber nur für ein vollkommenes Gas Gültigkeit haben kann. Die wirklichen Gase werden Abweichungen in ähnlicher Art, wie Dämpfe zeigen, wie es übrigens auch schon durch die Versuche von Joule für den zuletzt behandelten Fall und von Regnault für alle Fälle nachgewiesen worden ist.

Tabellen.

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquot. in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	4.600	0.3289	0.071502
5	278	6.534	0.4503	0.068915
10	283	9.165	0.6088	0.066429
15	288	12.699	0.8132	0.064041
20	293	17.391	1.0738	0.061746
25	298	23.550	1.4022	0.059542
30	303	31.548	1.8117	0.057427
35	308	41.827	2.3171	0.055397
40	313	54.906	2.9347	0.053449
45	318	71.390	3.6825	0.051582
50	323	91.980	4.5800	0.049794
55	328	117.475	5.6484	0.048081
60	333	148.786	6.9100	0.046443
65	338	186.938	8.3891	0.044876
70	343	233.082	10.111	0.043380
75	348	288.500	12.104	0.041953
80	353	354.616	14.395	0.040594
85	358	433.002	17.017	0.039300
90	363	525.392	20.002	0.038072
95	368	633.692	23.388	0.036907
100	373	760.000	27.189	0.035775
105	378	906.410	31.454	0.034701
110	383	1075.370	36.212	0.033674
115	388	1269.410	41.499	0.032691
120	393	1491.280	47.348	0.031750
125	398	1743.880	53.795	0.030848
130	403	2030.280	60.873	0.029982
135	408	2353.730	68.617	0.029152
140	413	2717.630	77.060	0.028355
145	418	3125.550	86.234	0.027590
150	423	3581.230	96.171	0.026854
155	428	4088.560	106.901	0.026146
160	433	4651.620	118.455	0.025465
165	438	5274.540	130.858	0.024809
170	443	5961.660	144.138	0.024177
175	448	6717.430	158.319	0.023568
180	453	7546.390	173.423	0.022981
185	458	8453.230	189.470	0.022414
190	463	9442.700	206.478	0.021866
195	468	10519.630	224.462	0.021337
200	473	11688.960	243.438	0.020826

…on Wasser. Tab. 1 a.

6	7	8	9	1
$T \cdot \frac{dp}{p\,dt}$	$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	$\frac{Apu}{r} = \varphi$	Temperatur Celsius t
19.520	2.879	2.732	0.051229	0
19.158	4.014	3.805	0.052196	5
18.799	5.525	5.231	0.053193	10
18.444	7.511	7.104	0.054219	15
18.091	10.090	9.532	0.055274	20
17.743	13.400	12.645	0.056358	25
17.400	17.604	16.592	0.057470	30
17.062	22.886	21.545	0.058609	35
16.730	29.457	27.696	0.059774	40
16.403	37.554	35.264	0.060964	45
16.083	47.442	44.492	0.062176	50
15.771	59.413	55.646	0.063409	55
15.465	73.792	69.020	0.064661	60
15.168	90.933	84.938	0.065927	65
14.879	111.220	103.746	0.067206	70
14.600	135.077	125.825	0.068494	75
14.329	162.959	151.587	0.069786	80
14.069	195.369	181.482	0.071076	85
13.820	232.852	216.003	0.072359	90
13.582	276.009	255.687	0.073628	95
13.344	325.229	300.856	0.074940	100
13.117	381.286	352.218	0.076236	105
12.897	444.778	410.292	0.077536	110
12.684	516.362	475.653	0.078838	115
12.478	596.736	548.902	0.080143	120
12.277	686.610	630.685	0.081450	125
12.083	786.716	721.607	0.082761	130
11.894	897.803	822.321	0.084075	135
11.711	1020.627	933.475	0.085391	140
11.533	1155.960	1055.726	0.086709	145
11.359	1304.583	1189.736	0.088034	150
11.191	1467.283	1336.166	0.089361	155
11.026	1644.860	1495.686	0.090691	160
10.866	1838.076	1668.926	0.092026	165
10.711	2047.724	1856.538	0.093365	170
10.559	2274.570	2059.147	0.094709	175
10.410	2519.373	2277.366	0.096059	180
10.265	2782.875	2511.787	0.097413	185
10.124	3065.794	2762.974	0.098774	190
9.986	3368.820	3031.464	0.100140	195
9.851	3692.650	3317.795	0.101514	200

Gesättigte D…

1	2		3		4
Temperatur Celsius t	Gesammt-Wärme λ (Regnault)	Differenz	Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	Verdampfungswärme $r=\lambda-q$
0	606.500		0.000		606.500
5	608.025	1.525	5.000	5.000	603.025
10	609.550	»	10.002	5.002	599.548
15	611.075	»	15.005	5.003	596.070
20	612.600	»	20.010	5.005	592.590
25	614.125	»	25.017	5.007	589.108
30	615.650	»	30.026	5.009	585.624
35	617.175	»	35.037	5.011	582.138
40	618.700	»	40.051	5.014	578.649
45	620.225	»	45.068	5.017	575.157
50	621.750	»	50.087	5.019	571.663
55	623.275	»	55.110	5.023	568.165
60	624.800	»	60.137	5.027	564.663
65	626.325	»	65.167	5.030	561.158
70	627.850	»	70.201	5.034	557.649
75	629.375	»	75.239	5.038	554.136
80	630.900	»	80.282	5.043	550.618
85	632.425	»	85.329	5.047	547.096
90	633.950	»	90.381	5.052	543.569
95	635.475	»	95.436	5.057	540.037
100	637.000	»	100.500	5.062	536.500
105	638.525	»	105.568	5.068	532.957
110	640.050	»	110.641	5.073	529.409
115	641.575	»	115.721	5.080	525.854
120	643.100	»	120.806	5.085	522.294
125	644.625	»	125.898	5.092	518.727
130	646.150	»	130.997	5.099	515.153
135	647.675	»	136.103	5.106	511.572
140	649.200	»	141.215	5.112	507.985
145	650.725	»	146.334	5.119	504.391
150	652.250	»	151.462	5.128	500.788
155	653.775	»	156.598	5.136	497.177
160	655.300	»	161.741	5.143	493.559
165	656.825	»	166.892	5.151	489.933
170	658.350	»	172.052	5.160	486.298
175	659.875	»	177.220	5.168	482.655
180	661.400	»	182.398	5.178	479.002
185	662.925	»	187.584	5.186	475.341
190	664.450	»	192.780	5.196	471.670
195	665.975	»	197.985	5.205	467.990
200	667.500	»	203.200	5.215	464.300

…on Wasser. Tab. 1 b.

5 Aeussere latente Wärme $Apu = \varphi r$	Differenz	6 Dampfwärme $J = \lambda - Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
31.071		575.43		575.43		210.66	0
31.475	0.404	576.55	1.12	571.55	3.88	150.23	5
31.892	0.417	577.66	1.11	567.66	3.87	108.51	10
32.315	0.426	578.76	1.10	563.75	3.91	79.346	15
32.755	0.437	579.84	1.08	559.83	3.92	58.720	20
33.201	0.446	580.92	1.08	555.91	3.92	43.963	25
33.656	0.455	581.99	1.07	551.97	3.94	33.266	30
34.119	0.463	583.06	1.07	548.02	3.95	25.436	35
34.588	0.469	584.11	1.05	544.06	3.96	19.644	40
35.064	0.476	585.16	1.05	540.09	3.97	15.315	45
35.544	0.480	586.21	1.05	536.12	3.97	12.049	50
36.027	0.483	587.25	1.04	532.14	3.98	9.5613	55
36.512	0.485	588.29	1.04	528.15	3.99	7.6531	60
36.996	0.484	589.33	1.04	524.16	3.99	6.1711	65
37.478	0.482	590.37	1.04	520.17	3.99	5.0139	70
37.955	0.477	591.42	1.05	516.18	3.99	4.1024	75
38.425	0.470	592.47	1.05	512.19	3.99	3.3789	80
38.885	0.460	593.54	1.07	508.21	3.98	2.8003	85
39.332	0.447	594.62	1.08	504.24	3.97	2.3344	90
39.762	0.430	595.71	1.09	500.27	3.97	1.9566	95
40.205	0.443	596.79	1.08	496.29	3.98	1.6496	100
40.631	0.426	597.89	1.10	492.33	3.96	1.3978	105
41.048	0.417	599.00	1.11	488.36	3.97	1.1903	110
41.457	0.409	600.12	1.12	484.40	3.96	1.0184	115
41.858	0.401	601.24	1.12	480.44	3.96	0.8752	120
42.250	0.392	602.37	1.13	476.48	3.96	0.7555	125
42.634	0.384	603.52	1.15	472.52	3.96	0.6548	130
43.010	0.376	604.66	1.14	468.56	3.96	0.5698	135
43.377	0.367	605.82	1.16	464.61	3.95	0.4977	140
43.735	0.358	606.99	1.17	460.66	3.95	0.4363	145
44.086	0.351	608.16	1.17	456.70	3.96	0.3839	150
44.428	0.342	609.35	1.19	452.75	3.95	0.3388	155
44.761	0.333	610.54	1.21	448.80	3.95	0.3001	160
45.086	0.325	611.74	1.20	444.85	3.95	0.2665	165
45.403	0.317	612.95	1.21	440.89	3.96	0.2375	170
45.711	0.308	614.16	1.21	436.94	3.95	0.2122	175
46.012	0.299	615.39	1.23	432.99	3.95	0.1901	180
46.304	0.292	616.62	1.23	429.04	3.95	0.1708	185
46.589	0.285	617.86	1.24	425.08	3.96	0.1538	190
46.864	0.275	619.11	1.25	421.13	3.95	0.1389	195
47.133	0.269	620.37	1.26	417.17	3.96	0.1257	200

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	184.39	8.441	0.045778
10	283	286.83	12.224	0.042619
20	293	432.78	17.175	0.039685
30	303	634.80	23.464	0.036963
40	313	907.04	31.242	0.034444
50	323	1264.83	40.622	0.032117
60	333	1725.01	51.709	0.029976
70	343	2304.90	64.576	0.028017
80	353	3022.79	79.327	0.026243
90	363	3898.26	96.127	0.024659
100	373	4953.30	115.313	0.023280
110	383	6214.63	137.523	0.022129
120	393	7719.20	163.979	0.021243

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q = \int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	4 Verdampfungswärme $r = \lambda - q$	Differenz
0	94.00		0.00		94.00	
10	98.44	4.44	5.32	5.32	93.12	0.88
20	102.78	4.34	10.70	5.38	92.08	1.04
30	107.00	4.22	16.14	5.44	90.86	1.22
40	111.11	4.11	21.63	5.49	89.48	1.38
50	115.11	4.00	27.19	5.56	87.92	1.56
60	119.00	3.89	32.80	5.61	86.20	1.72
70	122.78	3.78	38.48	5.68	84.30	1.90
80	126.44	3.66	44.21	5.73	82.23	2.07
90	130.00	3.56	50.00	5.79	80.00	2.23
100	133.44	3.44	55.86	5.86	77.58	2.42
110	136.78	3.34	61.77	5.91	75.01	2.57
120	140.00	3.22	67.74	5.97	72.26	2.75

on Aether. Tab. 2 a.

6 $T.\frac{dp}{p\,dt}$	7 $\frac{r}{u}=AT\frac{dp}{dt}$	8 $\frac{\varrho}{u}=\frac{r}{u}-Ap$	9 $\frac{Apu}{r}=\varphi$	1 Temperatur Celsius t
12.497	73.90	67.99	0.08002	0
12.061	110.94	101.74	0.08291	10
11.628	161.38	147.50	0.08600	20
11.200	228.00	207.64	0.08929	30
10.781	313.60	284.51	0.09275	40
10.374	420.78	380.22	0.09640	50
9.982	552.20	496.88	0.10018	60
9.610	710.32	636.40	0.10406	70
9.264	898.02	801.08	0.10794	80
8.951	1119.01	994.00	0.11172	90
8.683	1379.34	1220.49	0.11516	100
8.475	1689.13	1489.83	0.11799	110
8.348	2066.66	1819.11	0.11978	120

on Aether. Tab. 2 b.

5 Aeussere nte Wärme $pu=\varphi r$	Differenz	6 Dampfwärme $J=\lambda-Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho=r-Apu$	Differenz	8 Werthe von $u=\frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
7.521		86.48		86.48		1.2720	0
7.721	0.200	90.72	4.24	85.40	1.08	0.8393	10
7.919	0.198	94.86	4.14	84.16	1.24	0.5706	20
8.113	0.194	98.89	4.01	82.75	1.41	0.3985	30
8.300	0.187	102.81	3.92	81.18	1.57	0.2853	40
8.475	0.175	106.64	3.83	79.45	1.73	0.2089	50
8.635	0.160	110.37	3.73	77.57	1.88	0.1561	60
8.772	0.137	114.01	3.64	75.53	2.04	0.1186	70
8.876	0.104	117.56	3.55	73.35	2.18	0.0916	80
8.937	0.061	121.06	3.50	71.06	2.29	0.0715	90
8.934	−0.003	124.51	3.45	68.65	2.41	0.0562	100
8.850	−0.084	127.93	3.42	66.16	2.49	0.0444	110
8.655	−0.195	131.35	3.42	63.61	2.55	0.0350	120

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquot. in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	12.70	0.8419	0.066295
10	283	24.23	1.5185	0.062672
20	293	44.46	2.6133	0.058779
30	303	78.52	4.3193	0.055009
40	313	133.69	6.8784	0.051450
50	323	219.90	10.580	0.048114
60	333	350.21	15.757	0.044992
70	343	541.15	22.767	0.042072
80	353	812.91	31.981	0.039342
90	363	1189.30	43.752	0.036788
100	373	1697.55	58.397	0.034401
110	383	2367.64	76.162	0.032168
120	393	3231.73	97.211	0.030080
130	403	4323.00	121.597	0.028128
140	413	5674.59	149.255	0.026302
150	423	7318.40	179.998	0.024595

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	4 Verdampfungswärme $r=\lambda-q$	Differenz
0	236.50		0.00		236.50	
10	244.40	7.90	5.59	5.59	238.81	–2.31
20	252.00	7.60	11.42	5.83	240.58	–1.77
30	258.00	6.00	17.49	6.07	240.51	+0.07
40	262.00	4.00	23.71	6.22	238.29	2.22
50	264.00	2.00	30.21	6.50	233.79	4.50
60	265.00	1.00	37.37	7.16	227.63	6.16
70	265.20	0.20	44.58	7.21	220.62	7.01
80	265.20	0.00	52.11	7.53	213.09	7.53
90	266.00	0.80	59.97	7.86	206.03	7.06
100	267.30	1.30	68.18	8.21	199.12	6.91
110	269.60	2.30	76.74	8.56	192.86	6.26
120	272.50	2.90	85.67	8.93	186.83	6.03
130	276.00	3.50	94.98	9.31	181.02	5.81
140	280.50	4.50	104.70	9.72	175.80	5.22
150	285.30	4.80	114.82	10.12	170.48	5.32

…ohol. Tab. 3 a.

7 $\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$	8 $\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	9 $\frac{Apu}{r} = \varphi$	1 Temperatur Celsius t
7.37	6.96	0.05525	0
13.78	13.00	0.05638	10
24.55	23.13	0.05806	20
41.97	39.35	0.05999	30
69.04	64.75	0.06210	40
109.59	102.54	0.06435	50
168.26	157.03	0.06674	60
250.43	233.08	0.06930	70
362.04	335.97	0.07201	80
509.32	471.18	0.07488	90
698.53	644.09	0.07793	100
935.46	859.53	0.08117	110
1225.17	1121.53	0.08459	120
1571.53	1432.56	0.08822	130
1976.82	1794.84	0.09206	140
2441.72	2207.02	0.09612	150

…ohol. Tab. 3 b.

Differenz	6 Dampfwärme $J = \lambda - Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
	223.43		223.43		32.0844	0
0.398	230.94	+7.51	225.35	−1.95	17.3281	10
0.504	238.03	7.09	226.61	−1.26	9.7976	20
0.460	243.57	5.54	226.08	+0.53	5.7303	30
0.368	247.20	3.63	223.49	2.59	3.4513	40
0.247	248.96	1.76	218.75	4.74	2.1332	50
0.149	249.81	0.85	212.44	6.31	1.3528	60
0.094	249.91	+0.10	205.33	7.11	0.8809	70
0.057	249.86	−0.05	197.75	7.58	0.5886	80
0.084	250.57	+0.71	190.60	7.15	0.4045	90
0.090	251.78	1.21	183.60	7.00	0.2850	100
0.136	253.95	2.17	177.21	6.39	0.2062	110
0.149	256.70	2.75	171.03	6.18	0.1525	120
0.166	260.03	3.33	165.05	5.98	0.1152	130
0.215	264.32	4.29	159.62	5.43	0.0880	140
0.202	268.91	4.59	154.09	5.53	0.0698	150

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	63.33	3.769	0.059516
10	283	110.32	5.726	0.051910
20	293	180.08	8.349	0.046364
30	303	280.05	11.797	0.042125
40	313	419.35	16.242	0.038733
50	323	608.81	21.858	0.035903
60	333	860.96	28.808	0.033460
70	343	1189.90	37.237	0.031294
80	353	1611.05	47.266	0.029338
90	363	2140.82	58.971	0.027546
100	373	2796.20	72.391	0.025889
110	383	3594.33	87.515	0.024348
120	393	4551.95	104.271	0.022907
130	403	5684.90	122.555	0.021558
140	413	7007.64	142.199	0.020292

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	4 Verdampfungswärme $r=\lambda-q$	Differenz
0	140.50		0.00		140.50	
10	144.11	3.61	5.10	5.10	139.01	1.49
20	147.62	3.51	10.29	5.19	137.33	1.68
30	151.03	3.41	15.55	5.26	135.48	1.85
40	154.33	3.30	20.89	5.34	133.44	2.04
50	157.53	3.20	26.31	5.42	131.22	2.22
60	160.63	3.10	31.81	5.50	128.82	2.40
70	163.62	2.99	37.39	5.58	126.23	2.59
80	166.51	2.89	43.05	5.66	123.46	2.77
90	169.30	2.79	48.79	5.74	120.51	2.95
100	171.98	2.68	54.61	5.82	117.37	3.14
110	174.56	2.58	60.50	5.89	114.06	3.31
120	177.04	2.48	66.48	5.98	110.56	3.50
130	179.42	2.38	72.54	6.06	106.88	3.68
140	181.69	2.27	78.67	6.13	103.02	3.86

n. Tab. 4 a.

7	8	9	1
$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	$\frac{Apu}{r} = \varphi$	Temperatur Celsius t
33.00	30.97	0.06155	0
51.97	48.43	0.06807	10
78.45	72.68	0.07378	20
114.63	105.65	0.07834	30
163.04	149.59	0.08248	40
226.41	206.89	0.08623	50
307.64	280.03	0.08975	60
409.60	371.44	0.09316	70
535.06	483.40	0.09656	80
686.49	617.84	0.10001	90
865.92	776.25	0.10355	100
1074.90	959.64	0.10723	110
1314.15	1168.18	0.11108	120
1583.89	1401.58	0.11510	130
1883.37	1658.64	0.11932	140

n. Tab. 4 b.

Differenz	6 Dampfwärme $J = \lambda - Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
	131.85		131.85		4.2576	0
0.815	134.65	2.80	129.55	2.30	2.6748	10
0.670	137.49	2.84	127.20	2.35	1.7505	20
0.481	140.42	2.93	124.87	2.33	1.1818	30
0.393	143.32	2.90	122.43	2.44	0.8184	40
0.309	146.22	2.90	119.91	2.52	0.5796	50
0.246	149.07	2.85	117.26	2.65	0.4187	60
0.198	151.86	2.79	114.47	2.79	0.3082	70
0.162	154.59	2.73	111.54	2.93	0.2307	80
0.131	157.25	2.66	108.46	3.08	0.1755	90
0.102	159.83	2.58	105.22	3.24	0.1355	100
0.077	162.33	2.50	101.83	3.39	0.1061	110
0.050	164.76	2.43	98.28	3.55	0.0841	120
0.021	167.12	2.36	94.58	3.70	0.0675	130
0.000	169.39	2.27	90.62	3.96	0.0547	140

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	59.72	3.235	0.054178
10	283	100.47	4.953	0.049297
20	293	160.47	7.246	0.045156
30	303	247.51	10.295	0.041593
40	313	369.26	14.211	0.038485
50	323	535.05	19.123	0.035741
60	333	755.44	25.150	0.033292
70	343	1042.11	32.393	0.031084
80	353	1407.64	40.933	0.029079
90	363	1865.22	50.816	0.027244
100	373	2428.54	62.061	0.025555
110	383	3110.99	74.645	0.023994
120	393	3925.74	88.510	0.022546
130	403	4885.10	103.549	0.021197
140	413	6000.16	119.625	0.019937
150	423	7280.62	136.584	0.018760
160	433	8734.20	154.218	0.017658

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	4 Verdampfungswärme $r=\lambda-q$	Differenz
0	67.000		0.00		67.00	
10	68.375	0.375	2.33	2.33	66.04	0.96
20	69.75	»	4.67	2.34	65.08	0.96
30	71.12	»	7.02	2.35	64.10	0.98
40	72.50	»	9.37	2.35	63.13	0.97
50	73.87	»	11.74	2.37	62.13	1.00
60	75.25	»	14.12	2.38	61.13	1.00
70	76.62	»	16.51	2.39	60.11	1.02
80	78.00	»	18.91	2.40	59.09	1.02
90	79.37	»	21.32	2.41	58.05	1.04
100	80.75	»	23.74	2.42	57.01	1.04
110	82.12	»	26.17	2.43	55.95	1.06
120	83.50	»	28.61	2.44	54.89	1.06
130	84.87	»	31.06	2.45	53.81	1.08
140	86.25	»	33.52	2.46	52.73	1.08
150	87.62	»	35.99	2.47	51.63	1.10
160	89.00	»	38.47	2.48	50.53	1.10

loroform. Tab. 5 a.

	7	8	9	1
ɔ / 't	$\frac{r}{u} = A\,T \frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	$\frac{Apu}{r} = \varphi$	Temperatur Celsius t
	28.32	26.41	0.06761	0
	44.95	41.73	0.07168	10
	68.08	62.93	0.07558	20
	100.04	92.10	0.07935	30
	142.64	130.80	0.08302	40
	198.08	180.92	0.08662	50
	268.58	244.35	0.09020	60
	356.31	322.89	0.09379	70
	463.38	418.24	0.09742	80
	591.55	531.73	0.10112	90
	742.36	664.48	0.10491	100
	916.83	817.06	0.10882	110
	1115.51	989.62	0.11286	120
	1338.26	1181.60	0.11706	130
	1584.38	1391.96	0.12145	140
	1852.80	1619.32	0.12602	150
	2141.61	1861.51	0.13079	160

loroform. Tab. 5 b.

; me pr	Differenz	6 Dampfwärme $J = \lambda - Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
		62.47		62.47		2.3658	0
	0.204	63.64	1.17	61.31	1.16	1.4692	10
	0.185	64.83	1.19	60.16	1.15	0.9559	20
	0.167	66.03	1.20	59.01	1.15	0.6407	30
	0.155	67.26	1.23	57.89	1.12	0.4426	40
	0.141	68.49	1.23	56.75	1.12	0.3137	50
	0.132	69.74	1.25	55.62	1.13	0.2276	60
	0.124	70.98	1.24	54.47	1.15	0.1687	70
	0.118	72.24	1.26	53.33	1.14	0.1275	80
	0.114	73.50	1.26	52.18	1.15	0.0981	90
	0.111	74.77	1.27	51.03	1.15	0.0768	100
	0.107	76.03	1.26	49.86	1.17	0.0610	110
	0.107	77.31	1.28	48.70	1.16	0.0492	120
	0.104	78.57	1.26	47.51	1.19	0.0402	130
	0.105	79.85	1.28	46.33	1.18	0.0333	140
	0.102	81.11	1.26	45.12	1.21	0.0279	150
	0.103	82.39	1.28	43.92	1.20	0.0236	160

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	32.95	1.82	0.055338
10	283	55.97	2.84	0.050708
20	293	90.99	4.24	0.046574
30	303	142.27	6.10	0.042882
40	313	214.81	8.50	0.039584
50	323	314.38	11.52	0.036637
60	333	447.43	15.21	0.034002
70	343	621.15	19.66	0.031647
80	353	843.29	24.91	0.029539
90	363	1122.26	31.03	0.027653
100	373	1467.09	38.09	0.025964
110	383	1887.44	46.15	0.024451
120	393	2393.67	55.28	0.023094
130	403	2996.88	65.56	0.021876
140	413	3709.04	77.09	[illegible]
150	423	4543.13	[illegible]	[illegible]
160	433	5513.14	[illegible]	[illegible]

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	52.00		0.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	53.44	1.44	1.99	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	54.86	1.42	3.99	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	56.23	1.37	6.02	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	57.58	1.35	8.06	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50	58.88	1.30	10.12	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	60.16	1.28	12.20	[illegible]	[illegible]	0.80
70	61.40	1.24	14.30	2.10	47.10	0.85
80	62.60	1.20	16.42	2.12	46.18	0.92
90	63.77	1.17	18.55	2.13	45.22	0.96
100	64.90	1.13	20.70	2.15	44.20	1.02
110	66.01	1.11	22.87	2.17	43.14	1.06
120	67.07	1.06	25.06	2.19	42.01	1.13
130	68.10	1.03	27.27	2.21	40.83	1.18
140	69.10	1.00	29.49	2.22	39.61	1.22
150	70.07	0.97	31.73	2.24	38.34	1.27
160	71.00	0.93	34.00	2.27	37.06	1.34

kohlenstoff. Tab. 6 a.

7	8	9	1
$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	$\frac{Apu}{r} = \varphi$	Temperatur Celsius t
15.96	14.90	0.06619	0
25.76	23.97	0.06968	10
39.82	36.90	0.07328	20
59.28	54.72	0.07696	30
85.35	78.46	0.08071	40
119.30	109.22	0.08450	50
162.46	148.11	0.08832	60
216.23	196.31	0.09212	70
281.99	254.95	0.09590	80
361.27	325.28	0.09962	90
455.64	408.59	0.10325	100
566.83	506.30	0.10678	110
696.70	619.94	0.11018	120
847.28	751.17	0.11343	130
1021.00	902.06	0.11650	140
[illegible]	1074.28	0.11939	150
[illegible]	1271.39	0.12208	160

[illegible]ϱ.

		[illegible]fe-[illegible]nz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
[illegible]	[illegible]	[illegible]	48.56		3.2581	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]30	47.87	0.69	1.9969	10
[illegible]	[illegible]	[illegible]27	47.14	0.73	1.2775	20
[illegible]	[illegible]	[illegible]24	46.35	0.79	0.8470	30
[illegible]	[illegible]	[illegible]21	45.52	0.83	0.5802	40
[illegible]	[illegible]	[illegible]18	44.64	0.88	0.4087	50
[illegible]	[illegible]	[illegible]16	43.72	0.92	0.2952	60
0.103	57.06	1.14	42.76	0.96	0.2178	70
0.090	58.17	1.11	41.75	1.01	0.1638	80
0.076	59.27	1.10	40.72	1.03	0.1252	90
0.059	60.34	1.07	39.64	1.08	0.0970	100
0.042	61.40	1.06	38.53	1.11	0.0761	110
0.023	62.44	1.04	37.38	1.15	0.0603	120
0.002	63.47	1.03	36.20	1.18	0.0482	130
-0.017	64.49	1.02	35.00	1.20	0.0388	140
-0.037	65.49	1.00	33.76	1.24	0.0314	150
-0.060	66.48	0.99	32.48	1.28	0.0255	160

Gesättigte Dämpf

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
0	273	127.91	5.846	0.045704
10	283	198.46	8.380	0.042226
20	293	298.03	11.664	0.039137
30	303	434.62	15.813	0.036383
40	313	617.53	20.941	0.033911
50	323	857.07	27.157	0.031662
60	333	1164.51	34.540	0.029661
70	343	1552.09	43.181	0.027821
80	353	2032.53	53.124	0.026137
90	363	2619.06	64.406	0.024591
100	373	3325.15	77.030	0.023166
110	383	4164.06	90.972	0.021847
120	393	5148.79	106.173	0.020621
130	403	6291.60	122.573	0.019482
140	413	7603.96	140.057	0.018419
150	423	9095.94	158.497	0.017425

Gesättigte Dämpf

1 Temperatur Celsius t	2 Gesammtwärme λ (Regnault)	Differenz	3 Flüssigkeitswärme $q = \int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Differenz	4 Verdampfungswärme $r = \lambda - q$	Differenz
0	90.00		0.00		90.00	
10	91.42	1.42	2.36	2.36	89.06	0.94
20	92.76	1.34	4.74	2.38	88.02	1.04
30	94.01	1.25	7.13	2.39	86.88	1.14
40	95.18	1.17	9.54	2.41	85.64	1.24
50	96.27	1.09	11.96	2.42	84.31	1.33
60	97.28	1.01	14.41	2.45	82.87	1.44
70	98.20	0.92	16.86	2.45	81.34	1.53
80	99.04	0.84	19.34	2.48	79.70	1.64
90	99.80	0.76	21.83	2.49	77.97	1.73
100	100.48	0.68	24.34	2.51	76.14	1.83
110	101.07	0.59	26.86	2.52	74.21	1.93
120	101.58	0.51	29.40	2.54	72.18	2.03
130	102.01	0.43	31.96	2.56	70.05	2.13
140	102.36	0.35	34.53	2.57	67.83	2.22
150	102.62	0.26	37.12	2.59	65.50	2.33

on Schwefelkohlenstoff. Tab. 7 a.

6 $T \cdot \frac{dp}{p\,dt}$	7 $\frac{r}{u} = A\,T\,\frac{dp}{dt}$	8 $\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$	9 $\frac{Apu}{r} = \varphi$	1 Temperatur Celsius t
12.477	51.18	47.08	0.08015	0
11.950	76.05	69.69	0.08368	10
11.467	109.60	100.04	0.08721	20
11.024	153.65	139.71	0.09071	30
10.614	210.20	190.40	0.09421	40
10.233	281.30	253.82	0.09772	50
9.877	368.85	331.51	0.10124	60
9.543	474.98	425.21	0.10478	70
9.226	601.38	536.20	0.10838	80
8.926	749.76	665.77	0.11202	90
8.641	921.42	814.79	0.11573	100
8.367	1117.36	983.82	0.11951	110
8.104	1338.12	1173.00	0.12339	120
7.851	1584.12	1382.35	0.12737	130
7.607	1855.00	1611.15	0.13146	140
7.371	2150.06	1858.36	0.13567	150

von Schwefelkohlenstoff. Tab. 7 b.

5 Aeussere latente Wärme $Apu = \varphi r$	Differenz	6 Dampfwärme $J = \lambda - Apu$	Differenz	7 Innere latente Wärme $\varrho = r - Apu$	Differenz	8 Werthe von $u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$	1 Temperatur Celsius t
7.213		82.79		82.79		1.7585	0
7.452	0.239	83.97	1.18	81.61	1.18	1.1711	10
7.676	0.224	85.08	1.11	80.34	1.27	0.8031	20
7.881	0.205	86.13	1.05	79.00	1.34	0.5654	30
8.068	0.187	87.11	0.98	77.57	1.43	0.4074	40
8.239	0.171	88.03	0.92	76.07	1.50	0.2997	50
8.390	0.151	88.89	0.86	74.48	1.59	0.2247	60
8.523	0.133	89.68	0.79	72.82	1.66	0.1712	70
8.638	0.115	90.40	0.72	71.06	1.76	0.1325	80
8.734	0.096	91.07	0.67	69.24	1.82	0.1040	90
8.812	0.078	91.67	0.60	67.33	1.91	0.0826	100
8.869	0.057	92.20	0.53	65.34	1.99	0.0664	110
8.906	0.037	92.67	0.47	63.27	2.07	0.0539	120
8.922	0.016	93.09	0.42	61.13	2.14	0.0412	130
8.917	−0.005	93.44	0.35	58.91	2.22	0.0366	140
8.886	−0.031	93.73	0.29	56.61	2.30	0.0305	150

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault)	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
140	413	3.0592	0.1030	0.033684
160	433	5.9002	0.1888	0.031999
180	453	11.00	0.3336	0.030328
200	473	19.90	0.5712	0.028703
220	493	34.70	0.9418	0.027142
240	513	58.82	1.5088	0.025652
260	533	96.73	2.3443	0.024236
280	553	155.17	3.5525	0.022894
300	573	242.15	5.2362	0.021624
320	593	368.73	7.5302	0.020422
340	613	548.35	10.576	0.019287
360	633	797.74	14.530	0.018214
380	653	1139.65	19.602	0.017200
400	673	1587.96	25.795	0.016214
420	693	2177.53	33.405	0.015341
440	713	2933.99	42.499	0.014485
460	733	3888.11	53.186	0.013679
480	753	5072.43	65.520	0.012917
500	773	6520.25	79.531	0.012198
520	793	8264.96	95.201	0.011519

Gesättigte Dämpfe

1 Temperatur Celsius t	2 Absolute Temperatur T	3 Dampfspannung in Millimeter Quecksilber p (Regnault	4 Erster Differentialquotient in Millim. Quecksilber $\frac{dp}{dt}$	5 $\frac{dp}{p\,dt}$
−25	248	13007.02	399.64	0.030725
−20	253	15142.44	456.63	0.030156
−15	258	17582.48	518.66	0.029499
−10	263	20340.20	585.19	0.028770
− 5	268	23441.34	656.01	0.027985
0	273	26906.60	730.70	0.027157
+ 5	278	30753.80	808.70	0.026296
+10	283	34998.65	889.42	0.025413
+15	288	39646.86	972.06	0.024518
+20	293	44716.58	1055.98	0.023615
+25	298	50207.32	1140.31	0.022712
+30	303	56119.05	1224.18	0.021814
+35	308	62447.30	1306.77	0.020926
+40	313	69184.45	1387.22	0.020051
+45	318	76314.60	1464.71	0.019193

von Quecksilber. Tab. 8.

6	7	8	9	1
$T\cdot\frac{dp}{p\,dt}$	$\frac{r}{u}=AT\frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u}=\frac{r}{u}-Ap$	$\frac{Apu}{r}=\varphi$	Temperatur Celsius t
13.911	1.36	1.27	0.07189	140
13.855	2.62	2.43	0.07217	160
13.738	4.85	4.49	0.07279	180
13.576	8.66	8.03	0.07366	200
13.381	14.89	13.78	0.07473	220
13.159	24.82	22.94	0.07599	240
12.918	40.07	36.97	0.07741	260
12.660	63.00	58.02	0.07898	280
12.390	96.22	88.45	0.08071	300
12.110	143.20	131.38	0.08257	320
11.823	207.90	190.32	0.08458	340
11.529	294.96	269.38	0.08673	360
11.232	410.48	373.94	0.08903	380
10.932	556.73	505.80	0.09147	400
10.631	742.40	672.57	0.09406	420
10.328	971.73	877.64	0.09682	440
10.027	1250.24	1125.55	0.09973	460
9.726	1582.19	1419.52	0.10281	480
9.429	1971.57	1762.47	0.10605	500
9.134	2421.13	2156.08	0.10947	520

von Kohlensäure. Tab. 9.

6	7	8	9	1
$T\cdot\frac{dp}{p\,dt}$	$\frac{r}{u}=AT\frac{dp}{dt}$	$\frac{\varrho}{u}=\frac{r}{u}-Ap$	$\frac{Apu}{r}=\varphi$	Temperatur Celsius t
7.620	3178.42	2761.30	0.13124	−25
7.629	3704.91	3219.31	0.13107	−20
7.611	4291.33	3727.47	0.13139	−15
7.566	4935.58	4283.29	0.13216	−10
7.500	5638.04	4886.30	0.13333	− 5
7.414	6397.22	5534.35	0.13488	0
7.310	7209.74	6223.49	0.13679	+ 5
7.192	8072.03	6949.65	0.13904	+10
7.061	8977.87	7706.43	0.14162	+15
6.919	9922.30	8488.28	0.14452	+20
6.768	10897.49	9287.38	0.14775	+25
6.610	11895.36	10095.67	0.15129	+30
6.445	12907.36	10904.73	0.15515	+35
6.276	13924.36	11705.67	0.15934	+40
6.103	14937.11	12489.76	0.16384	+45

Haupttabelle für gesättigt

1	2	3	4	5	6
Dampfspannung.					
In Atmosphären	In Millimeter Quecksilbersäule	In Kilogrammen pro Quadratmeter p	Temperatur (Celsius) t (Regnault)	Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Innere latente Wär ϱ [ϱ=575.40—0.79
0.1	76	1033.4	46.21	46.282	538.845
0.2	152	2066.8	60.45	60.589	527.354
0.3	228	3100.2	69.49	69.687	520.433
0.4	304	4133.6	76.25	76.499	515.056
0.5	380	5167.0	81.71	82.017	510.767
0.6	456	6200.4	86.32	86.662	507.121
0.7	532	7233.8	90.32	90.704	503.957
0.8	608	8267.2	93.88	94.304	501.141
0.9	684	9300.6	97.08	97.543	498.610
1.0	760	10334.0	100.00	100.500	496.300
1.1	836	11367.4	102.68	103.216	494.180
1.2	912	12400.8	105.17	105.740	492.210
1.3	988	13434.2	107.50	108.104	490.367
1.4	1064	14467.6	109.68	110.316	488.643
1.5	1140	15501.0	111.74	112.408	487.014
1.6	1216	16534.4	113.69	114.389	485.471
1.7	1292	17567.8	115.54	116.269	484.008
1.8	1368	18601.2	117.30	118.059	482.616
1.9	1444	19634.6	118.99	119.779	481.279
2.0	1520	20668.0	120.60	121.417	480.005
2.1	1596	21701.4	122.15	122.995	478.779
2.2	1672	22734.8	123.64	124.513	477.601
2.3	1748	23768.2	125.07	125.970	476.470
2.4	1824	24801.6	126.46	127.386	475.370
2.5	1900	25835.0	127.80	128.753	474.310
2.6	1976	26868.4	129.10	130.079	473.282
2.7	2052	27901.8	130.35	131.354	472.293
2.8	2128	28935.2	131.57	132.599	471.328
2.9	2204	29968.6	132.76	133.814	470.387
3.0	2280	31002.0	133.91	134.989	469.477
3.1	2356	32035.4	135.03	136.133	468.591
3.2	2432	33068.8	136.12	137.247	467.729
3.3	2508	34102.2	137.19	138.341	466.883
3.4	2584	35135.6	138.23	139.404	466.060

Wasserdämpfe. Tab. 10.

7	8	9	10	11	12
Aeussere latente Wärme	Werthe von		Differenzen	Dichtigkeit (Gewicht von einem Cubikmeter)	Differenzen
Apu	u	$\frac{\varrho}{u}$		γ Kilogr.	
35.464	14.5508	37.03		0.0687	
36.764	7.5421	69.95	32.92	0.1326	0.0639
37.574	5.1388	101.27	31.32	0.1945	619
38.171	3.9154	131.55	30.28	0.2553	608
38.637	3.1705	161.10	29.55	0.3153	600
39.045	2.6700	189.93	28.83	0.3744	591
39.387	2.3086	218.29	28.36	0.4330	586
39.688	2.0355	246.20	27.91	0.4910	580
39.957	1.8216	273.72	27.52	0.5487	577
40.200	1.6494	300.90	27.18	0.6059	572
40.421	1.5077	327.77	26.87	0.6628	569
40.626	1.3891	354.35	26.58	0.7194	566
40.816	1.2882	380.66	26.31	0.7757	563
40.993	1.2014	406.73	26.07	0.8317	560
41.159	1.1258	432.58	25.85	0.8874	557
41.315	1.0595	458.22	25.64	0.9430	556
41.463	1.0007	483.66	25.44	0.9983	553
41.602	0.9483	508.93	25.27	1.0534	551
41.734	0.9012	534.03	25.10	1.1084	550
41.861	0.8588	558.94	24.91	1.1631	547
41.981	0.8202	583.72	24.78	1.2177	546
42.096	0.7851	608.34	24.62	1.2721	544
42.207	0.7529	632.82	24.48	1.3264	543
42.314	0.7234	657.14	24.32	1.3805	541
42.416	0.6961	681.36	24.22	1.4345	540
42.515	0.6709	705.43	24.07	1.4883	538
42.610	0.6475	729.42	23.99	1.5420	537
42.702	0.6257	753.24	23.82	1.5956	536
42.791	0.6054	776.97	23.73	1.6490	534
42.876	0.5864	800.61	23.64	1.7024	534
42.960	0.5686	824.13	23.52	1.7556	532
43.040	0.5518	847.57	23.44	1.8088	532
43.119	0.5361	870.78	23.31	1.8618	530
43.196	0.5213	894.09	23.21	1.9147	529

Haupttabelle für gesättigt

1	2	3	4	5	6
Dampfspannung.					
In Atmosphären	In Millimeter Quecksilbersäule	In Kilogrammen pro Quadratmeter p	Temperatur (Celsius) t (Regnault)	Flüssigkeitswärme $q=\int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Innere latente Wärme ϱ
3.5	2660	36169.0	139.24	140.438	465.261
3.6	2736	37202.4	140.23	141.450	464.478
3.7	2812	38235.8	141.21	142.453	463.703
3.8	2888	39269.2	142.15	143.416	462.950
3.9	2964	40302.6	143.08	144.368	462.224
4.0	3040	41336.0	144.00	145.310	461.496
4.1	3116	42369.4	144.89	146.222	460.792
4.2	3192	43402.8	145.76	147.114	460.104
4.3	3268	44436.2	146.61	147.985	459.431
4.4	3344	45469.6	147.46	148.857	458.759
4.5	3420	46503.0	148.29	149.708	458.103
4.6	3496	47536.4	149.10	150.539	457.462
4.7	3572	48569.8	149.90	151.360	456.829
4.8	3648	49603.2	150.69	152.171	456.204
4.9	3724	50636.6	151.46	152.961	455.595
5.0	3800	51670.0	152.22	153.741	454.994
5.1	3876	52703.4	152.97	154.512	454.401
5.2	3952	53736.8	153.70	155.262	453.823
5.3	4028	54770.2	154.43	156.012	453.246
5.4	4104	55803.6	155.14	156.741	452.684
5.5	4180	56837.0	155.85	157.471	452.123
5.6	4256	57870.4	156.54	158.181	451.577
5.7	4332	58903.8	157.22	158.880	451.039
5.8	4408	59937.2	157.90	159.579	450.501
5.9	4484	60970.6	158.56	160.259	449.979
6.0	4560	62004.0	159.22	160.938	449.457
6.1	4636	63037.4	159.87	161.607	448.943
6.2	4712	64070.8	160.50	162.255	448.444
6.3	4788	65104.2	161.14	162.915	447.938
6.4	4864	66137.6	161.76	163.553	447.448
6.5	4940	67171.0	162.37	164.181	446.965
6.6	5016	68204.4	162.98	164.810	446.483
6.7	5092	69237.8	163.58	165.428	446.008
6.8	5168	70271.2	164.18	166.047	445.534
6.9	5244	71304.6	164.76	166.645	445.075

rdämpfe. Tab. 10. Fortsetzung 1.

	8	9	10	11	12
ere ärme	Werthe von		Differenzen	Dichtigkeit (Gewicht von einem Cubikmeter)	Differenzen
	u	$\frac{\varrho}{u}$		γ Kilogr.	
9	0.5072	917.2		1.9676	
2	0.4940	940.3	23.1	2.0203	0.0527
3	0.4814	963.2	22.9	2.0729	526
0	0.4695	986.1	22.9	2.1255	529
8	0.4581	1008.9	22.8	2.1780	525
4	0.4474	1031.6	22.7	2.2303	523
7	0.4371	1054.2	22.6	2.2826	523
9	0.4273	1076.8	22.6	2.3349	523
9	0.4179	1099.3	22.5	2.3871	522
9	0.4090	1121.7	22.4	2.4391	520
8	0.4004	1144.0	22.3	2.4911	520
5	0.3922	1166.3	22.3	2.5430	519
0	0.3844	1188.5	22.2	2.5949	519
5	0.3768	1210.6	22.1	2.6467	518
9	0.3696	1232.7	22.1	2.6984	517
2	0.3626	1254.7	22.0	2.7500	516
3	0.3559	1276.6	21.9	2.8016	516
3	0.3495	1298.5	21.9	2.8531	515
3	0.3433	1320.3	21.8	2.9046	515
2	0.3373	1342.1	21.8	2.9560	514
1	0.3315	1363.8	21.7	3.0073	513
7	0.3259	1385.4	21.6	3.0586	513
3	0.3205	1407.0	21.6	3.1098	512
9	0.3153	1428.5	21.5	3.1610	512
3	0.3103	1450.0	21.5	3.2122	512
7	0.3054	1471.5	21.5	3.2632	510
0	0.3007	1492.9	21.4	3.3142	510
3	0.2962	1514.2	21.3	3.3652	510
4	0.2917	1535.5	21.3	3.4161	509
6	0.2874	1556.7	21.2	3.4670	509
6	0.2833	1577.9	21.2	3.5178	508
6	0.2792	1599.0	21.1	3.5685	507
6	0.2753	1620.1	21.1	3.6192	507
4	0.2715	1641.2	21.1	3.6699	507
2	0.2678	1662.2	21.0	3.7206	507

Hauptabelle für gesätti

1	2	3	4	5	6
Dampfspannung.					
In Atmosphären	In Millimeter Quecksilbersäule	In Kilogrammen pro Quadratmeter p	Temperatur Celsius t (Regnault)	Flüssigkeitswärme $q = \int_0^t c\,dt$ (Regnault)	Inn[illegible] latente Wä[illegible] ϱ
7.00	5320	72338.0	165.34	167.243	444.[illegible]
7.25	5510	74921.5	166.77	168.718	443.[illegible]
7.50	5700	77505.0	168.15	170.142	442.[illegible]
7.75	5890	80088.5	169.50	171.535	441.[illegible]
8.00	6080	82672.0	170.81	172.888	440.290
8.25	6270	85255.5	172.10	174.221	439.260
8.50	6460	87839.0	173.35	175.514	438.290
8.75	6650	90422.5	174.57	176.775	437.315
9.00	6840	93006.0	175.77	178.017	436.366
9.25	7030	95589.5	176.94	179.228	435.440
9.50	7220	98173.0	178.08	180.408	434.539
9.75	7410	100756.5	179.21	181.579	433.645
10.00	7600	103340.0	180.31	182.719	432.775
10.25	7790	105923.5	181.38	183.828	431.925
10.50	7980	108507.0	182.44	184.927	431.090
10.75	8170	111090.5	183.48	186.005	430.267
11.00	8360	113674.0	184.50	187.065	429.460
11.25	8550	116257.5	185.51	188.113	428.661
11.50	8740	118841.0	186.49	189.131	427.884
11.75	8930	121424.5	187.46	190.139	427.119
12.00	9120	124008.0	188.41	191.126	426.368
12.25	9310	126591.5	189.35	192.104	425.621
12.50	9500	129175.0	190.27	193.060	424.896
12.75	9690	131758.5	191.18	194.007	424.177
13.00	9880	134342.0	192.08	194.944	423.465
13.25	10070	136925.5	192.96	195.860	422.763
13.50	10260	139509.0	193.83	196.766	422.068
13.75	10450	142092.5	194.69	197.662	421.[illegible]
14.00	10640	144676.0	195.53	198.537	420.7[illegible]

lämpfe. Tab. 10. Fortsetzung 2.

	8	9	10	11	12
me	Werthe von u	$\frac{\varrho}{u}$	Differenzen	Dichtigkeit (Gewicht von einem Cubikmeter) γ Kilogr.	Differenzen
	0.2642	1683.0		3.7711	
	0.2556	1735.2	52.2	3.8974	0.1263
	0.2475	1787.1	51.9	4.0234	1260
	0.2400	1838.7	51.6	4.1490	1256
	0.2329	1890.1	51.4	4.2745	1255
	0.2263	1941.2	51.1	4.3997	1252
	0.2200	199[illegible]1	50.9	4.5248	1251
	0.2141	2042.8	50.7	4.6495	1247
	0.2085	2093.3	50.5	4.7741	1246
	0.2031	2143.5	50.2	4.8985	1244
	0.1981	2193.5	50.0	5.0226	1241
	0.1933	2243.3	49.8	5.1466	1240
	0.1887	2293.0	49.7	5.2704	1238
	0.1844	2342.5	49.5	5.3941	1237
	0.1802	2391.7	49.2	5.5174	1233
	0.1763	2440.7	49.0	5.6405	1231
	0.1725	2489.5	48.8	5.7636	1231
	0.1689	2538.2	48.7	5.8864	1228
	0.1654	2586.8	48.6	6.0092	1228
	0.1621	2635.2	48.4	6.1318	1226
	0.1589	2683.4	48.2	6.2543	1225
	0.1558	2731.4	48.0	6.3765	1222
	0.1529	2779.3	47.9	6.4986	1221
	0.1500	2827.0	47.7	6.6206	1220
	0.1473	2874.5	47.5	6.7424	1218
	0.1447	2922.0	47.5	6.8642	1218
	0.1421	2969.3	47.3	6.9857	1215
	0.1397	3016.5	47.2	7.1072	1215
	0.1373	3063.4	46.9	7.2283	1211

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.



